Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 5

Artikel: Komplexe Zahlen in der Elementargeometrie
Autor: Jeger, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36398

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Words formed by projections

Let p and q be projections in a C*-algebra A. Suppose that u and v are two different reduced words each formed by juxtaposition of a finite sequence of p and q. Assuming that u equals v as elements of A, the purpose of this note is to show that p and q commute. This gives an algebraic proof of the following result which is of interest in quantum probability theory [1, 2]: for any two projections p, q in a Hilbert space H the commutation relation $pq=qp$ is equivalent to $pqp=qpq$.
There are three possible cases.

Case 1: $(pq)^n=u=v=(pq)^m$ with $n>m>0$. Then $(pqp)^n=up=vp=(pqp)^m$ with $m\neq n$. It follows that the spectrum of the positive element pqp must be contained in $\{0, 1\}$, i.e. pqp is a projection. The calculation $(pqp-qp)*(pqp-qp)=pqpqp-pqpqp-pqpqp+pqp=0$ shows that $pq=pqp=qp$.

Case 2: $(pq)^n=u=v=(pq)^m p$ for some $m,n>0$. If $m\neq n$, then $(pqp)^n=(pq)^n p=up=vp=(pq)^m p=(pqp)^m$. If $m=n$, then $(pq)^n=(pq)^n q=uq=vq=(pq)^n pq=(pq)^{n+1}$. Thus case 2 reduces to case 1.

Case 3: $(pq)^n=u=v=(qp)^m$ for some $m,n>0$. Then $(pqp)^n=(pq)^n p=up=vp=(qp)^m p=(qp)^m$ and so $(pq)^n=(pqp)^n$. This reduces to case 2.

Jen-chung Chuan, National Tsing Hua University, Hsinschu, Taiwan

REFERENCES

1 P. Mittelstaedt: Philosophische Probleme der modernen Physik. BI-Hochschultaschenbücher, Vol. 50 (1976).
2 W. Rehder: On the commutativity of two projections. El. Math. *35*/5 120–122 (1980).
3 S. Sakai: C*-algebras and W*-algebras. Springer-Verlag, Berlin 1970.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/050136-01 $1.50 + 0.20/0

Elementarmathematik und Didaktik

Komplexe Zahlen in der Elementargeometrie

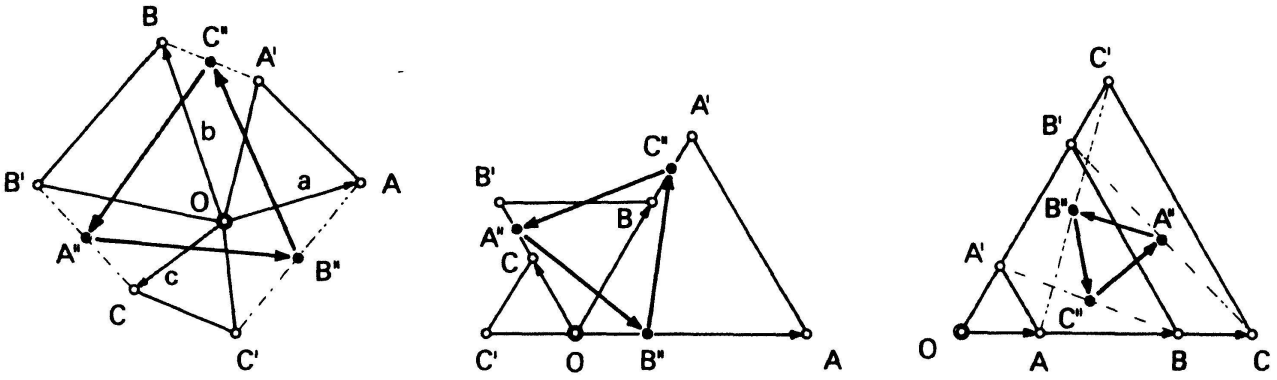
Man kann bekanntlich die gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen in der euklidischen Ebene (Translationen, Drehungen, Streckungen, Dreh-Streckungen) auf prägnante Art mit komplexen Zahlen beschreiben. Die vorliegende Studie möchte auf ein kleines Anwendungsfeld der komplexen Zahlen in diesem Bereich hinweisen und gleichzeitig der Schulmathematik einige Anregungen zuführen. Sie befasst sich mit einem Block von thematisch verwandten geometrischen Problemen in der Absicht, zu diesem Problemkreis einen neuen Zugang freizulegen.

1. Ein Propeller-Problem

In [1] haben L. Bankoff, P. Erdös und M. S. Klamkin folgendes gezeigt[1]):

1. *Bilden die Punkte-Tripel* (O,A,A'), (O,B,B'), (O,C,C') *gleichorientierte gleichseitige Dreiecke, dann spannen auch die Mittelpunkte der Punktepaare* (A',B), (B',C), (C',A) *ein gleichseitiges Dreieck auf.*

Dieser Sachverhalt lässt sich anhand einiger Beispiele (Fig. 1) sofort vermuten.



Figur 1

Im zitierten Aufsatz wird neben einem elementaren synthetischen Beweis auch noch ein Beweis unter Verwendung komplexer Zahlen mitgeteilt. Dieser zweite Beweis hat mich dazu bewogen, nach weitern geometrischen Sätzen Ausschau zu halten, die auf ebenso elegante Weise mit den komplexen Zahlen erschlossen werden können.

Zum Beweis von (1) mit komplexen Zahlen ist der euklidischen Ebene die Gaußsche Zahlenebene zu unterlegen. Der Ursprung wird im Punkt O gewählt. Bei einer bestimmten Lage des Bezugssystems möge dem Punkt Z die komplexe Zahl z entsprechen.

Da die Zuordnung

$$A \mapsto A', \qquad B \mapsto B', \qquad C \mapsto C'$$

durch eine Drehung um O mit dem Drehwinkel $+\pi/3$ bewerkstelligt wird, ist

$$a' = \varepsilon a, \qquad b' = \varepsilon b, \qquad c' = \varepsilon c,$$

wobei $\varepsilon = e^{2\pi i/6}$.

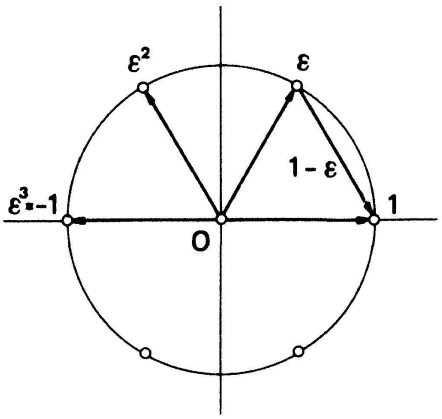
Für die komplexe Zahl ε gilt

$$\varepsilon^2 = -(1-\varepsilon), \qquad \varepsilon^3 = -1.$$

Es ist nun

$$a'' = \frac{1}{2}(\varepsilon b + c), \qquad b'' = \frac{1}{2}(\varepsilon c + a), \qquad c'' = \frac{1}{2}(\varepsilon a + b).$$

1) Die Kenntnis dieser Note verdanke ich einem Hinweis von J. Binz (Bern).



Figur 2

Damit erhält man

$$b''-a''=\frac{1}{2}(\varepsilon c+a-\varepsilon b-c)=\frac{1}{2}\left(a-\varepsilon b-(1-\varepsilon)c\right)=\frac{1}{2}(a-\varepsilon b+\varepsilon^2 c)$$

und durch zyklische Vertauschung dazu noch

$$c''-b'' \qquad =\frac{1}{2}(b-\varepsilon c+\varepsilon^2 a)$$

$$a''-c'' \qquad =\frac{1}{2}(c-\varepsilon a+\varepsilon^2 b)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2(b''-a'')&=\frac{1}{2}(\varepsilon^2 a-\varepsilon^3 b+\varepsilon^4 c)=\frac{1}{2}(\varepsilon^2 a+b-\varepsilon c)=c''-b''\\
\varepsilon^2(c''-b'')&=a''-c''\\
\varepsilon^2(a''-c'')&=b''-a''.
\end{aligned}$$

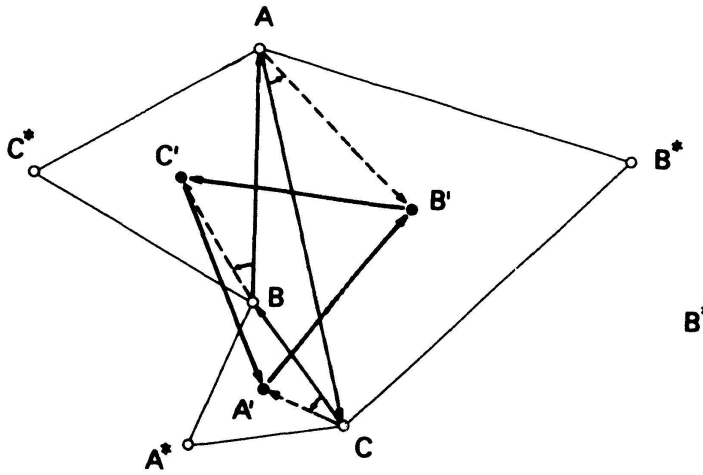
Die letzten drei Beziehungen besagen, dass die Seiten-Vektoren des Dreiecks ABC zugeordnete Objekte bei einer Drehung um den Winkel $+2\pi/3$ sind; das Dreieck ABC ist also gleichseitig.

2. Napoleon-Dreiecke

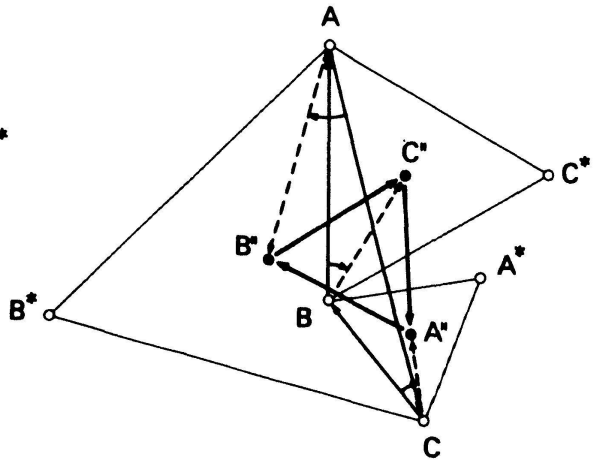
Napoleon Bonaparte soll ein Liebhaber-Mathematiker mit einem besondern Interesse an der Geometrie gewesen sein. Ihm wird die Entdeckung des folgenden geometrischen Sachverhaltes zugeschrieben:

2. *Errichtet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC nach aussen gleichseitige Dreiecke, dann spannen deren Mittelpunkte $A'B'C'$ ein gleichseitiges Dreieck auf.*

Zu diesem Satz über das *äussere Napoleon-Dreieck* (Fig. 3 a) sind verschiedene synthetische Beweise bekannt. Die elegantesten Beweisführungen beruhen auf der Verwendung von Transformationen (vgl. [2,4]).



Figur 3a



Figur 3b

In der Sicht der Transformationsgeometrie ist das Theorem (2) in der Hauptgruppe der ebenen euklidischen Geometrie angesiedelt. Aus diesem Grunde liegt auch ein Zugang über die komplexen Zahlen auf der Hand.
Der anschliessend dargelegte Beweis verwendet Dreh-Streckungen mit dem Drehwinkel $\pi/6$ und dem Streckungsfaktor $\sqrt{3}/3$. Diese Parameterwerte stecken in der komplexen Zahl

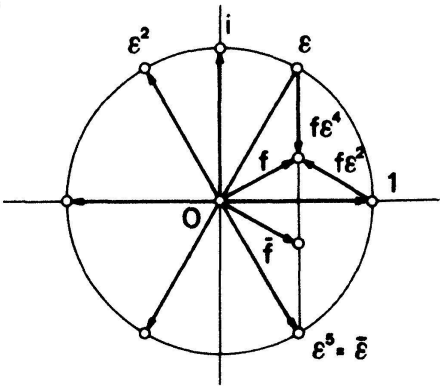
$$f=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,e^{i\pi/6}.$$

Legt man wiederum die sechste Einheitswurzel $\varepsilon=e^{2\pi i/6}$ zugrunde, dann gilt

$$\begin{aligned} f-f\varepsilon^2 &= 1\\ f+f\varepsilon^2+f\varepsilon^4 &= 0. \end{aligned}$$

Dies kann unmittelbar der Figur 4 entnommen werden. Man schliesst daraus auf

$$\begin{aligned} f\varepsilon^2 &= f-1\\ f\varepsilon^4 &= -f-f\varepsilon^2=1-2f. \end{aligned}$$



Figur 4

Nach diesen Vorbereitungen erhält man nun

$$\begin{aligned} a' &= c + f(b-c) \\ b' &= a + f(c-a) \\ c' &= b + f(a-b) \end{aligned} \tag{2.1}$$

und damit

$$\begin{aligned} b'-a' &= (1-f)a - fb + (2f-1)c = -f(\varepsilon^2 a + b + \varepsilon^4 c) \\ c'-b' &= -f(\varepsilon^2 b + c + \varepsilon^4 a) \\ a'-c' &= -f(\varepsilon^2 c + a + \varepsilon^4 b). \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(b'-a') &= -f(\varepsilon^4 a + \varepsilon^2 b + \varepsilon^6 c) = -f(\varepsilon^4 a + \varepsilon^2 b + c) = c'-b' \\ \varepsilon^2(c'-b') &= a'-c' \\ \varepsilon^2(a'-c') &= b'-a'. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dies besagt, dass das Dreieck $A'B'C'$ gleichseitig ist[2]).

Es seien jetzt noch einige Erweiterungen des Napoleon-Theorems beigefügt. Zunächst zeigen wir, dass auch das *innere Napoleon-Dreieck* eines beliebigen Dreiecks ABC stets gleichseitig ist (Fig. 3 b). Zu den Eckpunkten $A''B''C''$ gehören nämlich die komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} a'' &= c + \bar{f}(b-c) \\ b'' &= a + \bar{f}(c-a) \\ c'' &= b + \bar{f}(a-b). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dies impliziert jetzt

$$b''-a'' = (1-\bar{f})a - \bar{f}b + (2\bar{f}-1)c = -\bar{f}(\bar{\varepsilon}^2 a + b + \bar{\varepsilon}^4 c)$$

sowie zwei weitere Beziehungen, die durch zyklische Vertauschung der Zeichen $a\,b\,c$ entstehen. Man erhält damit

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2(b''-a'') &= -f(\bar{\varepsilon}^4 a + \bar{\varepsilon}^2 b + \bar{\varepsilon}^6 c) = -f(\bar{\varepsilon}^4 a + \bar{\varepsilon}^2 b + c) = c''-b'' \\ \bar{\varepsilon}^2(c''-b'') &= a''-c'' \\ \bar{\varepsilon}^2(a''-c'') &= b''-a''. \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.2) besagt, dass auch das Dreieck $A''B''C''$ gleichseitig ist. Der Faktor $\bar{\varepsilon}^2$ in (2.4) anstelle von ε^2 in (2.2) bringt zum Ausdruck, dass die Dreiecke $A''B''C''$ und $A'B'C'$ gegenläufig orientiert sind.

2) Der vorliegende Beweis verwendet ähnliche Überlegungen wie U. Handschin (Gymnasium Bäumlihof, Basel) in einer Zuschrift an die Redaktion zum Napoleon-Problem.

Aus (2.1) und (2.3) entnimmt man noch, dass

$$\frac{1}{3}(a'+b'+c')=\frac{1}{3}(a''+b''+c'')=\frac{1}{3}(a+b+c). \tag{2.5}$$

Dies beweist, dass die Schwerpunkte des Primär-Dreiecks ABC und der beiden Napoleon-Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ zusammenfallen.
Zwischen den gemäss der vorliegenden Orientierung mit einem Vorzeichen versehenen Flächeninhalten der drei Dreiecke besteht die folgende Beziehung

$$\varphi(A'B'C')+\varphi(A''B''C'')=\varphi(ABC)\,^{3)}, \tag{2.6}$$

die ebenfalls in unsere Betrachtungen zur Geometrie der komplexen Zahlen einbezogen werden kann.
Zu drei Punkten ABC mit den kartesischen Koordinaten (a_1,a_2), (b_1,b_2), (c_1,c_2) gehören nach Unterlegung der Gaußschen Zahlenebene die drei komplexen Zahlen

$$a=a_1+ia_2, \qquad b=b_1+ib_2, \qquad c=c_1+ic_2.$$

Das Flächenfunktional für das Dreieck ABC kann jetzt wie folgt ausgedrückt werden:

$$\varphi(ABC)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{4i}(\bar{a}b-a\bar{b}+\bar{b}c-b\bar{c}+\bar{c}a-c\bar{a}). \tag{2.7}$$

Setzt man

$$s=\bar{a}b-a\bar{b}+\bar{b}c-b\bar{c}+\bar{c}a-c\bar{a},$$

dann erhält man für die Summe der entsprechenden Terme zu den Dreiecken $A'B'C'$ und $A''B''C''$ unter Berücksichtigung von (2.1) und (2.3) nach einer problemlosen Umformung

$$\begin{aligned} s'+s'' &= (\bar{a}'b'-a'\bar{b}'+\bar{b}'c'-b'\bar{c}'+\bar{c}'a'-c'\bar{a}') \\ &\quad +(\bar{a}''b''-a''\bar{b}''+\bar{b}''c''-b''\bar{c}''+\bar{c}''a''-c''\bar{a}'') \\ &= 2s-3(f+\bar{f})s+6\bar{f}\bar{f}s. \end{aligned}$$

Wegen $f+\bar{f}=1$ und $\bar{f}\bar{f}=1/3$ ist also $s'+s''=s$ und dies beweist (2.6).
Wir betrachten jetzt auch noch die freien Eckpunkte $A^*B^*C^*$ für die drei Aussendreiecke in der Figur 3 a. Wegen

$$\begin{aligned} a^* &= c+\varepsilon(b-c) \\ b^* &= a+\varepsilon(c-a) \\ c^* &= b+\varepsilon(a-b) \end{aligned}$$

3) Einen Beweis für (2.6), bei dem klassische Schlussweisen der Elementargeometrie verwendet werden, findet der interessierte Leser in [2], S. 64–65.

ist

$$\begin{aligned} a^*-a &= c-a+\varepsilon(b-c) = -a+\varepsilon b+(1-\varepsilon)c = -a+\varepsilon b-\varepsilon^2 c \\ b^*-b &= -b+\varepsilon c-\varepsilon^2 a \\ c^*-c &= -c+\varepsilon a-\varepsilon^2 b. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(a^*-a) &= -\varepsilon^2 a+\varepsilon^3 b-\varepsilon^4 c = -\varepsilon^2 a-b+\varepsilon c = b^*-b \\ \varepsilon^2(b^*-b) &= c^*-c \\ \varepsilon^2(c^*-c) &= a^*-a. \end{aligned}$$

Die drei Vektoren $\overrightarrow{AA^*}$, $\overrightarrow{BB^*}$, $\overrightarrow{CC^*}$ sind also gleichlang und bilden paarweise Winkel mit dem Mass $2\pi/3$.
Ferner sind die drei Verbindungsgeraden AA^*, BB^*, CC^* kollinear. Auch dies lässt sich mit dem gleichen Werkzeug verifizieren. In komplexer Schreibweise lauten die Gleichungen der genannten Geraden

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ a^* & \bar{a}^* & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ b^* & \bar{b}^* & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \\ c^* & \bar{c}^* & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8}$$

Da

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ a^* & \bar{a}^* & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ b^* & \bar{b}^* & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \\ c^* & \bar{c}^* & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

ist, liegen die drei Geraden im Büschel. (2.9) lässt sich etwa durch Berechnung der Koeffizienten von $\bar{z}$ und z sowie des konstanten Gliedes nachweisen. Man findet dafür der Reihe nach

$$\begin{aligned} &(a-a^*)+(b-b^*)+(c-c^*) = (a+b+c)(1-\varepsilon+\varepsilon^2) = 0 \\ &(\bar{a}-\bar{a}^*)+(\bar{b}-\bar{b}^*)+(\bar{c}-\bar{c}^*) = \overline{(a-a^*)+(b-b^*)+(c-c^*)} = 0 \\ &(a\bar{a}^*-\bar{a}a^*)+(b\bar{b}^*-\bar{b}b^*)+(c\bar{c}^*-\bar{c}c^*) = s+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})s \quad = 0 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt F der drei Geraden ist übrigens der sogenannte Fermatsche Punkt für das Dreieck ABC, der - falls das Dreieck ABC keinen Winkel mit einem Mass grösser als $2\pi/3$ besitzt - die Summe

$$f(X) = |AX| + |BX| + |CX|$$

minimiert.
Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass auch

$$\frac{1}{3}(a^*+b^*+c^*) = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

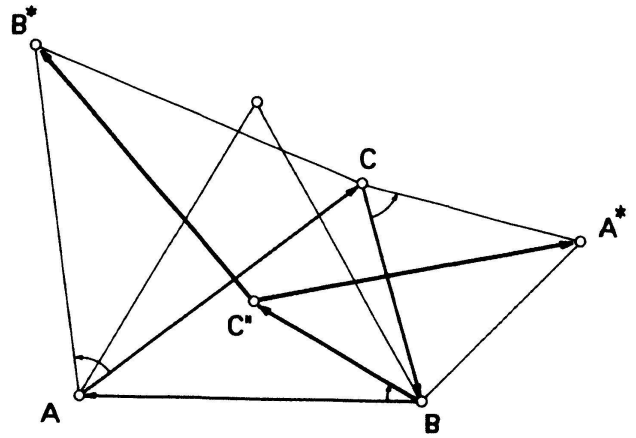
ist.

In die Nähe des Napoleon-Theorems gehört auch die folgende Aussage:

3. *Errichtet man bei einem beliebigen Dreieck ABC die gleichseitigen Aussendreiecke CBA^* und ACB^* sowie das gleichseitige Innendreieck BAC^* mit dem Mittelpunkt C'', dann sind $\overrightarrow{C''B^*}$ und $\overrightarrow{C''A^*}$ stets gleichlange Vektoren mit einem Zwischenwinkel vom Mass $2\pi/3$* (vgl. [4], S. 38, 39).

Mit komplexen Zahlen lässt sich dies etwa wie folgt zeigen. Zunächst ist

$$a^* = c + \varepsilon(b-c); \qquad b^* = a + \varepsilon(c-a); \qquad c'' = b + \bar{f}(a-b).$$



Figur 5

Daraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der Figur 4

$$\begin{aligned} a^* - c'' &= -\bar{f}a + (\bar{f} + \varepsilon - 1)b + (1-\varepsilon)c = \varepsilon^2 fa - \varepsilon^4 fb + \varepsilon^5 c \\ b^* - c'' &= (1-\varepsilon-\bar{f})a - (1-\bar{f})b + \varepsilon c \quad = \varepsilon^4 fa - fb + \varepsilon c \end{aligned}$$

und weiter

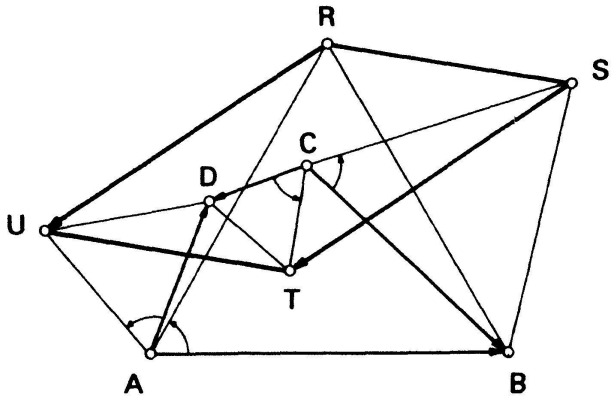
$$\varepsilon^2(a^* - c) = \varepsilon^4 fa - \varepsilon^6 fb + \varepsilon c = b^* - c''.$$

Die letzte Beziehung beweist die Aussage (3).

3. Vierecks-Theoreme

Von den eben verwendeten transformationsgeometrischen Beweisansätzen her gesehen sind auch einige Vierecks-Theoreme ins Umfeld des Napoleon-Problems zu stellen. Es überrascht nicht, dass sich auch dort Beweise finden lassen, die von den komplexen Zahlen Gebrauch machen. Aus diesem Winkel der Elementargeometrie seien anschliessend noch einige Beispiele vorgestellt.

4. *Errichtet man über den Seiten eines beliebigen Vierecks abwechslungsweise das gleichseitige Aussen- beziehungsweise Innendreieck, dann spannen die freien Ecken dieser Dreiecke ein Parallelogramm auf* (vgl. [4], S. 39).



Figur 6

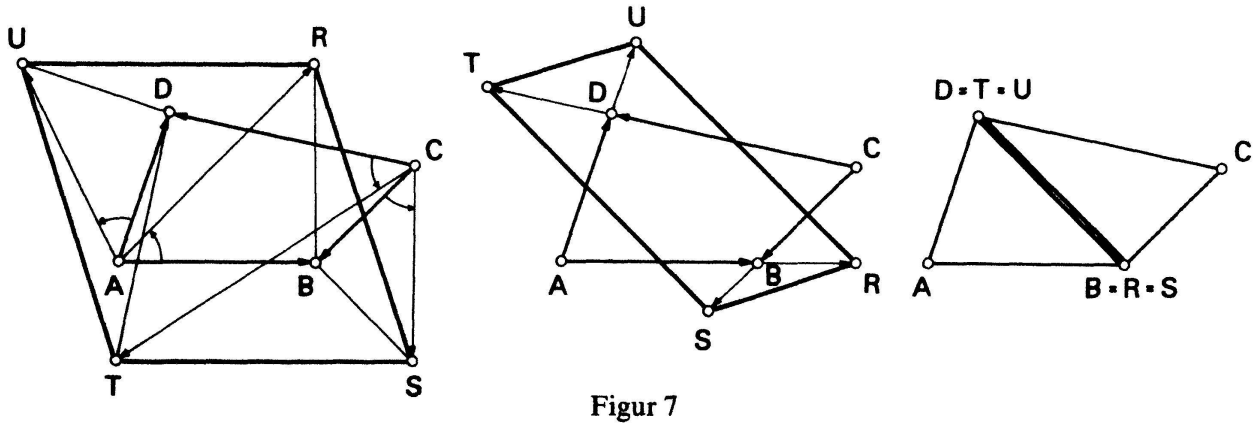
Hier ist

$$\begin{aligned} r &= a+\varepsilon(b-a) \\ s &= c+\varepsilon(b-c) \\ t &= c+\varepsilon(d-c) \\ u &= a+\varepsilon(d-a) \end{aligned} \tag{3.1}$$

und damit

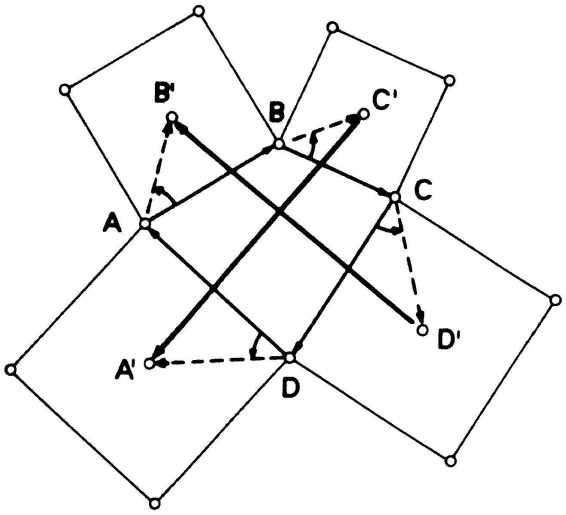
$$\left.\begin{aligned} u-r &= \varepsilon(d-a-b+a) = \varepsilon(d-b) \\ t-s &= \varepsilon(d-c-b+c) = \varepsilon(d-b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u-r=t-s.$$

Die Gleichung auf der rechten Seite des Implikationspfeils besagt, dass das Viereck *RSTU* ein Parallelogramm ist.
Aus dem vorliegenden Beweis kann entnommen werden, dass das aus einem beliebigen Viereck *ABCD* vermöge (3.1) hervorgehende Viereck *RSTU* auch dann ein Parallelogramm ist, wenn man ε durch eine beliebige komplexe Zahl α ersetzt. Man erhält auf diese Weise eine bemerkenswerte Verallgemeinerung von (4).
Die Figur 7 zeigt das Vierecks-Paar *ABCD* und *RSTU* für drei verschiedene Werte von α.

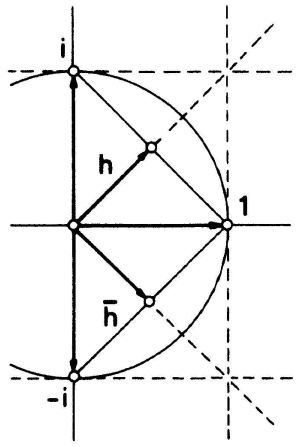


Figur 7

5. *Errichtet man über den Seiten eines Vierecks ABCD nach aussen Quadrate, dann entsteht ein Mittelpunkts-Viereck A'B'C'D' mit senkrechten und gleichlangen Diagonalen* (vgl. [4], S. 39, 40).



Figur 8



Figur 9

Hier kann der Beweis mit folgenden Überlegungen geführt werden. Die Quadrat-Mittelpunkte $A'B'C'D'$ lassen sich aus den Ecken $ABCD$ über Drehstreckungen mit dem Drehwinkel $\pi/4$ und dem Streckungsfaktor $\sqrt{2}/2$ erhalten. Diese Parameter gehen in die komplexe Zahl

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}=\frac{1}{2}(1+i)$$

ein. Aus der Figur 9 kann man die Beziehungen

$$h+\bar{h}=1\,; \qquad i\bar{h}=h\,; \qquad ih=-\bar{h}\,; \qquad 1-2h=-i$$

herauslesen. Es ist nun

$$a'=d+h(a-d)\,; \qquad b'=a+h(b-a)\,; \qquad c'=b+h(c-b)\,; \qquad d'=c+h(d-c)$$

und damit

$$\begin{aligned} a'-c'&=d-b+h(a-d-c+b)=ha-(1-h)b-hc+(1-h)d=ha-\bar{h}b-hc+\bar{h}d\\ b'-d'&=a-c+h(b-a-d+c)=(1-h)a+hb-(1-h)c-hd=\bar{h}a+hb-\bar{h}c-hd. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich jetzt

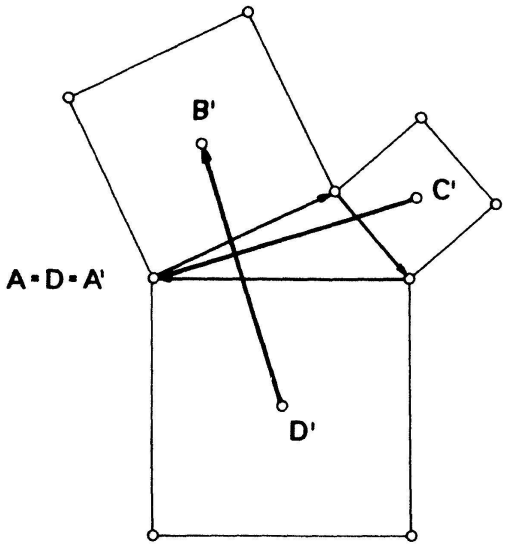
$$i(b'-d')=i\bar{h}a+ihb-i\bar{h}c-ihd=ha-\bar{h}b-hc+\bar{h}d=a'-c',$$

und dies beweist (5).
Lässt man die Punkte A und D zusammenfallen, dann wird man auf den folgenden Dreieck-Satz geführt:

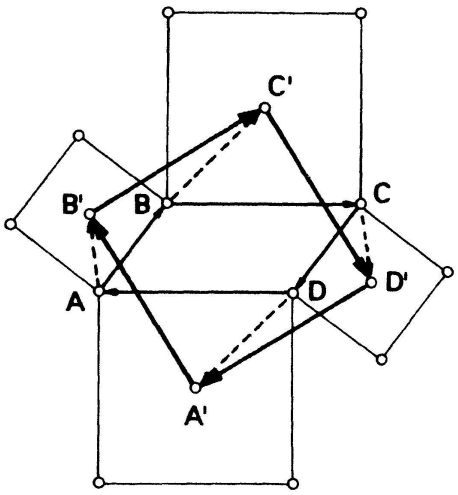
6. *Errichtet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks BCD die Aussen-Quadrate, dann sind der Verbindungsvektor zweier Quadratmittelpunkte und der Verbindungs-*

vektor zwischen dem dritten Quadratmittelpunkt und der ihm gegenüberliegenden Dreiecksecke jeweils senkrecht und gleich lang (vgl. [2], S. 96).

Mit den Bezeichnungen in der Figur 10 ist etwa $\overrightarrow{D'B'} \perp \overrightarrow{C'D'}$ und $|\overrightarrow{D'B'}| = |\overrightarrow{C'D'}|$.
Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Geraden BD', CB', DC' die Höhen im Dreieck $B'C'D'$ sind und daher durch einen Punkt gehen.
Schliesslich sei noch ein weiterer Viereck-Satz bewiesen.



Figur 10



Figur 11

7. *Werden über den Seiten eines Parallelogrammes ABCD die Aussen-Quadrate errichtet, dann spannen die Quadratmittelpunkte stets ein weiteres Quadrat auf* (vgl. [4], S. 96, 97).

Für den Beweis mit komplexen Zahlen kann der Ursprung der unterlegten Gaußschen Zahlenebene wiederum beliebig gewählt werden. Die Parallelogramm-Eigenschaft zeichnet sich ab in der Beziehung

$$a+c=b+d. \tag{3.2}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
c'-b' &= b-a+h(c-b-b+a) = -(1-h)a+(1-2h)b+hc = -\bar{h}a-ib+hc\\
d'-c' &= -\bar{h}b-ic+hd\\
a'-d' &= -ha-\bar{h}c-id\\
b'-a' &= -ia+hb-\bar{h}d.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man unter Berücksichtigung von (3.2)

$$\begin{aligned}
i(c'-b') &= -i\bar{h}a+b+ihc = -ha+b-\bar{h}(b+d-a) = (\bar{h}-h)a+(1-\bar{h})b-\bar{h}d = b'-a'\\
i(d'-c') &= c'-b'\\
i(a'-d') &= d'-c'\\
i(b'-a') &= a'-d'
\end{aligned}$$

und dies beweist, dass $A'B'C'D'$ die Eckpunkte eines Quadrates sind.

M. Jeger, Mathematisches Seminar ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Bankoff, P. Erdös und M.S. Klamkin: The asymmetric Propeller. Math. Mag. *46*, 270–272 (1973).
2 H.S.M. Coxeter und S.L. Greitzer: Geometry revisited. New Math. Libr. *19*, Random-House, New York 1967.
3 R.L. Finney: Dynamic Proofs of euclidean Theorems. Math. Mag. *43*, 177–185 (1970).
4 I.M. Yaglom: Geometric Transformations I. New Math. Libr. *8*, Random-House, New York 1962.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/050136-12$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 866. Für natürliche Zahlen a, b, c mit $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ sei

$$S(a,b,c):=\sum_{k=1}^{c-1}(2k-1)[ka/c]^2\,[kb/c]^2,$$

wobei [ ] die Ganzteilfunktion bezeichnet. Man zeige, dass

$$S(a,b,c)+S(b,c,a)+S(c,a,b)=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Solution with generalization: We shall prove the following statement (which for $m=2$) reduces to the original problem:
Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $\mathbf{N}$ be such that $(a_i, a_j)=1$ for $i \neq j$.
Let

$$S_p=\sum_{k=1}^{a_p-1}\left(k^m-(k-1)^m\right)[ka_1/a_p]^m\cdots\widehat{[ka_p/a_p]^m}\cdots[ka_n/a_p]^m,$$

where $\wedge$ means that the p-th factor is to be omitted.

Then

$$\sum_{p=1}^{n} S_i=(a_1-1)^m(a_2-1)^m\cdots(a_n-1)^m. \qquad (*)$$

Proof: We shall count in two different ways the number of sequences

$$(a_{11},\ldots,a_{1m};\ a_{21},\ldots,a_{2m};\ \ldots;\ a_{n1},\ldots,a_{nm})$$

with $1 \leq a_{1j} < a_1, \ldots, 1 \leq a_{nj} \leq a_n$ for all $1 \leq j \leq m$.
Obviously each a_{ij} can take on $a_i - 1$ different values. This establishes the right hand side of $(*)$.