Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

welches jedoch bloss eine Wackeligkeit 2. Ordnung aufweist, wie die aufwendige Untersuchung der höheren Ableitungen der Gleichungen (5.3) lehrt. - Die in Abschnitt 6 behandelten Wackeldodekaeder II. Art besitzen übrigens nur die normale Wackeligkeit 1. Ordnung.

W. Wunderlich, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. Math. Mag. *51*, 165-170 (1978).
2 H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante. Sber. Bayer. Akad. Wiss. *1920*, 197-227.
3 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtflache. El. Math. *20*, 25-32 (1965).
4 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum. El. Math. *26*, 73-83 (1971).
5 W. Wunderlich: Wackelikosaeder. Geometriae Dedicata, im Druck.
6 W. Wunderlich: Neue Wackelikosaeder. Anz. Öst. Akad. Wiss. *117*, 28-33 (1980).
7 W. Wunderlich: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. Z. angew. Math. Mech., im Druck.

 0013-6018/82/060153-11$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

On a problem of Erdös and Graham

P. Erdös and R. L. Graham [1], p. 85, ask: "Is it possible to prove theorems of the following type: If $a_1 < a_2 < \dots$ tends to infinity rapidly enough and does not cover all residue classes (mod p) for any prime p then for some n, $n + a_i$ is prime for all i?" The answer is in the negative. We show below that there exist sequences (a_i) growing arbitrarily fast and such that for every positive integer n the sequence $(n + a_i)$ contains only a finite number of prime numbers.

Let (b_n) be any sequence of positive integers. Put

$$a_i = 1 + (i+1)!^{b_i}.$$

Since for any prime p the number $(i+1)!$ $(i \geqslant p-1)$ is divisible by p, the numbers $a_i (i \in \mathrm{N})$ give at most $p-1$ remainders when divided by p. On the other hand, for every n we have

$$n+1 \mid n+a_i = n+1+(i+1)!^{b_i} \ (i \geqslant n), \qquad 1 < n+1 < n+a_i.$$

Therefore the numbers $n + a_i (i \geqslant n)$ are composite and prime numbers may occur in the sequence $(n + a_i)$ only for some $i < n$.

Andrzej Mąkowski, Institute of Mathematics, University of Warsaw

REFERENCE

1 P. Erdös and R. L. Graham: Old and new problems and results in combinatorial number theory. Monographie No 28 de l'Enseignement mathématique, Genève 1980.

 0013-6018/82/060163-01$1.50+0.20/0

Extreme Punkte in der Einheitskugel des Vektorraumes der trigonometrischen Polynome

Zu den besonderen Punkten einer konvexen Menge gehören die extremen Punkte, die durch die Eigenschaft festgelegt sind, nicht im Innern der Verbindungsstrecke von zwei anderen Punkten der Menge zu liegen, vgl. [1, 2]. In [2], S. 269, wird angeregt, einen Katalog solcher Mengen aufzustellen, deren extreme Punkte bestimmt worden sind. Durch den folgenden Satz soll ein weiteres Beispiel bereitgestellt werden.

Es werde die Einheitskugel $K=\{t\in T_n \mid \max|t(x)|\leq 1, x\in \mathbf{R}\}$ des $(2n+1)$-dimensionalen reellen Vektorraumes $T_n=\operatorname{span}\{1,\cos x,\sin x,\ldots,\cos nx,\sin nx\}$ der trigonometrischen Polynome vom Höchstgrad n zugrunde gelegt. Unser Ziel ist die Charakterisierung der Menge

$$X=\{t\in K \mid (t=au+(1-a)v \quad \text{mit} \quad u,v\in K \quad \text{und} \quad 0<a<1)\Rightarrow(t=u=v)\}$$

der extremen Punkte von K.

Sei I ein festes halboffenes Periodenintervall der Länge 2π und $N(t)$ sei die Vielfachheit (kurz: VF), mit der die Werte ± 1 von t in I angenommen werden, d.h. $N(t)$ ist die Anzahl der Nullstellen (kurz: NS) in I mit VF gezählt, von $t+1$ und $t-1$ zusammen.

Satz. *Sei $t\in K$. Dann gilt: $N(t)>2n \Leftrightarrow t$ ist ein extremer Punkt von K.*

Beweis: Sei $N(t)>2n$ und $t=au+(1-a)v$ mit $u,v\in K$ und $a\in(0,1)$. Wenn dann $u\pm 1$ die gleichen NS in I besitzt wie $t\pm 1$, dann hat $t-u=(t-1)-(u-1)=(t+1)-(u+1)$ mehr als $2n$ NS in I, d.h. $t=u$. Analog erhält man $t=v$, und daraus folgt $t\in X$. Sei nun $z\in I$ eine NS von $t-1$. Aus $0=t(z)-1=au(z)+(1-a)v(z)-1$ folgt wegen $u,v\in K$ zwingend $u(z)=v(z)=1$, d.h. z ist auch eine NS von $u-1$ und von $v-1$. Wegen $t\in K$ und der Periodizität folgt weiterhin, dass z ein Maximum von $t-1$ sein muss, d.h. es gilt mit einem $r\in M=\{2,4,6,\ldots\}$: $t^{(1)}(z)=\cdots=t^{(r-1)}(z)=0$, aber $t^{(r)}(z)<0$. Diese Beziehungen bestehen dann auch für u und v anstelle von t, eventuell mit einem von r verschiedenen $r'\in M$ bzw. $r''\in M$. Im Falle $r\leq r'$ und $r\leq r''$ ist dann also eine NS von $t-1$ auch eine NS von $u-1$ und von $v-1$ mit mindestens derselben VF, was zu zeigen war. Eine andere Wahl von r' oder r'' kommt aber gar nicht in Frage, weil sich dann mit $q=\min\{r',r''\}<r$ der Widerspruch $0=t^{(q)}(z)=au^{(q)}(z)+(1-a)v^{(q)}(z)<0$ ergäbe. Der Fall einer NS von $t+1$ wird analog behandelt.

Es werde umgekehrt $N(t)\leq 2n$ angenommen. Dann ist zu zeigen, dass eine Darstellung $t=au+(1-a)v$ mit $u,v\in K$ und mit einem $a\in(0,1)$ existiert, aber nicht gilt: $t=u=v$. Seien $z_1,\ldots,z_s$ die NS in I von $1-t\geq 0$ und sei $n_i\geq 2$ die entsprechende gerade VF. Seien $y_1,\ldots,y_w$ die NS in I von $1+t\geq 0$ und sei $m_j\geq 2$ die entsprechende gerade VF. Definiere $t^+\geq 0$ durch

$$\prod_1^s(\sin((x-z_i)/2))^{n_i}=t^+(x)$$

und $t^- \geq 0$ durch

$$\prod_1^w (\sin((x-y_j)/2))^{m_j} = t^-(x),$$

so dass die einzigen NS von t^+ und t^- in I mit den NS von $1-t$ bzw. $1+t$ zusammenfallen. Definiere weiterhin $\boldsymbol{t} = t^+ \cdot t^- \geq 0$. Wegen $(\sin((x-c)/2))^2 \in T_1$ mit $c \in \mathbf{R}$ und der Addition der Polynomgrade bei der Multiplikation trigonometrischer Polynome folgt, unter Beachtung der Voraussetzung $N(t) \leq 2n$, dass $\boldsymbol{t}$ aus T_n ist. Ferner gibt es ein $d^+ > 0$ aus T_n und ein $d^- > 0$ aus T_n mit der Eigenschaft $1 - t = t^+ \cdot d^+$ und $1 + t = t^- \cdot d^-$. Dies folgt aus einer bekannten Produktdarstellung nichtnegativer Elemente aus T_n, vgl. [3], VI. Abschnitt, Aufgabe 40 (Lösung). Setze nun

$$a' = \min\{d^+(x)/t^-(x)\} > 0, \qquad a'' = \min\{d^-(x)/t^+(x)\} > 0, \qquad x \in I,$$

wähle $\boldsymbol{a} \in (0, \min\{a', a''\})$ und bilde $u = t + \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}$ und $v = t - \boldsymbol{a}\boldsymbol{t}$. Offenbar ist dann $u \neq t \neq v$, aber $t = 0 \cdot 5u + 0 \cdot 5v$. Es bleibt zu zeigen, dass u und v aus K sind: Für $x = z_i$ bzw. $x = y_j$ ist natürlich $|u(x)| \leq 1$ und $|v(x)| \leq 1$. In den anderen Fällen folgt einerseits aus $\boldsymbol{a} < d^+(x)/t^-(x)$, dass $\boldsymbol{a}\boldsymbol{t}(x) < d^+(x) \cdot t^+(x) = 1 - t(x)$ gilt, also $u(x) < 1$, und andererseits folgt aus $0 < \boldsymbol{a}$, dass $-\boldsymbol{a}t^+(x) < d^-(x)$ gilt. Somit ist $-\boldsymbol{a}\boldsymbol{t}(x) < d^- \cdot t^-(x) = 1 + t(x)$, also $-1 < u(x)$. Der Fall $|v(x)| \leq 1$ wird analog behandelt.
Wir stellen diesen Satz dem Satz von Konheim und Rivlin [4], der algebraische Polynome betrifft, ergänzend zur Seite.

H.-J. Rack, Universität Dortmund

LITERATURVERZEICHNIS

1 J.T. Marti: Konvexe Analysis. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1977.
2 A.W. Roberts und D.E. Varberg: Convex Functions. Academic Press, New York, London 1973.
3 G. Pólya und G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II, 3.Auflage. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964.
4 A.G. Konheim und T.J. Rivlin: Extreme points of the unit ball in a space of real polynomials. Am. Math. Monthly *73*, 505-507 (1966).

 0013-6018/82/060164-02$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 869. Es seien zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben, die nicht in derselben Ebene und nicht auf derselben Kugel liegen, sich nicht schneiden und nicht ineinander verschlungen sind. Dann gibt es genau vier Kreise, darunter eventuell eine Gerade, welche k_1 und k_2 berühren. Man beschreibe deren räumliche Konstruktion.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Es seien E_1, E_2 die Ebenen der Kreise k_1, k_2, und 1 ihre Schnittgerade. Eine Umklappung von E_2 um 1 in E_1 führt k_2 in k_2' über. Die Potenzgerade von k und k_2' schneidet 1 in einem Punkt P, von dem die Tangenten zu k_1 und k_2', und daher auch zu k_2, gleich lang sind. Seien s_1 und t_1 die Tangenten aus P zu k_1, s_2