

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

welches jedoch bloss eine Wackeligkeit 2. Ordnung aufweist, wie die aufwendige Untersuchung der höheren Ableitungen der Gleichungen (5.3) lehrt. - Die in Abschnitt 6 behandelten Wackeldodekaeder II. Art besitzen übrigens nur die normale Wackeligkeit 1. Ordnung.

W. Wunderlich, Wien

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. *Math. Mag.* 51, 165–170 (1978).
- 2 H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante. *Sber. Bayer. Akad. Wiss.* 1920, 197–227.
- 3 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche. *El. Math.* 20, 25–32 (1965).
- 4 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum. *El. Math.* 26, 73–83 (1971).
- 5 W. Wunderlich: Wackelikosaeder. *Geometriae Dedicata*, im Druck.
- 6 W. Wunderlich: Neue Wackelikosaeder. *Anz. Öst. Akad. Wiss.* 117, 28–33 (1980).
- 7 W. Wunderlich: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. *Z. angew. Math. Mech.*, im Druck.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/060153-11\$1.50 + 0.20/0

## Kleine Mitteilungen

### On a problem of Erdős and Graham

P. Erdős and R. L. Graham [1], p. 85, ask: “Is it possible to prove theorems of the following type: If  $a_1 < a_2 < \dots$  tends to infinity rapidly enough and does not cover all residue classes  $(\text{mod } p)$  for any prime  $p$  then for some  $n, n+a_i$  is prime for all  $i$ ?” The answer is in the negative. We show below that there exist sequences  $(a_i)$  growing arbitrarily fast and such that for every positive integer  $n$  the sequence  $(n+a_i)$  contains only a finite number of prime numbers.

Let  $(b_n)$  be any sequence of positive integers. Put

$$a_i = 1 + (i+1)!^{b_i}.$$

Since for any prime  $p$  the number  $(i+1)! (i \geq p-1)$  is divisible by  $p$ , the numbers  $a_i (i \in \mathbb{N})$  give at most  $p-1$  remainders when divided by  $p$ . On the other hand, for every  $n$  we have

$$n+1 | n+a_i = n+1 + (i+1)!^{b_i} \quad (i \geq n), \quad 1 < n+1 < n+a_i.$$

Therefore the numbers  $n+a_i (i \geq n)$  are composite and prime numbers may occur in the sequence  $(n+a_i)$  only for some  $i < n$ .

Andrzej Mąkowski, Institute of Mathematics, University of Warsaw

## REFERENCE

- 1 P. Erdős and R.L. Graham: Old and new problems and results in combinatorial number theory. Monographie No 28 de l’Enseignement mathématique, Genève 1980.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/060163-01\$1.50 + 0.20/0

## Extreme Punkte in der Einheitskugel des Vektorraumes der trigonometrischen Polynome

Zu den besonderen Punkten einer konvexen Menge gehören die extremen Punkte, die durch die Eigenschaft festgelegt sind, nicht im Innern der Verbindungsstrecke von zwei anderen Punkten der Menge zu liegen, vgl. [1, 2]. In [2], S. 269, wird angeregt, einen Katalog solcher Mengen aufzustellen, deren extreme Punkte bestimmt worden sind. Durch den folgenden Satz soll ein weiteres Beispiel bereitgestellt werden.

Es werde die Einheitskugel  $K = \{t \in T_n \mid \max |t(x)| \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$  des  $(2n+1)$ -dimensionalen reellen Vektorraumes  $T_n = \text{span} \{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$  der trigonometrischen Polynome vom Höchstgrad  $n$  zugrunde gelegt. Unser Ziel ist die Charakterisierung der Menge

$$X = \{t \in K \mid (t = au + (1-a)v \text{ mit } u, v \in K \text{ und } 0 < a < 1) \Rightarrow (t = u = v)\}$$

der extremen Punkte von  $K$ .

Sei  $I$  ein festes halboffenes Periodenintervall der Länge  $2\pi$  und  $N(t)$  sei die Vielfachheit (kurz: VF), mit der die Werte  $\pm 1$  von  $t$  in  $I$  angenommen werden, d. h.  $N(t)$  ist die Anzahl der Nullstellen (kurz: NS) in  $I$  mit VF gezählt, von  $t+1$  und  $t-1$  zusammen.

**Satz.** Sei  $t \in K$ . Dann gilt:  $N(t) > 2n \Leftrightarrow t$  ist ein extremer Punkt von  $K$ .

**Beweis:** Sei  $N(t) > 2n$  und  $t = au + (1-a)v$  mit  $u, v \in K$  und  $a \in (0, 1)$ . Wenn dann  $u \pm 1$  die gleichen NS in  $I$  besitzt wie  $t \pm 1$ , dann hat  $t - u = (t-1) - (u-1) = (t+1) - (u+1)$  mehr als  $2n$  NS in  $I$ , d. h.  $t = u$ . Analog erhält man  $t = v$ , und daraus folgt  $t \in X$ . Sei nun  $z \in I$  eine NS von  $t-1$ . Aus  $0 = t(z) - 1 = au(z) + (1-a)v(z) - 1$  folgt wegen  $u, v \in K$  zwingend  $u(z) = v(z) = 1$ , d. h.  $z$  ist auch eine NS von  $u-1$  und von  $v-1$ . Wegen  $t \in K$  und der Periodizität folgt weiterhin, dass  $z$  ein Maximum von  $t-1$  sein muss, d. h. es gilt mit einem  $r \in M = \{2, 4, 6, \dots\}$ :  $t^{(1)}(z) = \dots = t^{(r-1)}(z) = 0$ , aber  $t^{(r)}(z) < 0$ . Diese Beziehungen bestehen dann auch für  $u$  und  $v$  anstelle von  $t$ , eventuell mit einem von  $r$  verschiedenen  $r' \in M$  bzw.  $r'' \in M$ . Im Falle  $r \leq r'$  und  $r \leq r''$  ist dann also eine NS von  $t-1$  auch eine NS von  $u-1$  und von  $v-1$  mit mindestens derselben VF, was zu zeigen war. Eine andere Wahl von  $r'$  oder  $r''$  kommt aber gar nicht in Frage, weil sich dann mit  $q = \min \{r', r''\} < r$  der Widerspruch  $0 = t^{(q)}(z) = au^{(q)}(z) + (1-a)v^{(q)}(z) < 0$  ergäbe. Der Fall einer NS von  $t+1$  wird analog behandelt.

Es werde umgekehrt  $N(t) \leq 2n$  angenommen. Dann ist zu zeigen, dass eine Darstellung  $t = au + (1-a)v$  mit  $u, v \in K$  und mit einem  $a \in (0, 1)$  existiert, aber nicht gilt:  $t = u = v$ . Seien  $z_1, \dots, z_s$  die NS in  $I$  von  $1-t \geq 0$  und sei  $n_i \geq 2$  die entsprechende gerade VF. Seien  $y_1, \dots, y_w$  die NS in  $I$  von  $1+t \geq 0$  und sei  $m_j \geq 2$  die entsprechende gerade VF. Definiere  $t^+ \geq 0$  durch

$$\prod_i^n (\sin((x-z_i)/2))^{n_i} = t^+(x)$$

und  $t^- \geq 0$  durch

$$\prod_1^w (\sin((x-y_j)/2))^{m_j} = t^-(x),$$

so dass die einzigen NS von  $t^+$  und  $t^-$  in  $I$  mit den NS von  $1-t$  bzw.  $1+t$  zusammenfallen. Definiere weiterhin  $t = t^+ \cdot t^- \geq 0$ . Wegen  $(\sin((x-c)/2))^2 \in T_1$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und der Addition der Polynomgrade bei der Multiplikation trigonometrischer Polynome folgt, unter Beachtung der Voraussetzung  $N(t) \leq 2n$ , dass  $t$  aus  $T_n$  ist. Ferner gibt es ein  $d^+ > 0$  aus  $T_n$  und ein  $d^- > 0$  aus  $T_n$  mit der Eigenschaft  $1-t = t^+ \cdot d^+$  und  $1+t = t^- \cdot d^-$ . Dies folgt aus einer bekannten Produktdarstellung nichtnegativer Elemente aus  $T_n$ , vgl. [3], VI. Abschnitt, Aufgabe 40 (Lösung). Setze nun

$$a' = \min \{d^+(x)/t^-(x)\} > 0, \quad a'' = \min \{d^-(x)/t^+(x)\} > 0, \quad x \in I,$$

wähle  $a \in (0, \min \{a', a''\})$  und bilde  $u = t + at$  und  $v = t - at$ . Offenbar ist dann  $u \neq t \neq v$ , aber  $t = 0 \cdot 5u + 0 \cdot 5v$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $u$  und  $v$  aus  $K$  sind: Für  $x = z_i$  bzw.  $x = y_j$  ist natürlich  $|u(x)| \leq 1$  und  $|v(x)| \leq 1$ . In den anderen Fällen folgt einerseits aus  $a < d^+(x)/t^-(x)$ , dass  $at(x) < d^+(x) \cdot t^+(x) = 1-t(x)$  gilt, also  $u(x) < 1$ , und andererseits folgt aus  $0 < a$ , dass  $-at^+(x) < d^-(x)$  gilt. Somit ist  $-at(x) < d^- \cdot t^-(x) = 1+t(x)$ , also  $-1 < u(x)$ . Der Fall  $|v(x)| \leq 1$  wird analog behandelt.

Wir stellen diesen Satz dem Satz von Konheim und Rivlin [4], der algebraische Polynome betrifft, ergänzend zur Seite.

H.-J. Rack, Universität Dortmund

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J.T. Marti: Konvexe Analysis. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1977.
- 2 A.W. Roberts und D.E. Varberg: Convex Functions. Academic Press, New York, London 1973.
- 3 G. Pólya und G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II, 3. Auflage. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964.
- 4 A.G. Konheim und T.J. Rivlin: Extreme points of the unit ball in a space of real polynomials. Am. Math. Monthly 73, 505–507 (1966).

## Aufgaben

**Aufgabe 869.** Es seien zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  gegeben, die nicht in derselben Ebene und nicht auf derselben Kugel liegen, sich nicht schneiden und nicht ineinander verschlungen sind. Dann gibt es genau vier Kreise, darunter eventuell eine Gerade, welche  $k_1$  und  $k_2$  berühren. Man beschreibe deren räumliche Konstruktion.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Lösung:** Es seien  $E_1, E_2$  die Ebenen der Kreise  $k_1, k_2$ , und  $l$  ihre Schnittgerade. Eine Umklappung von  $E_2$  um  $l$  in  $E_1$  führt  $k_2$  in  $k'_2$  über. Die Potenzgerade von  $k$  und  $k'_2$  schneidet  $l$  in einem Punkt  $P$ , von dem die Tangenten zu  $k_1$  und  $k'_2$ , und daher auch zu  $k_2$ , gleich lang sind. Seien  $s_1$  und  $t_1$  die Tangenten aus  $P$  zu  $k_1, s_2$