Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven

Autor(en): **Hering, Leonhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 2

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37183

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Dann ist

$$x_1^2 + \cdots + x_t^2 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Ist $p \equiv 1 \pmod 4$ und $t = 2$, so ist wegen $s \leq 2$ sicher $s \leq t$.
Ist aber $t = 1$, so folgt $p \mid x_1$ und aus (6) $(x_1/p)^2 \equiv k \pmod{p^{a-2}}$.
Ist $p \equiv 3 \pmod 4$, so ist nur im Falle $t \leq 2$ etwas zu beweisen.
Wegen B hat aber $x_1^2 + x_2^2 \equiv 0 \pmod p$ nur Lösungen x_1, x_2 mit $x_1, x_2 \equiv 0 \pmod p$.
Also folgt aus (6)

$$(x_1/p)^2 + (x_2/p)^2 \equiv k \pmod{p^{a-2}}.$$

Ist $p = 2$, so ist nur im Falle $t \leq 3$ etwas zu beweisen.
Die Kongruenz $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv 0 \pmod 4$ hat nur Lösungen x_1, x_2, x_3 mit $x_1, x_2, x_3 \equiv 0 \pmod 2$.
Also folgt aus (6)

$$(x_1/2)^2 + \cdots + (x_t/2)^2 \equiv k \pmod{2^{a-2}}$$

und daraus $s(k, 2^{a-2}) \leq t$.

H. Wegmann, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

1 D. Laugwitz: Quadratsummen in Restklassenringen. El. Math. *35*, 73–79 (1980).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/020036-04$1.50 + 0.20/0

Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven

Herrn Prof. Dr. H. R. Müller zum 70. Geburtstag gewidmet

Werden in der euklidischen Ebene die Endpunkte X und X^* einer Strecke s von *konstanter Länge* C entlang einer Eilinie k bewegt, so erzeugt ein *fester Punkt* $\bar{X} \in s$ eine i. a. nichtkonvexe Kurve $\bar{k}$. Der *Flächeninhalt* des Bereiches zwischen k und $\bar{k}$ hängt nach einem Satz von Holditch nicht von der Gestalt der Kurve k ab, sondern nur von der Lage des Punktes $\bar{X}$ auf s [8]. Ausführlichere Untersuchungen damit zusammenhängender Fragen und Präzisierungen der klassischen Formulierung sind bei A. Broman [3, 4] zu finden. Ein etwas allgemeineres Ergebnis erhalten wir, wenn sich die Endpunkte der Strecke s entlang zweier verschiedener Kurven k und k^* bewegen [2]. H. R. Müller hat diese Resultate u. a. auf ein in gewissem Sinne *«duales»* Gegenstück zur klassischen Holditch-Bewegung übertragen [9]. Er unter-

sucht die *Gleitbewegung* der Schenkel eines *starren Winkels* auf einer bzw. zwei Kurven in der euklidischen Ebene und bestimmt die *Enveloppenlänge* von relativ zum Winkel *festen Geraden*.
In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der klassische Satz von Holditch auf Punkte ausgedehnt, die *nicht* auf der Geraden durch X und X^* liegen. Danach betrachten wir *Grenzfälle* der von H.R. Müller untersuchten Winkelgleitbewegung. Anschliessend werden Resultate für den *Bahnflächeninhalt* von relativ zum starren Winkel *festen Punkten* bzw. für die *Enveloppenlänge* von relativ zur Strecke *s festen Geraden* hergeleitet. Zuletzt untersuchen wir eine weitere Bewegung einer *Geraden* entlang zweier Leitkurven, die der Winkelgleitbewegung von H.R. Müller [9] ähnelt.

1. Bewegung B_{F1}

Bei dem ebenen, geschlossenen Bewegungsvorgang B_{F1} (*klassische Holditch-Bewegung*) mögen die Endpunkte X und X^* einer Strecke *konstanter Länge* C in einer Ebene ε die *geschlossenen* Kurven k und k^* durchlaufen. Das begleitende orthonormierte *Bezugssystem* D legen wir mit Hilfe des Normalenvektors $\boldsymbol{a}_3$ der Ebene ε wie folgt fest:

$$\boldsymbol{a}_1 := \frac{X^* - X}{C}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1. \tag{1}$$

Bezeichnen wir mit ν die *Drehzahl* [2] von B_{F1}, so gilt:

$$\oint d\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = -\oint d\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 2\pi\nu \qquad (\nu \in \boldsymbol{Z}). \tag{2}$$

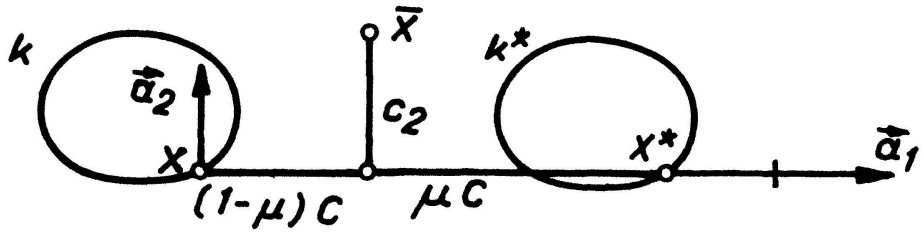
Relativ fest bezüglich der Strecke XX^* wählen wir nun einen beliebigen *Punkt* $\bar{X}$:

$$\bar{X} := \mu X + (1-\mu) X^* + c_2 \boldsymbol{a}_2 \qquad (\mu, c_2 = \text{const})$$

und bestimmen den (orientierten) *Flächeninhalt*

$$F(\bar{X}) := \frac{1}{2} \oint (\boldsymbol{a}_3, \bar{X}, d\bar{X}) \tag{3}$$

seiner Bahnkurve $\bar{k}$ bei der Bewegung B_{F1}.



Figur 1. Konstruktion der Bewegung B_{F1} (Beispiele in Abschnitt 7).

Dabei nutzen wir aus, dass die (durch formale Integration bestimmte) Länge L der von einer bewegten Geraden eingehüllten geschlossenen Kurve k aus der geschlossenen Bahnkurve eines Geradenpunktes X und dem Einheitsrichtungsvektor $\boldsymbol{a}$ der Geraden bestimmt werden kann (s. a. [5, 6]):

$$L = \oint d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{a}. \tag{4}$$

Wir erhalten dann:

Satz 1. *Bewegen wir die Endpunkte einer Strecke XX^* konstanter Länge C entlang zweier geschlossener Kurven k und k^*, so erzeugt ein relativ zu XX^* fester Punkt $\bar{X}$ eine geschlossene Kurve $\bar{k}$. Der Flächeninhalt $F(\bar{X})$ des von $\bar{k}$ berandeten Bereiches ist ausser von den Konstanten der Bewegung nur noch abhängig von den Flächeninhalten $F(X)$ und $F(X^*)$ der von k und k^* berandeten Bereiche und der Länge L_1 der Enveloppe der Geraden durch X und X^*. Es gilt:*

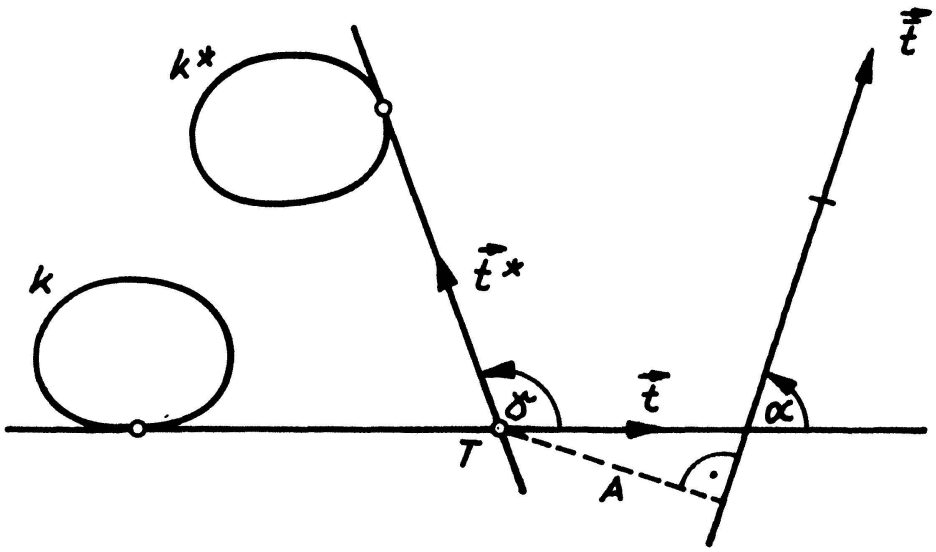
$$F(\bar{X}) = \mu F(X) + (1-\mu) F(X^*) - \mu(1-\mu) \nu \pi C^2 + c_2(\nu \pi c_2 - L_1).$$

Für $c_2 = 0$, d.h. die Punkte X, X^* und $\bar{X}$ liegen auf einer Geraden, ergibt sich aus Satz 1 die *Verallgemeinerung* des klassischen Satzes von Holditch auf *zwei* Leitkurven [2] bzw. der *klassische Satz von Holditch* [4, 8] selbst, wenn die Leitkurven k und k^* zusammenfallen.

2. Bewegung B_{L1}

Ein zur klassischen Holditch-Bewegung in gewissem Sinne *«duales»* Gegenstück betrachtet H. R. Müller in [9]. Die von ihm untersuchte Bewegung wollen wir mit B_{L1} bezeichnen. B_{L1} ist dadurch festgelegt, dass jeder Tangente t einer Eilinie k so eine Tangente t^* einer anderen Eilinie k^* zugeordnet wird, dass die Einheitsrichtungsvektoren $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{t}^*$ dieser Geraden stets den *konstanten Winkel* γ einschliessen:

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t}^* = \cos\gamma \qquad (\gamma = \text{const}).$$



Figur 2. Konstruktion der Bewegung B_{L1} (Beispiele in Abschnitt 7).

Im Abstand A vom Schnittpunkt T der Tangenten t und t^* wird dann eine *Gerade* $\bar{t}$ mit dem Einheitsrichtungsvektor:

$$\bar{t} := \frac{\sin(\gamma - a)}{\sin\gamma} t + \frac{\sin a}{\sin\gamma} t^* \qquad (a = \text{const}) \tag{5}$$

gewählt. Hierbei muss für γ zunächst gelten:

$$\gamma \neq z\pi \qquad (z \in \mathbf{Z}). \tag{6}$$

Für die (durch formale Integration bestimmte) *Länge* $\bar{L}$ der von der Geraden $\bar{t}$ bei der Bewegung B_{L1} eingehüllten Kurve $\bar{k}$ fand H. R. Müller, dass diese allein durch die *Konstanten* γ, a, A und die *Längen* L und L^* von k und k^* über die folgende Beziehung bestimmt ist:

$$\bar{L} = \frac{\sin(\gamma - a)}{\sin\gamma} L + \frac{\sin a}{\sin\gamma} L^* + 2\pi A \qquad \text{(s. [9])}. \tag{7}$$

Im folgenden wollen wir nun die durch (6) ausgeschlossenen *Grenzfälle* $\gamma \to 0$ und $\gamma \to \pi$ für den Fall betrachten, dass $A = 0$ ist, d. h. t, t^* und $\bar{t}$ schneiden sich im Punkt T. Wir setzen dabei voraus, dass die beiden Leitkurven k und k^* positiv orientiert sind und ihre Orientierung mit der der Tangenten t und t^* in den jeweiligen Berührpunkten übereinstimmt. Wir können dann vier Fälle unterscheiden.

Fall 1. Die Leitkurven k und k^* seien *verschieden* und wir fordern $\gamma \to 0$. Der Tangentenschnittpunkt T wandert dabei ins Unendliche, die Tangenten t und t^* werden *parallel* mit *gleicher* Orientierung. Damit die Beziehung (5) sinnvoll bleibt, müssen wir auch $a \to 0$ streben lassen. ($a \to \pi$ ergibt das gleiche Resultat mit umgekehrten Vorzeichen.) Die Gerade $\bar{t}$ wird dann *parallel* zu t und t^*. Bezeichnen wir mit λD ($\lambda = \text{const}$) den Abstand der Parallelen t und $\bar{t}$ und mit $(1-\lambda) D$ den von $\bar{t}$ und t^* (D ist i. a. nicht konstant!), dann gilt:

$$\lim_{a,\gamma \to 0} \frac{\sin a}{\sin\gamma} = \frac{\lambda D}{D} = \lambda, \qquad \lim_{a,\gamma \to 0} \frac{\sin(\gamma - a)}{\sin\gamma} = \frac{(1-\lambda) D}{D} = 1 - \lambda.$$

Aus (7) folgt somit für die *Länge* $\bar{L}$ der von $\bar{t}$ eingehüllten Kurve:

$$\bar{L} = (1-\lambda) L + \lambda L^*.$$

Fall 2. Strebt bei *zwei* Leitkurven $\gamma \to \pi$ und $a \to 0$, so wandert auch diesmal der Tangentenschnittpunkt T ins Unendliche. Die parallelen Tangenten t und t^* sind aber jetzt *entgegengesetzt* orientiert. Wir erhalten:

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ \gamma \to \pi}} \frac{\sin a}{\sin\gamma} = -\frac{\lambda D}{D} = -\lambda, \qquad \lim_{\substack{a \to 0 \\ \gamma \to \pi}} \frac{\sin(\gamma - a)}{\sin\gamma} = \frac{(1-\lambda) \mathrm{D}}{D} = 1 - \lambda.$$

Für die *Enveloppenlänge* $\bar{L}$ der Geraden $\bar{t}$ gilt also:

$$\bar{L}=(1-\lambda)L-\lambda L^*.$$

Fall 3. *Fallen* die Leitkurven k und k^* *zusammen,* so erhalten wir für $\gamma \to \pi$ und $a \to 0$ einen Spezialfall von Fall 2. Aus $L=L^*$ folgt nun:

$$\bar{L}=(1-2\lambda)L.$$

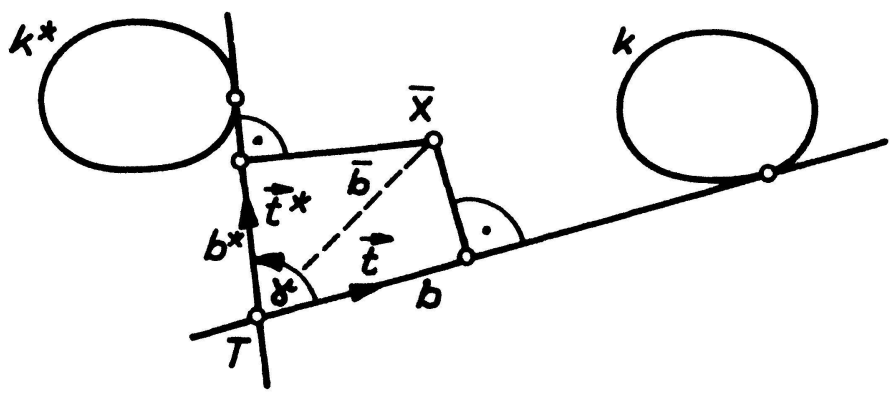
Fall 4. Fordern wir im Falle *einer* Leitkurve, dass $\gamma \to 0$ strebt ($a=\text{const}$, aber beliebig), so *fallen* die Tangenten t und t^* *zusammen* und ihr *«Schnittpunkt»* T liegt auf k. Die Enveloppe von $\bar{t}$ ist jetzt eine *Evolutoide* von k. Für ihre *Länge* $\bar{L}$ folgt aus (7):

$$\bar{L}=L\lim_{\gamma\to 0}\frac{\sin a+\sin(\gamma-a)}{\sin\gamma}=L\cos a.$$

3. Bewegung B_{F2}

Durch Kombination der *klassischen* Holditch-Bewegung B_{F1} und der dazu in gewissem Sinne *«dualen»* Winkelgleitbewegung B_{L1} von H. R. Müller erhalten wir noch weitere ebene Bewegungen. Zunächst betrachten wir die Bewegung B_{F2}, die wie B_{L1} durch das Gleiten der Schenkel t und t^* eines *starren Winkels* auf zwei Eilinien k und k^* festgelegt ist. Dabei sei wieder vorausgesetzt, dass die Öffnung γ des Winkels kein Vielfaches von π ist. Wir untersuchen jetzt anstatt der *Enveloppenlänge* einer *Geraden* den *Flächeninhalt* $F(\bar{X})$ der Bahnkurve $\bar{k}$ eines *Punktes* $\bar{X}$, der durch die *konstanten Abstände* b und b^* festgelegt ist (s. a. Figur 3):

$$\bar{X}=T+\frac{b-b^*\cos\gamma}{\sin^2\gamma}t+\frac{b^*-b\cos\gamma}{\sin^2\gamma}t^* \qquad (b,b^*,\gamma=\text{const}). \tag{8}$$



Figur 3. Konstruktion der Bewegung B_{F2} (Beispiele in Abschnitt 7).

Bezeichnen wir mit $\bar{b}$ den konstanten Abstand des Punktes $\bar{X}$ vom Winkelscheitel T, dann erhalten wir mit Hilfe der Beziehungen (3), (4) und (8) für den (orientierten) *Bahnflächeninhalt* $F(\bar{X})$ das folgende Resultat:

Satz 2. *Bei der Gleitbewegung der Schenkel eines starren Winkels der Öffnung γ auf zwei Eilinien k und k^* erzeugt ein relativ zum Winkel fester Punkt $\bar{X}$ eine geschlossene Kurve $\bar{k}$. Der Flächeninhalt $F(\bar{X})$ des von $\bar{k}$ berandeten Bereiches ist ausser von den Konstanten der Bewegung nur noch abhängig von den Längen L und L^* von k und k^* und dem Bahnflächeninhalt des Winkelscheitels T. Es gilt:*

$$F(\bar{X}) = F(T) + \bar{b}^2 \pi + \frac{b L^* - b^* L}{\sin\gamma}.$$

4. Bewegung B_{L2}

Die Bewegung B_{L2}, die nun betrachtet werden soll, wird wie die klassische Holditch-Bewegung B_{F1} durch eine *Strecke XX^* konstanter Länge C* festgelegt, deren Endpunkte X und X^* zwei geschlossene Kurven k und k^* durchlaufen. Anstatt des *Bahnflächeninhaltes* eines *Punktes* bestimmen wir jetzt aber die *Enveloppenlänge* $\bar{L}$ einer relativ zu XX^* festen *Geraden* $\bar{g}$. Im begleitenden Bezugssystem, das wie bei der Bewegung B_{F1} gewählt wird, sei der Einheitsrichtungsvektor $\bar{t}$ von $\bar{g}$ durch

$$\bar{t} := \cos\alpha\, \boldsymbol{a}_1 + \sin\alpha\, \boldsymbol{a}_2 \qquad (\alpha = \text{const})$$

festgelegt und die Gerade verlaufe durch

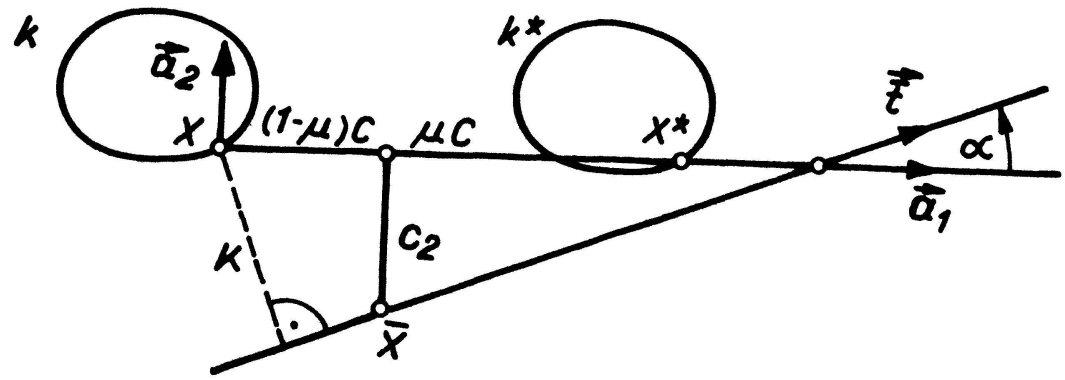
$$\bar{X} := \mu \boldsymbol{X} + (1-\mu)\boldsymbol{X}^* + c_2 \boldsymbol{a}_2 \qquad (\mu, c_2 = \text{const}).$$

Für den konstanten Abstand K des Punktes X von $\bar{g}$ gilt dann:

$$K = (1-\mu)\sin\alpha\, C - c_2 \cos\alpha\,. \tag{9}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (1) und (2) folgt nun aus (4) für die (durch formale Integration bestimmte) *Länge* $\bar{L}$ der von $\bar{g}$ bei der Bewegung B_{L2} eingehüllten Kurve $\bar{k}$:

$$\bar{L} = \oint d\bar{\boldsymbol{X}} \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{bzw.} \tag{10}$$
$$\bar{L} = \cos\alpha\,(L_1 - \nu 2\pi c_2) + \sin\alpha\,(1-\mu)\nu 2\pi C + \sin\alpha \oint d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{a}_2\,.$$



Figur 4. Konstruktion der Bewegung B_{L2} (Beispiele in Abschnitt 7).

L_1 ist dabei die Länge der von der Geraden durch die Punkte X und X^* bei B_{L2} eingehüllten Kurve, und v ist die *Drehzahl* der Strecke XX^* (s. Abschnitt 1). Das Integral $\oint d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{a}_2$ können wir nach (4) als Länge L_2 der Kurve deuten, die von einer Geraden durch X mit dem Richtungsvektor $\boldsymbol{a}_2$ bei der Bewegung eingehüllt wird. Für L_2 gilt nach [2], S. 133:

$$L_2 = \oint d\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{a}_2 = \oint p\, d\phi\,, \tag{11}$$

wobei p der Abstand der bewegten Geraden vom Gangpol P ist. Aus der Herleitung des Satzes von Holditch in [2], S. 120 und 114 f., folgt in unserem Fall:

$$2F(X^*) = C^2 v 2\pi - 2C \oint p\, d\phi + 2F(X)\,. \tag{12}$$

Dabei sind $F(X)$ und $F(X^*)$ die Flächeninhalte der von den Kurven k und k^* berandeten Bereiche. Aus den Beziehungen (9) bis (12) erhalten wir somit:

Satz 3. *Bewegen wir die Endpunkte einer Strecke XX^* konstanter Länge C entlang zweier geschlossener Kurven k und k^*, so hüllt eine relativ zu XX^* feste Gerade $\bar{g}$ eine geschlossene Kurve $\bar{k}$ ein. Die Länge $\bar{L}$ von $\bar{k}$ ist ausser von den Konstanten der Bewegung nur noch abhängig von den Flächeninhalten $F(X)$ und $F(X^*)$ von k und k^* und der Länge L_1 der Enveloppe der Geraden durch X und X^*. Es gilt:*

$$\bar{L} = \cos a\, L_1 + \sin a \left(\frac{F(X) - F(X^*)}{C} - v\pi C \right) + v 2\pi K\,.$$

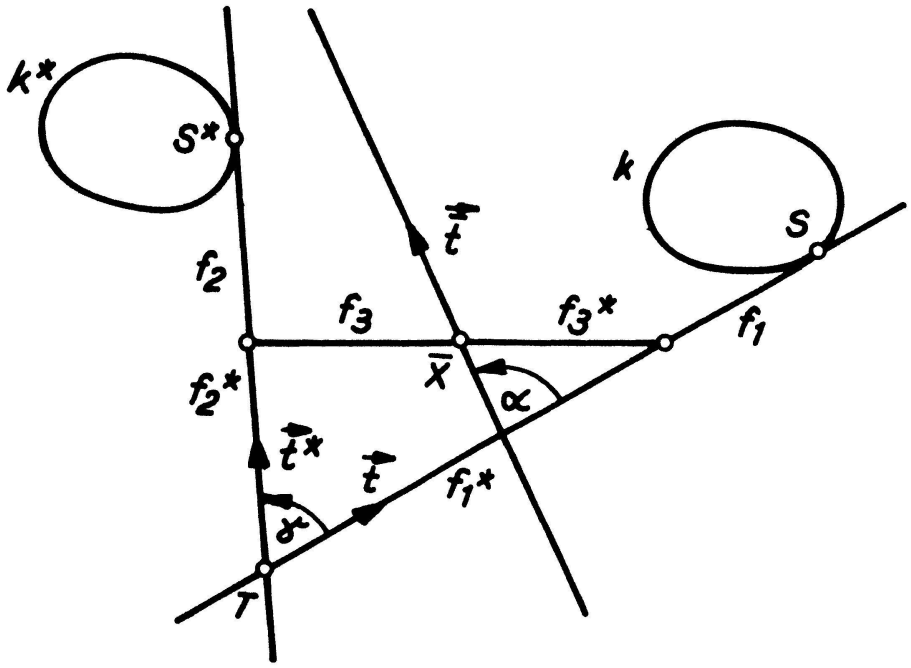
5. Bewegung B_{L3}

In diesem Abschnitt wollen wir nun noch eine Bewegung B_{L3} untersuchen, die der von H. R. Müller [9] betrachteten Bewegung B_{L1} ähnelt. Wie bei B_{L1} und auch bei B_{F2} gehen wir bei B_{L3} von der Gleitbewegung der Schenkel t und t^* eines *starren Winkels* mit Scheitel T auf zwei Eilinien k und k^* aus. S bzw. S^* sei der Berührpunkt der Tangente t bzw. t^* mit der Kurve k bzw. k^*. Wir wollen nun die *Enveloppenlänge* $\bar{L}$ einer *Geraden* $\bar{t}$ bestimmen, die zwar i. a. nicht fest bezüglich des starren Winkels ist, deren Lage aber durch den Winkelscheitel T, die Kurvenpunkte S und S^* und die Einheitsrichtungsvektoren $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{t}^*$ der Geraden t und t^* festgelegt ist. Die Gerade $\bar{t}$ verlaufe durch den Punkt $\bar{X}$ und habe den Einheitsrichtungsvektor $\bar{\boldsymbol{t}}$:

$$\bar{\boldsymbol{X}} := \mu\left(\rho \boldsymbol{T} + (1-\rho)\boldsymbol{S}\right) + (1-\mu)\left(\rho^* \boldsymbol{T} + (1-\rho^*)\boldsymbol{S}^*\right),$$

$$\bar{\boldsymbol{t}} := \frac{\sin(\gamma - a)}{\sin\gamma}\boldsymbol{t} + \frac{\sin a}{\sin\gamma}\boldsymbol{t}^* \qquad (\mu, \rho, \rho^*, a, \gamma = \text{const})\,.$$

Für die (durch formale Integration bestimmte) *Länge* $\bar{L}$ der von der Geraden $\bar{t}$ bei der Bewegung B_{L3} eingehüllten Kurve $\bar{k}$ folgt dann mit Hilfe der Beziehung (4):



Figur 5. Konstruktion der Bewegung B_{L3}. Für die Abstandsfunktionen f_i, f_i^* gilt:

$$\frac{f_1}{f_1^*}=\frac{\rho}{1-\rho},\qquad \frac{f_2}{f_2^*}=\frac{\rho^*}{1-\rho^*},\qquad \frac{f_3}{f_3^*}=\frac{\mu}{1-\mu}\qquad (\mu,\rho,\rho^*=\text{const}).$$

Satz 4. *Bei der Gleitbewegung der Schenkel eines starren Winkels der Öffnung γ auf zwei Eilinien k und k^* hüllt eine Gerade $\bar{t}$, die bezüglich des Winkels und dessen Berührpunkten mit k und k^* relativ fest ist, eine geschlossene Kurve $\bar{k}$ ein. Die Länge $\bar{L}$ von $\bar{k}$ ist ausser von den Konstanten der Bewegung nur noch von den Längen L und L^* von k und k^* abhängig. Es gilt:*

$$\bar{L}=\mu\cos a\,L+\mu\rho\sin a\,\frac{L^*-\cos\gamma\,L}{\sin\gamma}$$
$$+(1-\mu)\cos(\gamma-a)\,L^*+(1-\mu)\rho^*\sin(\gamma-a)\,\frac{L-\cos\gamma\,L^*}{\sin\gamma}\,.$$

Eine zusätzliche *Parallelverschiebung* der Geraden $\bar{t}$ um eine konstante Strecke A hat, analog zur Bewegung B_{L1} (s. (7)), einen Zusatzterm $2\pi A$ zur Folge. Dem *Spezialfall* $\rho=\rho^*=1$ der Bewegung B_{L3} entspricht dann gerade die von H. R. Müller untersuchte *Winkelgleitbewegung* B_{L1} (s. Abschnitt 2).

6. Übertragung auf Regelflächen

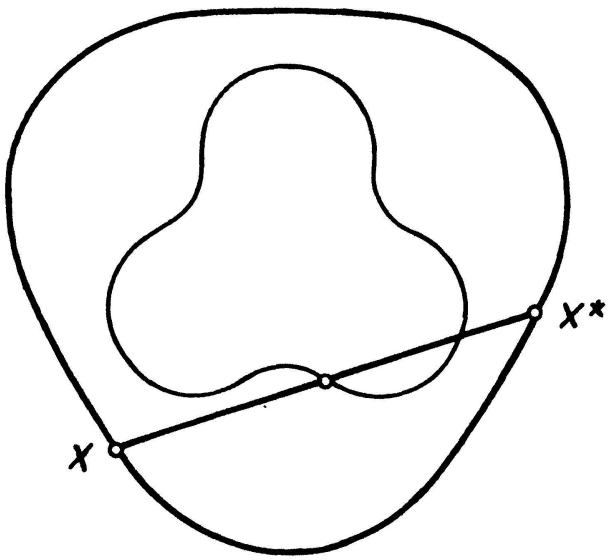
Die hier hergeleiteten Ergebnisse für die *Längen* und *Flächeninhalte ebener Kurven* können auch auf *Integralinvarianten geschlossener Regelflächen* des dreidimensionalen euklidischen Raumes verallgemeinert werden. Statt der *Kurvenlänge* betrachten wir bei den Regelflächen die *Öffnungsstrecke* und statt dem *ebenen Flächeninhalt* eine globale Regelflächeninvariante, die als *«Flächeninhalt»* einer

Regelfläche bezeichnet werden kann (s. [6]). Lassen wir die Regelflächen zu *Tangentenscharen ebener geschlossener Kurven* entarten, so erhalten wir aus den Holditch-Sätzen für diese globalen Regelflächeninvarianten direkt die Resultate dieser Untersuchung für ebene Kurven. Sätze vom Holditch-Typ für Regelflächen sind besonders interessant, weil wir aus ihnen auch Ergebnisse für *sphärische Kurven* herleiten können, wenn wir die *sphärischen Erzeugendenbilder der Regelflächen* betrachten (s. [7]).

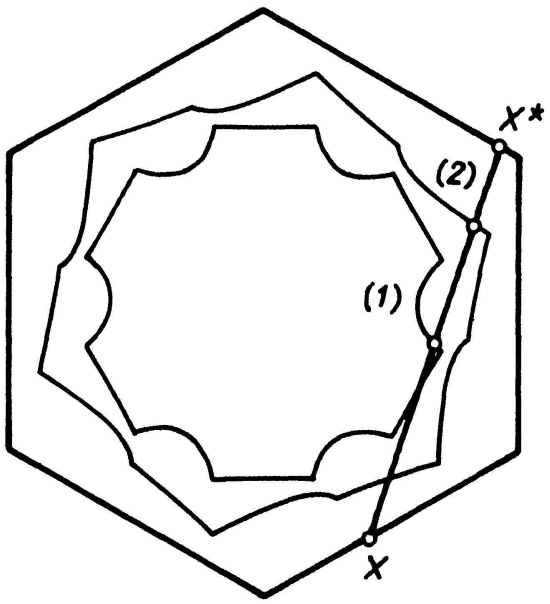
7. Beispiele

Abschliessend sollen einige *Beispiele* der in dieser Arbeit beschriebenen Bewegungen bzw. der dabei erzeugten Kurven graphisch dargestellt werden. Die Berechnung und Zeichnung der Kurven wurde von einem Computer (bzw. Plotter) ausgeführt. (Beispiele von *mechanisch* erzeugten Holditch-Kurven sind in [1] zu finden.) Zur besseren Übersichtlichkeit beschränken wir uns hier auf den Sonderfall, dass die Leitkurven k und k^* identisch sind.

a) Bewegung B_{F1}

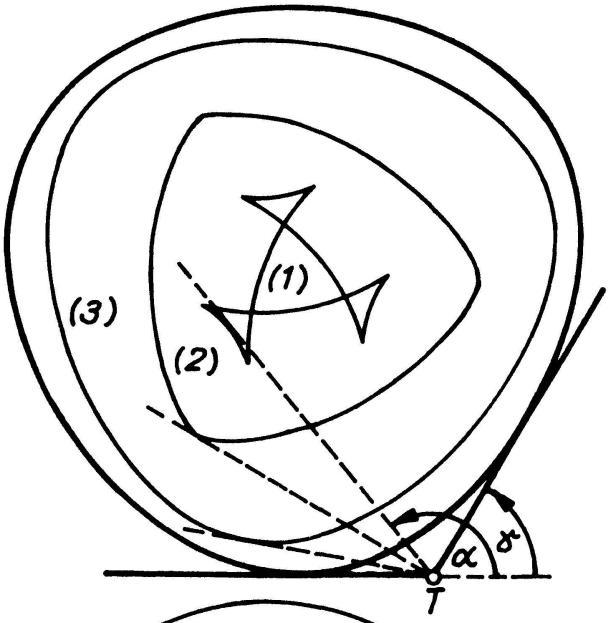


$c_2 = 0$
$\mu = 0{,}5$



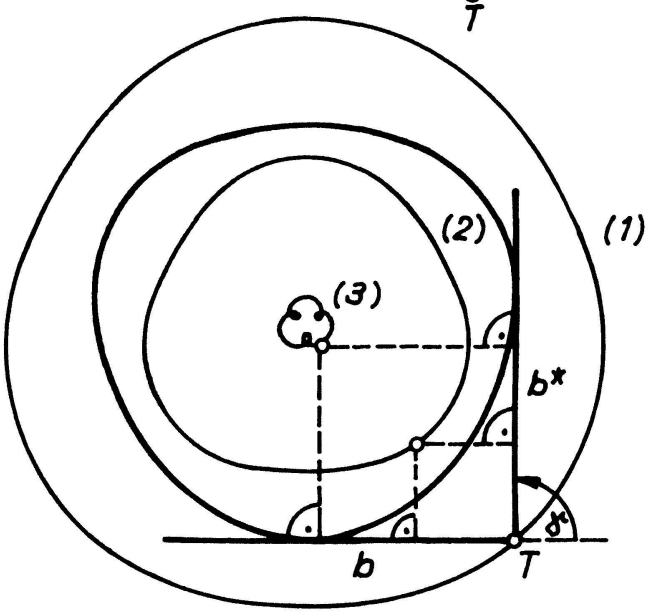
$c_2 = 0$
(1) $\mu = 0{,}5$
(2) $\mu = 0{,}2$

b) Bewegung B_{L1}



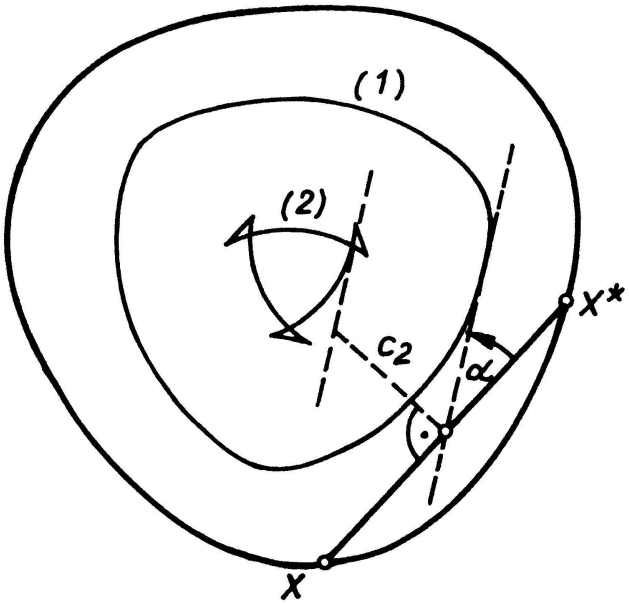
$\gamma = 60°$
(1) $a = 130°$
(2) $a = 150°$
(3) $a = 170°$

c) Bewegung B_{F2}



$\gamma = 90°$
(1) $b^* = -b = 0$
(2) $b^* = -b = c$
(3) $b^* = -b = 2c$
($c = \text{const}, c > 0$)

d) Bewegung B_{L2}



$\mu = 0{,}5$
$a = 30°$
(1) $c_2 = 0$
(2) $c_2 > 0$

Leonhard Hering, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Bender: The Holditch Curve Tracer. Math. Mag. *54*, Nr. 3, 128–129 (1981).
2 W. Blaschke und H. R. Müller: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
3 A. Broman: Holditch's theorem is somewhat deeper than Holditch thought in 1858. Normat, S. 89–100 (1979).
4 A. Broman: Holditch's Theorem. Math. Mag. *54*, Nr. 3, 99–108 (1981).
5 S. Hentschke: Erweiterungen des Satzes von Holditch. Sber. Akad. Wiss. Wien, Kl. II, S. 451–458 (1975).
6 L. Hering: Holditch-Sätze für Regelflächen und deren Übertragungen auf ebene und sphärische Kurven. Dissertation, Darmstadt 1981.
7 L. Hering: Holditch-Sätze für Regelflächen bzw. sphärische Kurven. Preprint Nr. 598, FB Math. der TH Darmstadt 1981, eingereicht bei: Arch. Math.
8 H. Holditch: Geometrical Theorem. Q. J. Pure Appl. Math. *2* (1858).
9 H. R. Müller: Zum Satz von Holditch. Aus: Tölke, Wills: Contribution to Geometry. Birkhäuser, Basel 1979.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/020039-11 $1.50 + 0.20/0

Die Potenzreihe $\sum n^m z^n$, $m \in \mathbf{N}$

Ein kurzer Weg zur Berechnung dieser Potenzreihe soll im folgenden dargelegt werden.
Gegeben sei der p-te Differenzenoperator D^p, welchen man folgendermassen definieren kann:

$$D^1 a_n = a_n - a_{n-1},$$
$$D^{p+1} a_n = D^1 (D^p a_n) \qquad (p \geqslant 1),$$

wobei die a_n, $n \in \mathbf{Z}$, irgendwelche komplexe Zahlen sind.
Mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion (nach p) zeigt man, dass sich D^p schreiben lässt als

$$D^p a_n = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} a_{n-j}. \tag{A}$$

Ebenfalls mit Hilfe der vollständigen Induktion nach p zeigt man folgendes:

$$\text{Aus } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \quad \text{und} \quad a_{-n} = 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{folgt} \tag{B}$$

$$(1-z)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (D^p a_n) z^n.$$