

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Quelques considérations concernant le problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien  $E_n$   
**Autor:** Stoka, Marius I.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37175>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

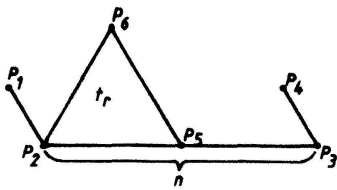


Figure 7a

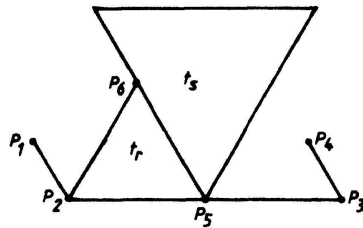


Figure 7b

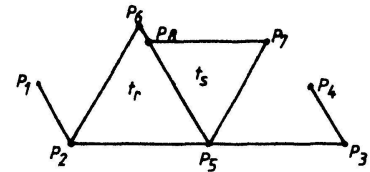


Figure 7c

After a suitable translation, rotation and reflection if necessary we can assume that the given  $S_n$  has the position shown in figure 1. With the notations of figure 1, let  $t_r$  be the triangle of the tessellation which ‘stands on the base of  $S_n$  at the left corner’, which means that  $t_r$  is defined by the three conditions  $P_2 \in t_r$ ,  $R_n \cap t_r \neq \emptyset$ ,  $\overline{P_2P_3}$  contains a side of  $t_r$  (see fig. 7a). The vertices of  $t_r$  may be  $P_2$ ,  $P_5$  and  $P_6$ , where  $P_5 \in \overline{P_2P_3}$ . Since  $S_n$  has property a) or b),  $P_3$  is different from  $P_5$ .

Let  $t_s$  denote the neighbor of  $t_r$  at the side  $\overline{P_5P_6}$  such that  $P_5 \in t_s$ . We now have to distinguish whether  $l_s$  is greater or less than  $l_r$ .

*Case 1.* If  $l_s > l_r$ , the points  $P_2$  and  $P_6$  define a set  $S_{l_r} \subset D$  with  $R_{l_r} \cap t_r = \emptyset$  (see fig. 7b). Moreover,  $l_r \leq n - 1$  because  $S_n \subset D$  and  $l_1 = 1$ . So we can define  $m = l_r$ .

*Case 2.* If  $l_s < l_r$ , let  $P_7$  denote the vertex of  $t_s$  that is not a point of  $t_r$ , and let  $P_8$  denote its third vertex (fig. 7c). An examination of all possible line systems starting at  $P_7$  (they are listed in fig. 4) shows that in each case there is a set  $S_{l_s} \subset D$  with  $R_{l_s} \cap t_s = \emptyset$ , either defined by the points  $P_5$  and  $P_7$  or by  $P_7$  and  $P_8$ . Moreover,  $l_s < l_r \leq n - 1$ . So we can define  $m = l_s$ .

Hence the induction step is completed, q.e.d.

Karl Scherer, Universität Kaiserslautern

REFERENCES

- 1 W. Tutte: Squaring the Square. Can. J. Math. 1950, 197-209.
- 2 Ross Honsberger: Ingenuity in Mathematics. Mathematical Association of America 23, Yale University, 1970.

## Quelques considérations concernant le problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien $E_n$

0. Soit  $E_n$  l'espace euclidien à  $n$  dimensions de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ .

La mesure élémentaire cinématique dans  $E_n$ , invariante par rapport au groupe de mouvements euclidiens, est [1]:

$$dK = dP \wedge dO_{n-1} \wedge \dots \wedge dO_1, \tag{1}$$

où  $dP = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  et  $dO_h$  est l'élément d'aire sur la sphère  $h$ -dimensionnelle unité dans l'espace  $E_n$ .

Notons  $\mathfrak{R}_n$  le réseau déterminé par des parallélépipèdes de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueurs respectives  $a_1, \dots, a_n$ .

En utilisant la mesure cinématique (1), nous avons démontré le théorème suivant [3], p. 388:

La probabilité pour qu'un segment aléatoire  $\omega$  de longueur  $l < \inf(a_1, \dots, a_n)$ , uniformément distribué par rapport à la mesure (1), coupe le réseau est

$$p = 1 - \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \cdot \frac{P_n(l; a_1, \dots, a_n)}{a_1 \dots a_n}, \tag{2}$$

où

$$P_n(l; a_1, \dots, a_n) = \int_0^{\pi/2} \dots \int_0^{\pi/2} (a_1 - l \cos \varphi_1) (a_2 - l \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \dots (a_n - l \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}) \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \tag{3}$$

Dans la première partie de ce travail, nous démontrons que les événements d'un système d'événements associé à la configuration  $(\omega, \mathfrak{R}_n)$  sont dépendants et, dans la deuxième partie, nous nous occupons de l'estimation de la probabilité (2).

1. Notons  $\mathfrak{R}$  le réseau déduit de  $\mathfrak{R}_n$  pour  $a_1 = \dots = a_n = 2l$  c'est-à-dire le réseau déterminé par des hyperplans parallèles aux hyperplans de coordonnées et de distances respectives égales à  $2l$ .

Soit  $A_i$  l'événement: le segment  $\omega$  coupe un hyperplan du réseau  $\mathfrak{R}$  parallèle à l'hyperplan d'équation  $x_i = 0$ .

Nous voulons démontrer que les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont dépendants.

Notons par  $\lim^*$  la limite obtenue lorsque toutes les quantités  $a_1, \dots, a_n$ , à l'exception de celles qui sont indiquées ci-dessous, tendent vers l'infini.

Avec cette notation on a

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A_i) = \lim_{a_i=2l}^* p, \\ P(A_i \cup A_j) = \lim_{\substack{a_i=2l \\ a_j=2l}}^* p, \\ P(A_i \cup A_j \cup A_k) = \lim_{\substack{a_i=2l \\ a_j=2l \\ a_k=2l}}^* p, \\ \dots \\ P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = p(a_1 = \dots = a_n = 2l). \end{array} \right. \tag{4}$$

Mais, dans le travail cité [3], p. 387, nous avons démontré que

$$P_n(l; a_1, \dots, a_n) = a_0^{(n)} l^n + \{a_1, \dots, a_n\}_1 a_1^{(n)} l^{n-1} + \dots + \{a_1, \dots, a_n\}_{n-1} a_{n-1}^{(n)} l + \{a_1, \dots, a_n\}_n a_n^{(n)}, \tag{5}$$

où  $a_0^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$  sont des constantes et  $\{a_1, \dots, a_n\}_h$  est la fonction symétrique élémentaire d'ordre  $h$  de  $a_1, \dots, a_n$ .

Alors les formules (4) nous donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A_i) = - \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \cdot a_{n-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{2}, \\ P(A_i \cup A_j) = - \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \left[ 2a_{n-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{2} + a_{n-2}^{(n)} \cdot \frac{1}{2^2} \right], \\ P(A_i \cup A_j \cup A_k) = - \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \left[ 3a_{n-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{2} + 3a_{n-2}^{(n)} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot a_{n-3}^{(n)} \frac{1}{2^3} \right], \\ P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = - \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \left[ \binom{n}{1} a_{n-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{2} + \binom{n}{2} a_{n-2}^{(n)} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \right. \\ \left. + \binom{n}{n} a_0^{(n)} \frac{1}{2^n} \right]. \end{array} \right. \quad (6)$$

On a la formule

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cup A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cup A_j \cup A_k) - \dots \\ + (-1)^{n-1} P(A_1 \cup \dots \cup A_n).$$

En tenant compte des relations (6) et de

$$\binom{k}{k} \binom{n}{k} - \binom{k+1}{k} \binom{n}{k+1} + \binom{k+2}{k} \binom{n}{k+2} - \dots \\ + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n}{n} = 0,$$

nous obtenons

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2 \pi^{n/2}} a_0^{(n)}. \quad (7)$$

Mais la formule (5) nous donne

$$a_0^{(n)} = \frac{P_n(l; 0, \dots, 0)}{l^n},$$

donc, compte tenu de (3),

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(n)} &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-3} \varphi_1 \cos \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-5} \varphi_2 \cos \varphi_2 d\varphi_2 \\ &\dots \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1} (n-1)!} \end{aligned}$$

et (7) devient

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^n \pi^{n/2} (n-1)!}. \tag{8}$$

Dans le travail cité, nous avons démontré la relation [3], p. 388:

$$\lim_{a_1=2l}^* p = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}},$$

donc, compte tenu de la première relation (4),

$$P(A_j) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi^{n/2}}, \quad (j=1, \dots, n). \tag{9}$$

Alors

$$P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^n}{(n-1)^n \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^n \pi^{n/2}}. \tag{10}$$

Considérons maintenant le rapport

$$\rho(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^n \pi^{n/2} (n-1)!} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^n}{(n-1)^n \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^n \pi^{n/2}}.$$

On a

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}, \quad (\forall k \in \mathbf{N}^*),$$

donc

$$\rho(2k+1) = \frac{(2k)^{2k} [(k-1)!]^{2k}}{2^{2k+1} (2k-1)! \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} \right]^{2k} \pi^k} \neq 1,$$

$$\rho(2k+2) = \frac{(2k+1)^{2k+1} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} \right]^{2k+2} \pi^{k+1}}{2^{2k+2} (2k)! (k!)^{2k+1}} \neq 1.$$

D'autre part

$$\rho(2) = \frac{\pi}{4} \neq 1.$$

Alors

$$\rho(n) \neq 1, \quad \forall n = 2, 3, \dots$$

Les relations (8) et (10) nous donnent

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq P(A_1) \cdots P(A_n)$$

et par conséquent les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont dépendants.

Pour  $n=2$ , le résultat a été démontré par E. F. Schuster [2].

2. Dans ce point, nous nous occuperons de l'estimation de la probabilité  $P(A_j)$  (9).

Soit  $X^{(j)}$  l'indicateur de l'événement  $A_j$ , c'est-à-dire la variable aléatoire qui prend les valeurs

$$x^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_j, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A_j, \end{cases} \quad (11)$$

où  $\omega$  est un segment de longueur  $l$ .

On peut, donc, considérer la variable aléatoire  $n$ -dimensionnelle  $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$  et soit  $(X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(n)})$ ,  $(i=1, \dots, N)$  un échantillon de variable aléatoire parente  $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ . Notons  $(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)})$ ,  $(i=1, \dots, N)$ , une réalisation de l'échantillon, c'est-à-dire les résultats de  $N$  expériences indépendantes effectuées sur la variable aléatoire  $(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ .

On a, alors, le suivant estimateur pour la probabilité (9):

$$\hat{P}_n = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N (X_i^{(1)} + \cdots + X_i^{(n)}) = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n X_i^{(j)}.$$

Calculons la variance de cet estimateur. Nous avons

$$\begin{aligned} D^2(\hat{P}_n) &= \frac{1}{(nN)^2} \sum_{i=1}^N D^2 \left( \sum_{j=1}^n X_i^{(j)} \right) = \frac{1}{(nN)^2} N \cdot D^2 \left( \sum_{j=1}^n X^{(j)} \right) \\ &= \frac{1}{n^2 N} [n D^2(X^{(1)}) + n(n-1) \text{cov}(X^{(1)}, X^{(2)})] \\ &= \frac{1}{nN} [D^2(X^{(1)}) + (n-1) \text{cov}(X^{(1)}, X^{(2)})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Compte tenu de (11), on a

$$E(X^{(1)}) = P(A_1), \quad E([X^{(1)}]^2) = P(A_1),$$

donc

$$D^2(X^{(1)}) = P(A_1)[1 - P(A_1)]. \tag{13}$$

Pareillement

$$\begin{aligned} \text{cov}(X^{(1)}, X^{(2)}) &= E(X^{(1)}, X^{(2)}) - E(X^{(1)})E(X^{(2)}) = P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 2P(A_1) - [P(A_1)]^2 - P(A_1 \cup A_2). \end{aligned}$$

Alors (12) devient

$$D^2(\hat{P}_n) = \frac{1}{nN} [(2n-1)P(A_1) - n[P(A_1)]^2 - (n-1)P(A_1 \cup A_2)]. \tag{12'}$$

De (4) on a

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= 1 - \frac{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int_0^{\pi/2} \dots \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi_1\right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2\right) \sin^{n-2} \varphi_1 \\ &\quad \times \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \\ &= 1 - \frac{2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{3/2} (n-2)!} \left[ \left(\pi + \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) - \frac{2}{n-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

En remplaçant (9) et (14) en (12') on obtient

$$D^2(\hat{P}_n) = \frac{1}{nN} \theta_n, \tag{15}$$

avec

$$\begin{aligned} \theta_n &= (2n-1) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} - n \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{(n-1)^2 \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2 \pi} - n+1 \\ &\quad + \frac{2^{n-2} (n-1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{3/2} (n-2)!} \left[ \left(\pi + \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{\pi}}{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Considérons, maintenant, l'échantillon  $X_1^{(1)}, \dots, X_M^{(1)}$ , de variable aléatoire parente  $X^{(1)}$  et soit  $x_1, \dots, x_M$  une réalisation de l'échantillon, c'est-à-dire les résultats de  $M$  expériences indépendantes effectuées sur la variable aléatoire  $X^{(1)}$ .

On a, alors, le suivant estimateur pour la probabilité (9):

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i^{(1)}.$$

La relation (13) nous donne

$$\begin{aligned} D^2(\hat{P}_1) &= \frac{1}{M^2} \cdot M \cdot D^2(X^{(1)}) \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

En écrivant l'égalité des variances (15) et (16) nous obtenons

$$M = \sigma(n) n N,$$

avec

$$\sigma(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left[ (n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi} - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]}{(n-1)^2 \left[ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^2 \pi \theta_n}.$$

Donc,  $N$  expériences indépendantes effectuées sur un réseau formé par hypercubes de côtés  $2l$  nous fournissent la même information que  $\sigma(n) n N$  expériences indépendantes effectuées sur un réseau formé par des hyperplans parallèles aux hyperplans de coordonnées et de distances respectives égales à  $2l$ .

Pour  $n=2$ , Schuster a trouvé

$$\sigma(2) = \frac{4(\pi-1)}{5\pi-8} \cong 1,1136.$$

Pour  $n=3$  et  $n=4$  on a respectivement

$$\sigma(3) = \frac{9\pi}{3\pi+16} \cong 1,1120, \quad \sigma(4) = \frac{16(3\pi-2)}{75\pi-128} \cong 1,1038.$$

Nous faisons la suivante conjecture:

$$\sigma(n) > \sigma(n+1), \quad \forall n=2,3,\dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = 1.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 S.S. Chern et Ch.T. Yien: Sulla formula principale cinematica dello spazio ad  $n$  dimensioni. Boll. U.M.I. (II) 2, 434–437 (1940).
- 2 E.F. Schuster: Buffon's needle experiment. Am. Math. Monthly 81, 26–29 (1974).
- 3 M.I. Stoka: Une extension du problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien  $R_n$ . Boll. U.M.I. (IV) 10, 386–389 (1974).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/010004-08\$1.50 + 0.20/0

## Zur mittleren Anzahl von Schritten beim euklidischen Algorithmus

### 1. Einleitung

Für jedes Paar  $a, b$  natürlicher Zahlen liefert der übliche euklidische Algorithmus durch sukzessive Division eine Folge von Gleichungen

$$\begin{aligned}
 a &= q_1 b + r_1 \\
 b &= q_2 r_1 + r_2 \\
 r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + r_{k+1} \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

mit  $a \geq r_1 > r_2 > \dots > r_n = 0$ . Der grösste gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  ist dann  $r_{n-1}$  (bzw.  $b$  für  $n=1$ ). Wir bezeichnen die Anzahl  $n$  der Gleichungen bzw. Divisionsschritte bei der obigen Form des Algorithmus mit  $T(a, b)$ .  $T(a, b)$  ist bekanntlich gleichfalls die Länge des Kettenbruches  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$  für den Bruch  $a/b$ , so dass die mittlere Schrittzahl des euklidischen Algorithmus für *alle*  $a, b$  mit  $1 \leq a, b \leq N$ , also

$$T_N = \frac{1}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N T(a, b) \quad (2)$$

auch die mittlere Länge dieser Kettenbruchdarstellungen der (gemeinen) Brüche  $a/b$  mit  $1 \leq a, b \leq N$  darstellt.

Beide Mittelwerte sind offensichtlich zahlentheoretisch interessante Grössen, die mittlere Schrittzahl des euklidischen Algorithmus sogar aus praktischen Gründen: Ich selbst bin auf die Frage nach  $T_N$  gestossen bei der Vorbereitung von Schulversuchen zur Wiedereinführung von gewissen Formen des euklidischen Algorithmus, als Hilfe beim Kürzen, in den Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schulen. Das Interesse an dieser Fragestellung wird gleichfalls durch die Literatur der letzten Jahre [2–6] belegt. Der Beweis unseres Satzes beruht ganz wesentlich auf einem Satz von Dixon von 1970.