Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 1

Artikel: The sum of the s-th power of the integers
Autor: Pinchuk, Moshe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37180

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgabe 891. Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 (f(x))^2\,dx.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Aufgabe 892. Für natürliche Zahlen n sei

$$a_n := \int_0^n \exp(t^2/n)\,dt.$$

Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$.

U. Abel, Giessen, BRD

Aufgabe 893. Es sei p eine ungerade Primzahl, g eine Primitivwurzel $\bmod p$ und m eine prime Restklasse $\bmod p$. Man zeige, dass für $x \not\equiv 0 \pmod p$

$$\operatorname{ind}_g x \equiv \sum_{i=1}^{p-2} (1-g^i)^{p-2} x^i \pmod p.$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{ind}_g x$ die kleinste der natürlichen Zahlen k, für die $m \equiv g^k \pmod p$ erfüllt ist.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Elementarmathematik und Didaktik

The sum of the s-th power of the integers

The purpose of this brief note is to present a derivation of the familiar formula for the sum of the squares of the first n integers, i.e. $\sum_{k=1}^n k^2$. This method is easy to remember, having an almost geometric character, and it can be iterated in a very simple manner to yield the sum of the first n integers raised to any positive integral power.

Consider the following $n \times n$ array:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & & n \\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & & n \\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & & & n \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & & n
\end{array}$$

The line is drawn just below the main diagonal.
Denote the sum of all the numbers in the array by S, the sum of the integers above the line by U and the sum of those below the line by B.
S and B can be evaluated by summing the rows and in both cases we have to add sums of arithmetic progressions. Indeed,

$$S = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad \text{and} \quad B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}.$$

U is calculated by adding the columns and we find $U = \sum_{k=1}^{n} k^2$.
Since $U = S - B$ we obtain

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{4}$$

or

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\frac{(2n+1)}{2}$$

or

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

To obtain the sum of the cubes of the first n integers, replace every entry in the array by its *square* and proceed as before. In this case

$$U = \sum_{k=1}^{n} k^3, \qquad S = n\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{and} \quad B = \sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right).$$

In general, replace every entry in the array by its $(s-1)$-th power and obtain

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = n\sum_{k=1}^{n} k^{s-1} - \sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{m} k^{s-1}\right).$$

Moshe Pinchuk, Jerusalem, Israel

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/010024-02$1.50 + 0.20/0