

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 873.** Prove that if  $0 \leq x_i \leq 1$  and  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s, n \in \mathbf{N}$ , then

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+s-x_i} + \prod_{i=1}^n (1-x_i) \leq 1.$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

Lösung: Beweis durch Induktion: Für  $n=1$  ist nichts zu zeigen. Gilt die Ungleichung für ein  $n \geq 1$  und führt man die Funktion

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad x_{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{1+s-x_i} + \prod_{i=1}^{n+1} (1-x_i)$$

ein, so ist wegen

$$f''(x_{n+1}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(1+s-x_i)^3} \geq 0$$

die Funktion  $f$  konvex, und mit  $f(0) \leq 1$  nach Induktionsannahme sowie  $f(1) = \sum x_i / (1+s-x_i) \leq \sum x_i / s = 1$  ergibt sich die Behauptung.

K. Bickel, Freiburg, BRD

Bemerkung: M. S. Klamkin (Edmonton, Alberta, CDN) weist darauf hin, dass der Fall  $n=3$  als Aufgabe anlässlich der USA Mathematikolympiade 1980 gestellt wurde.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Edmonton, CDN), Chr. A. Meyer (Ittigen), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

**Aufgabe 874.** Gegeben sind drei konzentrische Kreise mit Radien  $r_1, r_2, r_3$ , deren Ebenen paarweise zueinander senkrecht sind. Existiert ein Dreieck, dessen Seiten sich wie  $r_1^{-2} : r_2^{-2} : r_3^{-2}$  verhalten, so gibt es 8 (im Grenzfall vier) Ebenen, welche die drei Kreise berühren, andernfalls keine. Man zeige dies und beschreibe die Konstruktion der fraglichen Ebenen im möglichen Fall.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Wir können die drei Kreisebenen als kartesische Koordinatenebenen  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  auffassen (der Kreis  $k_1$  vom Radius  $r_1$  liege in  $\pi_1$  usw.) und ihre drei Schnittgeraden  $x_1, x_2, x_3$  als Koordinatenachsen; dabei sei  $x_i = \pi_j \cap \pi_k$ , mit  $(i, j, k) = \text{zykl. } (1, 2, 3)$ .

Jene die drei Kreise berührende Ebene  $\varepsilon$  habe die Spuren  $e_1, e_2, e_3$ ; dabei liege die Spurgerade  $e_i$  in  $\pi_i$  und berühre den Kreis  $k_i, i=1, 2, 3$ . Der Radius  $r_i$  ist also gleichzeitig der (minimale) Abstand der Spur  $e_i$  vom Ursprung, dem gemeinsamen Zentrum der drei Kreise.

Weil die Achsenabschnitte von  $e_i$  mindestens  $r_j$  bzw.  $r_k$  betragen (im Grenzfall stünde die fragliche Ebene  $\varepsilon$  normal auf  $\pi_i$ , wäre also projizierend), muss  $r_i$  mindestens so gross sein wie die Höhe im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $r_j$  und  $r_k$ . Wir erhalten damit die Abschätzung

$$r_i \geq r_j r_k / \sqrt{r_j^2 + r_k^2}.$$

Quadrieren und Bilden des Kehrwertes auf beiden Seiten liefert die Ungleichungen

$$r_i^{-2} \leq r_j^{-2} + r_k^{-2}; \quad (i, j, k) = \text{zykl. } (1, 2, 3).$$

Diese Beziehung ist aber genau dann erfüllt, wenn  $r_1^{-2}, r_2^{-2}, r_3^{-2}$  Seiten eines (eventuell ausgearteten) Dreiecks sind.

Bezeichnen wir die Achsenabschnitte von  $\varepsilon$  mit  $a_1, a_2$  bzw.  $a_3$ , so gewinnen wir – analog wie oben – das folgende Gleichungssystem:

$$a_i^{-2} + a_j^{-2} = r_k^{-2}; \quad (i, j, k) = \text{zykl. } (1, 2, 3).$$

Daraus erhält man etwa für den  $x_1$ -Achsenabschnitt  $a_1$  den Term

$$\pm \sqrt{2} / \sqrt{-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}}, \quad (*)$$

so dass  $|a_1|$  in geläufiger Weise konstruiert werden kann. Die Strecke  $|a_1|$  trägt man nun vom Ursprung aus auf der  $x_1$ -Achse nach beiden Seiten ab und legt von den erhaltenen Achsenabschnittendpunkten je zwei Tangenten an die beiden Kreise  $k_2$  und  $k_3$ . Man gewinnt so von beiden Seiten her je vier Ebenen, welche ein bezüglich des Ursprungs zentralsymmetrisches Oktaeder begrenzen.

Verschwindet der Nennerradikand von (\*), so wird  $|a_1|$  unendlich gross, und man erhält nur noch vier verschiedene Ebenen mit den Achsenabschnitten  $(a_1, a_2, a_3) = (\pm \infty, \pm r_2, \pm r_3)$ , welche ein gerades Prisma mit rhombischem Querschnitt bilden. Ist der Nennerradikand in (\*) negativ, so gibt es überhaupt keine die drei Kreise berührende Ebenen mehr; aber dann sind  $r_1^{-2}, r_2^{-2}$  und  $r_3^{-2}$  auch keine Dreiecksseiten mehr!

Hj. Stocker, Wädenswil ZH

Weitere Lösungen sandten J. T. Groenmann (Arnhem, NL), L. Kuipers (Sierre VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio), J. Schaer (Calgary, CDN), E. Ungethüm (Wien, A).

**Aufgabe 875.**  $p_1(n) < p_2(n) < \dots < p_k(n)$  seien die Primfaktoren von  $n$  und es werde

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(n) / p_{i+1}(n)$$

gesetzt (für  $k=1$  sei  $f(n)=0$ ). Man zeige die Existenz einer Konstante  $C$ , so dass

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = (C + o(1)) x.$$

K. Alladi und P. Erdős

Lösung: Im folgenden bedeuten  $p$ ,  $q$  und  $r$  Primzahlen. Für  $q < p \leq x$  bezeichnen wir mit  $N(p, q; x)$  die Anzahl der Zahlen  $n \leq x$  mit  $n \equiv 0 \pmod{pq}$ ,  $n \not\equiv 0 \pmod{r}$  für alle Primzahlen  $r$  mit  $q < r < p$ . Dann gilt

$$F(x) = \sum_{q < p \leq x} \frac{q}{p} N(p, q; x). \quad (1)$$

Für  $q < p$  gilt nach dem Chinesischen Restsatz

$$N(p, q; x) \sim x (pq)^{-1} \prod_{q < r < p} (1 - r^{-1}). \quad (2)$$

Aus  $N(p, q; x) \leq x/(pq)$  folgt, dass der Beitrag der Glieder  $q/p$  mit  $p > y$  zu  $F(x)$  kleiner ist als  $x \cdot \sum_{p > y} \pi(p)/p^2$ . Für  $\varepsilon > 0$  und  $y$  genügend gross, ist dieser Beitrag also  $< \varepsilon x$ , weil die Reihe  $\sum \pi(p)/p^2$  konvergiert. (\*)

Wir definieren jetzt

$$g(p) := \sum_{q < p} \prod_{q < r < p} (1 - r^{-1}). \quad (3)$$

Es gilt  $g(p) < \pi(p)$ . Weil  $\sum \pi(p)p^{-2}$  konvergiert, folgt jetzt aus (\*), (1) und (2)

$$F(x) \sim Cx \quad (x \rightarrow \infty)$$

mit

$$C := \sum_p g(p)/p^2.$$

J. H. van Lint, Eindhoven, NL

Eine weitere Lösung sandte E. Trost†.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. August 1983* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175).

**Aufgabe 891.** Es sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  stetig und

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (f(x))^2 dx.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

**Aufgabe 892.** Für natürliche Zahlen  $n$  sei

$$a_n := \int_0^n \exp(t^2/n) dt.$$

Man ermittle  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n)$ .

U. Abel, Giessen, BRD

**Aufgabe 893.** Es sei  $p$  eine ungerade Primzahl,  $g$  eine Primitivwurzel mod  $p$  und  $m$  eine prime Restklasse mod  $p$ . Man zeige, dass für  $x \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\text{ind}_g x \equiv \sum_{i=1}^{p-2} (1 - g^i)^{p-2} x^i \pmod{p}.$$

Dabei bezeichnet  $\text{ind}_g x$  die kleinste der natürlichen Zahlen  $k$ , für die  $m \equiv g^k \pmod{p}$  erfüllt ist.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

## Elementarmathematik und Didaktik

### The sum of the $s$ -th power of the integers

The purpose of this brief note is to present a derivation of the familiar formula for the sum of the squares of the first  $n$  integers, i.e.  $\sum_{k=1}^n k^2$ . This method is easy to remember, having an almost geometric character, and it can be iterated in a very simple manner to yield the sum of the first  $n$  integers raised to any positive integral power.