

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

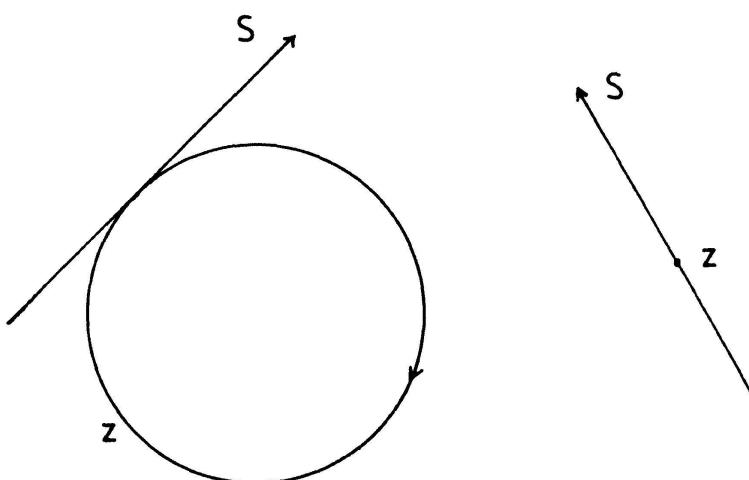
- 12 C.J. Titus und G.S. Young: A Jacobian condition for interiority. *Mich. Math. J.* **1**, 89–94 (1952).
- 13 C.J. Titus: Sufficient conditions that a mapping be open. *Proc. Am. Math. Soc.* **10**, 970–973 (1959).
- 14 J. Väisälä: Discrete open mappings on  $n$ -manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI* **392**, 1–10 (1966).

## Kleine Mitteilungen

### Ein Beispiel zum Rechnen mit Involutionen in der klassischen Laguerre-Geometrie

Unter der klassischen Laguerre-Geometrie der reellen euklidischen Ebene  $E$  versteht man bekanntlich die folgende Inzidenzstruktur:

1. Die Menge  $S$  der Speere besteht aus allen orientierten Geraden von  $E$ . Die dem Speer zugrunde liegende Gerade heisst Trägergerade.
2. Die Menge  $Z$  der Zykel besteht aus allen Punkten und allen orientierten Kreisen von  $E$ . Ist  $z \in Z$  ein orientierter Kreis, so heisst der  $z$  zugrunde liegende Kreis der Trägerkreis von  $z$ .
3. Ist  $z$  ein Punkt, so inzidiert  $z$  mit  $S \in S$  – in Zeichen  $S \cap z$  –, falls der Punkt auf der Trägergeraden von  $S$  liegt. Ist  $z \in Z$  ein orientierter Kreis, so inzidiert  $z$  mit  $S$  – wie oben durch  $S \cap z$  ausgedrückt –, falls sich die Trägergerade von  $S$  und der Trägerkreis von  $z$  berühren und überdies die Orientierung von  $S$  und  $z$  im Berührpunkt übereinstimmen (Fig. 1).

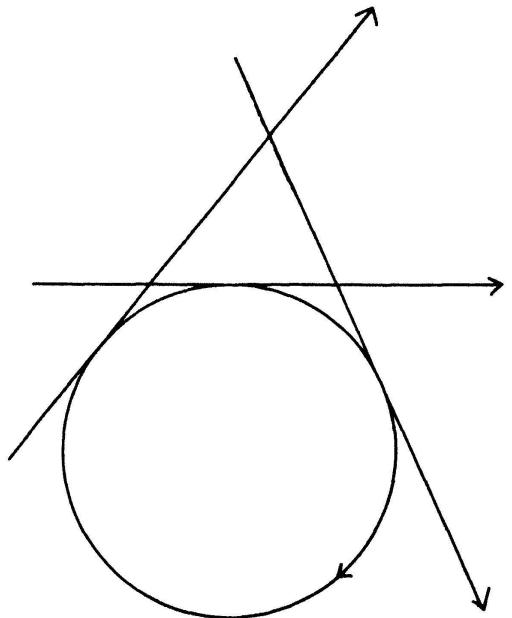


Figur 1

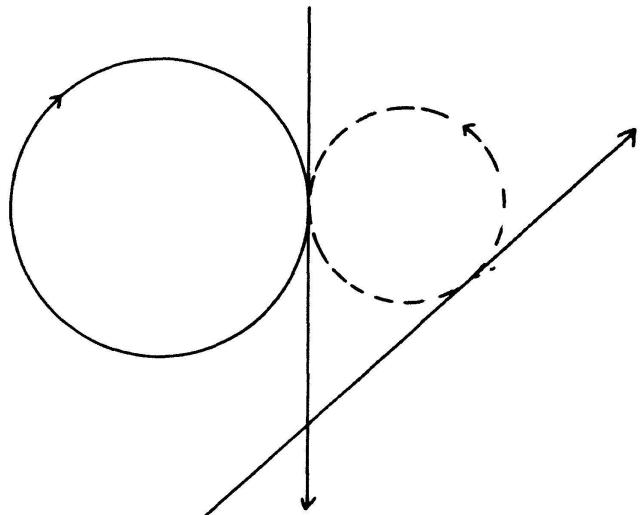
Die gemäss 1, 2 und 3 gebildete Inzidenzstruktur  $(S, Z, I)$  heisst klassische Laguerre-Geometrie.

Wir nennen die Speere  $S, T$  parallel, in Zeichen  $S \parallel T$ , wenn entweder  $S = T$  oder wenn es kein  $z \in Z$  mit  $S, T \cap z$  gibt. Man bestätigt unmittelbar die folgenden Aussagen:

- I. Zwei Speere  $S, T$  sind genau dann parallel, wenn die Trägergeraden von  $S, T$  parallel sind und die gleiche Orientierung haben.
- II. Mit drei paarweise nicht parallelen Speeren inzidiert genau ein Zykel (Fig. 2).
- III. Inzidiert der Speer  $S$  mit dem Zykel  $z$  und gilt  $T \not\in S, T \in \mathbf{S}, T \not\parallel z$ , so gibt es genau ein  $y \in \mathbf{Z}$ , so dass  $T I y$  und  $z, y$  nur  $S$  als gemeinsam mit  $z, y$  inzidierenden Speer besitzen (Fig. 3).

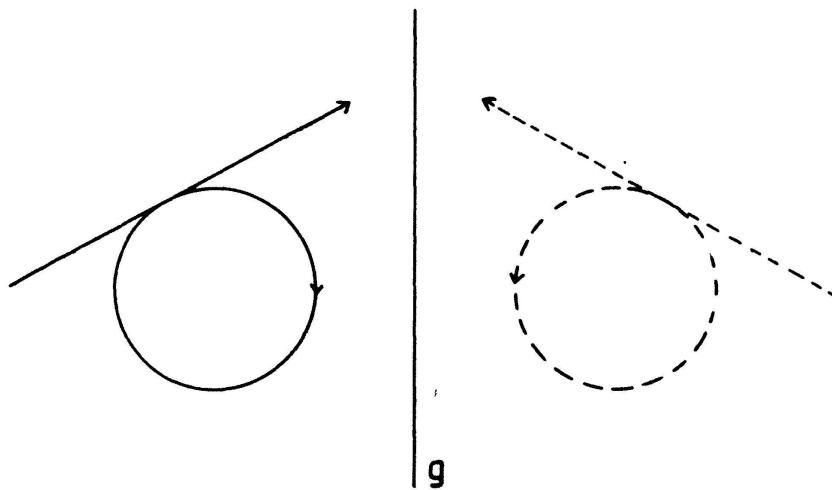


Figur 2



Figur 3

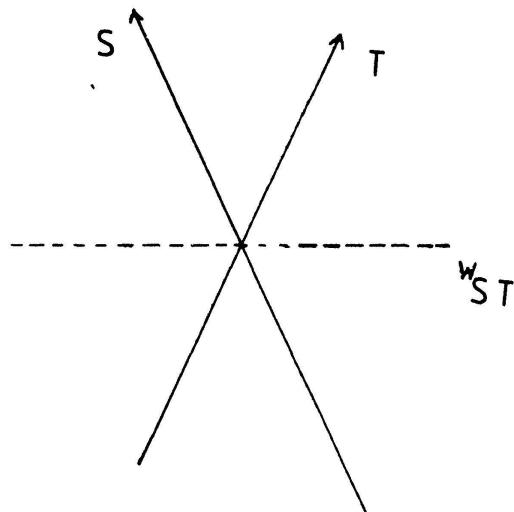
Die übliche Spiegelung an einer Geraden  $g$  der euklidischen Ebene  $E$  wird zu einem involutorischen Automorphismus von  $(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, I)$ , wenn wir in anschaulich naheliegender Weise (Fig. 4) die Orientierung der Speere und Zykel durch Klappung übertragen.



Figur 4

$\sigma_g$  sei der durch die Spiegelung an  $g$  induzierte involutorische Automorphismus von  $(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, I)$ .

Die Orientierung der Geraden ermöglicht uns, eine eindeutig bestimmte «Winkelhalbierende» zu definieren. Sind  $S, T$  nicht parallele Speere, so sei  $w_{ST}$  die Mittellinie der Trägergeraden  $g, h$  von  $S, T$ , falls diese parallel sind; sind  $g, h$  nicht parallel, so sei  $w_{ST}$  die Winkelhalbierende der beiden durch  $g, h$  bestimmten Winkelfelder, in denen die mit  $S, T$  inzidierenden Zykel liegen (Fig. 5).  $\sigma_{ST}$  sei die durch  $w_{ST}$  bestimmte Involution von  $(\mathbf{S}, \mathbf{Z}, I)$ .



Figur 5

Wir wollen nun – ähnlich wie in [2] – nur durch Rechnen mit Involutionen den Schliessungssatz von Miquel für die klassische Laguerre-Geometrie beweisen. Das entscheidende Hilfsmittel für den Beweis liefert das folgende

**Lemma.** *Vier paarweise nicht parallele Speere  $P, Q, R, S$  inzidieren genau dann mit einem Zykel, wenn*

$$\sigma_{PQ}\sigma_{QR}\sigma_{RS} = \sigma_{PS}^1).$$

Beweis: Die Bedingung ist hinreichend: Sei  $P, Q, R, S \not\sim z$  und  $z$  ein orientierter Kreis. Dann gehen die Winkelhalbierenden  $w_{PQ}, w_{QR}, w_{RS}$  durch den Mittelpunkt des Trägerkreises von  $z$ , und deswegen ist jedenfalls

$$\sigma_{PQ}\sigma_{QR}\sigma_{RS} = \sigma_g$$

für eine geeignete Gerade  $g$ . Da  $\sigma_g$  überdies die Trägergerade von  $P$  auf die Trägergerade von  $S$  abbildet und den Trägerkreis von  $z$  invariant lässt, folgt

$$g = w_{PS}$$

und damit die Behauptung. Ist  $z$  ein Punkt, so schliesst man analog.  
Die Bedingung ist notwendig:

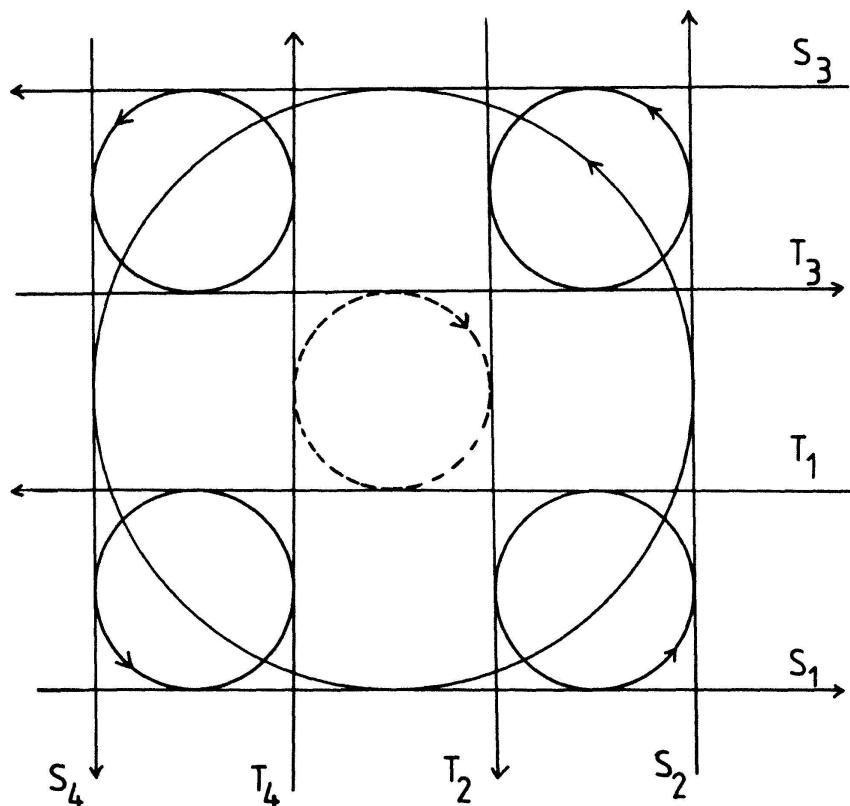
1) Abbildungen werden als Exponenten von rechts geschrieben.

Gilt

$$\sigma_{PQ}\sigma_{QR}\sigma_{RS} = \sigma_{PS},$$

so liegen  $w_{PQ}, w_{QR}, w_{RS}, w_{PS}$  im Büschel. Da die Trägergeraden von  $P, Q, R, S$  nicht parallel sein können (sonst wären die vier Speere  $P, Q, R, S$  nicht paarweise nicht parallel), gehen  $w_{PQ}, w_{QR}, w_{RS}, w_{PS}$  durch einen Punkt  $p$ . Aus  $p \perp P$  ( $p$  als Zykel aufgefasst) folgt offenbar  $p \perp Q, R, S$ , und wir können daher annehmen, dass  $p$  nicht auf den Trägergeraden  $g, h, i, j$  von  $P, Q, R, S$  liegt. Also können wir auf die Existenz eines Kreises  $k$  mit Mittelpunkt  $p$  schliessen, der  $g, h, i, j$  berührt, und orientieren  $k$  so zu einem Zykel  $z$ , dass  $P \perp z$  gilt. Wegen  $p \perp w_{PQ}$  folgt nach der Definition der Winkelhalbierenden  $Q \perp z$ , und entsprechend erschliessen wir  $R, S \perp z$ .

**Der Schliessungssatz von Miquel für die Laguerre-Geometrie.** Inzidieren von den acht paarweise nicht parallelen Speeren  $S_1, S_2, S_3, S_4, T_1, T_2, T_3, T_4$  jeweils die Quadrupel  $S_1, S_2, S_3, S_4; S_1, S_2, T_1, T_2; S_2, S_3, T_2, T_3; S_3, S_4, T_3, T_4; S_4, S_1, T_4, T_1$  mit einem Zykel, so auch das Quadrupel  $T_1, T_2, T_3, T_4$  (Fig. 6).



Figur 6

Beweis: Lemma und Voraussetzung ergeben die Gleichungen

$$\sigma_{T_1 T_2} = \sigma_{T_1 S_1} \sigma_{S_1 S_2} \sigma_{S_2 T_2}$$

$$\sigma_{T_2 T_3} = \sigma_{T_2 S_2} \sigma_{S_2 S_3} \sigma_{S_3 T_3}$$

$$\sigma_{T_3 T_4} = \sigma_{T_3 S_3} \sigma_{S_3 S_4} \sigma_{S_4 T_4}$$

$$\sigma_{S_1 S_4} = \sigma_{S_1 S_2} \sigma_{S_2 S_3} \sigma_{S_3 S_4}$$

$$\sigma_{T_1 T_4} = \sigma_{T_1 S_1} \sigma_{S_1 S_4} \sigma_{S_4 T_4}$$

und durch Einsetzen erhalten wir

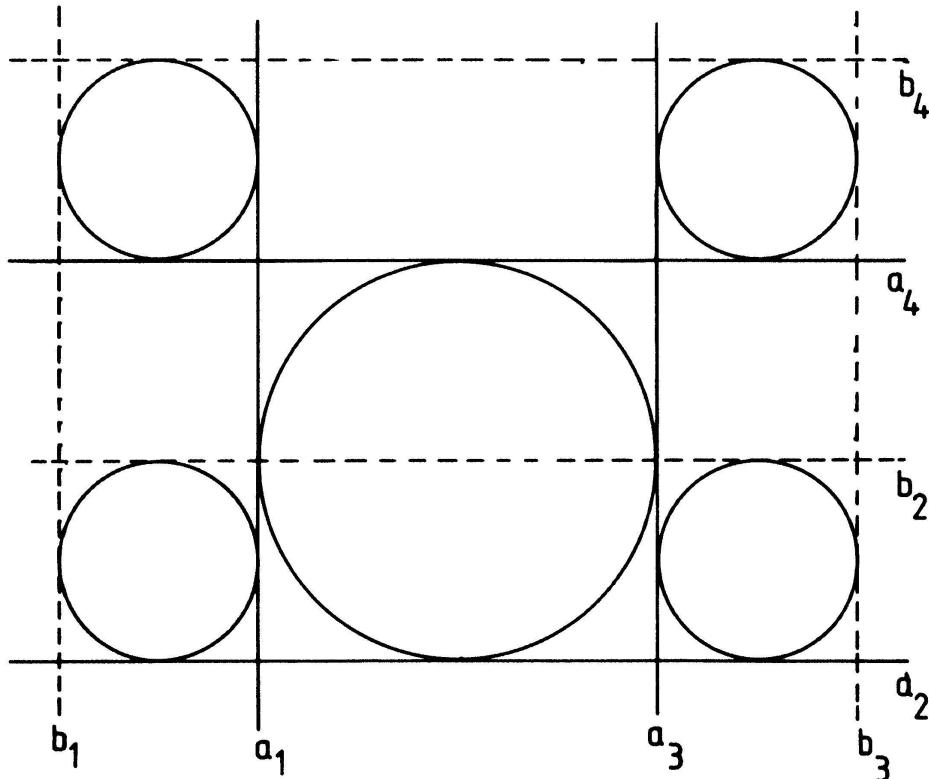
$$\begin{aligned} & \sigma_{T_1 T_2} \sigma_{T_2 T_3} \sigma_{T_3 T_4} \\ & = (\sigma_{T_1 S_1} \sigma_{S_1 S_2} \sigma_{S_2 T_2}) (\sigma_{T_2 S_2} \sigma_{S_2 S_3} \sigma_{S_3 T_3}) (\sigma_{T_3 S_3} \sigma_{S_3 S_4} \sigma_{S_4 T_4}) \\ & = \sigma_{T_1 S_1} \sigma_{S_1 S_2} \sigma_{S_2 S_3} \sigma_{S_3 S_4} \sigma_{S_4 T_4} = \sigma_{T_1 S_1} \sigma_{S_1 S_4} \sigma_{S_4 T_4} = \sigma_{T_1 T_4}. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma inzidieren die Speere  $T_1, T_2, T_3, T_4$  mit einem Zykel.

Figur 6 legt die Vermutung nahe, dass der Schliessungssatz von Miquel möglicherweise auch als Aussage über Tangentenvierseite formuliert werden kann:

Bilden von den acht paarweise verschiedenen Geraden  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$  jeweils die Quadrupel  $a_1, a_2, a_3, a_4; a_1, a_2, b_1, b_2; a_2, a_3, b_2, b_3; a_3, a_4, b_3, b_4; a_4, a_1, b_4, b_1$  ein Tangentenvierseit, so auch das Quadrupel  $b_1, b_2, b_3, b_4$ .

Diese Vermutung ist falsch, wie man sich an Hand von Figur 7 klarmachen kann. Trotz Erfüllung der genannten Voraussetzungen bildet  $b_1, b_2, b_3, b_4$  kein Tangentenvierseit.



Figur 7

Konrad Lang, Math. Institut der Universität, Postfach 3008, Bayreuth

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Benz: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Berlin, Heidelberg, New York 1973.
- 2 K. Lang: Ein einfacher spiegelungsgeometrischer Beweis für den Schliessungssatz von Miquel. Erscheint in den Math. Phys. Sem. Ber.

## Words formed by projections

Let  $p$  and  $q$  be projections in a  $C^*$ -algebra  $A$ . Suppose that  $u$  and  $v$  are two different reduced words each formed by juxtaposition of a finite sequence of  $p$  and  $q$ . Assuming that  $u$  equals  $v$  as elements of  $A$ , the purpose of this note is to show that  $p$  and  $q$  commute. This gives an algebraic proof of the following result which is of interest in quantum probability theory [1, 2]: for any two projections  $p, q$  in a Hilbert space  $H$  the commutation relation  $p q = q p$  is equivalent to  $p q p = q p q$ . There are three possible cases.

**Case 1:**  $(p q)^n = u = v = (p q)^m$  with  $n > m > 0$ . Then  $(p q p)^n = u p = v p = (p q p)^m$  with  $m \neq n$ . It follows that the spectrum of the positive element  $p q p$  must be contained in  $\{0, 1\}$ , i.e.  $p q p$  is a projection. The calculation  $(p q p - q p) * (p q p - q p) = p q p q p - p q p q p - p q p q p + p q p = 0$  shows that  $p q = p q p = q p$ .

**Case 2:**  $(p q)^n = u = v = (p q)^m p$  for some  $m, n > 0$ . If  $m \neq n$ , then  $(p q p)^n = (p q)^n p = u p = v p = (p q)^m p = (p q p)^m$ . If  $m = n$ , then  $(p q)^n = (p q)^n q = u q = v q = (p q)^n p q = (p q)^{n+1}$ . Thus case 2 reduces to case 1.

**Case 3:**  $(p q)^n = u = v = (q p)^m$  for some  $m, n > 0$ . Then  $(p q p)^n = (p q)^n p = u p = v p = (q p)^m p = (q p)^m$  and so  $(p q)^n = (p q p)^n$ . This reduces to case 2.

Jen-chung Chuan, National Tsing Hua University, Hsinschu, Taiwan

## REFERENCES

- 1 P. Mittelstaedt: Philosophische Probleme der modernen Physik. BI-Hochschultaschenbücher, Vol. 50 (1976).
- 2 J.W. Rehder: On the commutativity of two projections. El. Math. 35/5 120–122 (1980).
- 3 S. Sakai:  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras. Springer-Verlag, Berlin 1970.

## Elementarmathematik und Didaktik

### Komplexe Zahlen in der Elementargeometrie

Man kann bekanntlich die gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen in der euklidischen Ebene (Translationen, Drehungen, Streckungen, Dreh-Streckungen) auf prägnante Art mit komplexen Zahlen beschreiben. Die vorliegende Studie möchte auf ein kleines Anwendungsfeld der komplexen Zahlen in diesem Bereich hinweisen und gleichzeitig der Schulmathematik einige Anregungen zuführen. Sie befasst sich mit einem Block von thematisch verwandten geometrischen Problemen in der Absicht, zu diesem Problemkreis einen neuen Zugang freizulegen.