

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 863.** Es sei  $K$  ein nicht notwendig kommutativer Körper, und  $a: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow K$  sei eine  $(m \times n)$ -Matrix über  $K$ . Ist  $r$  der Rechtsspaltenrang von  $a$ , so ist  $r$  bekanntlich auch der Linkszeilenrang von  $a$  (siehe etwa H. Lüneburg, Einführung in die Algebra, Satz V.3.7, S.215). Sind dann  $X \subseteq \{1, \dots, m\}$  und  $Y \subseteq \{1, \dots, n\}$  Mengen der Länge  $r$ , so dass die Zeilen von  $a$  mit Indizes aus  $X$  linkslinear und die Spalten von  $a$  mit Indizes aus  $Y$  rechtslinear unabhängig sind, so gilt für die Einschränkung  $b$  von  $a$  auf  $X \times Y$ , dass ihr Rechtsspaltenrang gleich ihrem Linkszeilenrang gleich  $r$  ist. Ist  $K$  kommutativ, so ist also  $\det(b) \neq 0$ .

H. Lüneburg, Kaiserslautern, BRD

Lösung des Aufgabenstellers.

Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $X = Y = \{1, \dots, r\}$  ist. Es sei  $a_i$  eine Zeile von  $a$ . Dann hängt  $a_i$  linkslinear von  $a_1, \dots, a_r$  ab. Ist  $c_i$  die Einschränkung von  $a_i$  auf  $Y = \{1, \dots, r\}$ , so hängt  $c_i$  also linkslinear von  $c_1, \dots, c_r$  ab. Wegen  $c_i = b_i$  für  $i = 1, \dots, r$  hängt  $c_i$  also linkslinear von  $b_1, \dots, b_r$  ab. Nun sind die Spalten der Matrix  $c$  gerade die  $r$  ersten Spalten von  $a$ . Somit hat  $c$  den Rechtsspaltenrang  $r$  und damit den Linkszeilenrang  $r$  (Lüneburg, loc.cit.). Weil  $b_1, \dots, b_r$ , wie wir gerade sahen, ein Erzeugendensystem des von den Zeilen von  $c$  erzeugten Linksvektorraumes  $L$  ist und dieser Vektorraum den Rang  $r$  hat, ist  $b_1, \dots, b_r$  eine Basis von  $L$ , q. e. d.

**Aufgabe 864.** Im ebenen Dreieck  $ABC$  mit  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$  sowie  $a < b$  seien die beiden durch  $A$  und  $B$  verlaufenden äusseren Winkelhalbierenden gleich lang.

1. Man zeige

$$(1.1) \ a < c < b, \quad (1.2) \ \gamma = \sphericalangle BCA < 60^\circ.$$

2. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei  $P = (a, b)$ . Welche Punktmenge durchläuft der Punkt  $P$  bei festem  $c$  und variablem  $\gamma$ ?

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung:

1. Wegen der bekannten Formeln

$$w'_A = 2\sqrt{bc(s-b)(s-c)} / |b-c| \quad \text{bzw.} \quad w'_B = 2\sqrt{ca(s-c)(s-a)} / |c-a|$$

für die durch  $A$  bzw.  $B$  verlaufende äussere Winkelhalbierende ist  $w'_A = w'_B$  mit

$$c(c-a)(c-b) = ab(a+b-2c) \quad (*)$$

äquivalent, man beachte  $s := (a+b+c)/2$  und  $a < b$ . Wäre nun  $b \leq c$ , so nach  $(*)$

auch  $2c \leq a+b \leq a+c$  entgegen  $a < c$ . Die Annahme  $c \leq a$  führt wegen (\*) auf  $c(a-c)(b-c) = ab(a+b-2c) \geq bc(c-c)$ , also zu  $a \geq b+c$ , was ebenfalls nicht geht. Damit ist (1.1) bewiesen.

Da (\*) auch mit  $c(3ab+c^2) = (ab+c^2)(a+b)$  und (1.1) mit  $(c-a)(b-c) > 0$  äquivalent ist, ist (1.1) gleichbedeutend mit  $(a+b)^2 c > (ab+c^2)(a+b) = c(3ab+c^2)$ , also mit  $a^2+b^2-c^2 > ab$ ; nach dem Kosinussatz ist dies äquivalent zu  $\cos \gamma > 1/2$ , also zu  $0^\circ < \gamma < 60^\circ$ , was (1.2) zeigt.

2. Nun sei  $c > 0$  festgehalten und  $\gamma$  laufe wie soeben angegeben; damit durchläuft  $x := 2 \cos \gamma$  das offene Intervall von 1 bis 2. Gefragt ist also nach den Paaren  $(a, b)$  mit  $0 < a < b$ , die gleichzeitig (\*) und

$$c^2 = a^2 + b^2 - xab, \quad 1 < x < 2 \quad (**)$$

erfüllen. Um dieses Gleichungssystem zu lösen, wird  $u := ab > 0, v := a+b > c$  eingeführt. (\*\*) ist mit  $(2+x)u = v^2 - c^2$  äquivalent und (\*) mit  $c^2(c-v) = u(v-3c)$ . Erfüllen  $u, v$  die Gleichungen (\*), (\*\*), so muss  $v = a+b$  offenbar  $v^2 - 2cv + (x-1)c^2 = 0$  genügen, also muss sein

$$a+b = c(1 + \sqrt{2-x}); \quad (***)$$

wegen  $u = c^2(v-c)/(3c-v)$  muss weiter  $ab = c^2(2-x+2\sqrt{2-x})/(2+x)$  gelten. Dies und (\*\*\*) führen nach elementarer Rechnung zu

$$\left. \begin{array}{l} a/c \\ b/c \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2-x}) \mp \left( \frac{1}{4} (1 + \sqrt{2-x})^2 - \frac{1}{2+x} (2-x+2\sqrt{2-x}) \right)^{1/2},$$

$$1 < x < 2,$$

womit die fragliche Punktmenge  $\mathcal{P}_c$  gefunden ist, allerdings in Parameterdarstellung. Hieraus erkennt man, dass  $\mathcal{P}_c$  bei festem  $c > 0$  nichts anderes als der im vertikalen Halbstreifen  $0 < a < c, c < b$  der  $a, b$ -Ebene verlaufende Teil der algebraischen Kurve (\*) dritten Grades ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Anmerkung der Redaktion: J. T. Groenman (Groningen, NL) weist auf den Artikel von O. Bottema, De driehoek met twee gelijke bissectrices, Euklides 23 (1947), hin.

Weitere Lösungen sandten H. Egli (Zürich, Teillösung), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), W. A. van der Spek (Nordbergum, NL).

**Aufgabe 865.**  $ABC$  sei ein ebenes Dreieck mit Umkreis  $k$ , Feuerbachkreis  $k_F$  und Höhenschnittpunkt  $H$ . Ein Durchmesser  $d$  von  $k$  schneide die Geraden  $BC, CA, AB$  bzw. in  $A', B', C'$ , und  $k_a, k_b, k_c$  seien die über den Strecken  $AA', BB', CC'$  gezeichneten Kreise. Man zeige

1.  $k_a \cap k_b \cap k_c = \{U, V\}$  mit  $U \in k, \quad V \in k_F$ .

2.  $H, U, V$  sind kollinear.

3. Ist  $k \cap UV = \{U, S\}$  und  $s$  die Simsongerade von  $S$  bez.  $ABC$ , so gilt:  $V$  ist Mittelpunkt von  $HS$ ,  $V \in s$  und  $s \perp d$ .

J. T. Groenman, Groningen, NL

D. J. Smeenk, Zaltbommel, NL

**Lösung:**

1. Es seien  $A_1 = AM \cap k$ ,  $B_1 = BM \cap k$ ,  $C_1 = CM \cap k$ . Die Dreiecke  $ABC$  und  $A_1 B_1 C_1$  sind punktsymmetrisch bez.  $M$ , wobei  $M$  der Mittelpunkt von  $k$  ist. Nach [1] schneiden sich die Geraden  $A_1 A'$ ,  $B_1 B'$ ,  $C_1 C'$  in einem Punkt  $U_1$  auf  $k$ . Es sei  $U = k_a \cap k$ . Aus  $\sphericalangle AUA' = \sphericalangle AUA_1 = 90^\circ$  folgt, dass  $U$  auf  $A_1 A'$  liegt, d. h.:  $U \equiv U_1$ .

Es seien  $A_2, B_2, C_2$  die Seitenmitten des Dreiecks  $ABC$ ;  $A_d$  der Fusspunkt von  $A$  auf  $d$  und  $V_1$  das Spiegelbild von  $A_d$  bezüglich  $B_2 C_2$ .  $V_1$  ist der Orthopol von  $d$  bez.  $k$  ([2], 2.29), d. h., dieser Punkt liegt auf  $k_F$ .  $V_1$  liegt aber auch auf  $k_a$ , denn  $k_a$  ist wie  $A_d$  symmetrisch bez.  $B_2 C_2$ . Es ist somit  $V_1 \equiv V$ .

2. Es sei  $A_3$  der Höhenfusspunkt von  $A$  auf  $BC$ ;  $V_2 = UH \cap k_a$ ;  $V_3 = UH \cap k_F$ ;  $A_4 = AH \cap k_F$ ;  $W = UH \cap k_F$ . Bekanntlich gilt:

$$\overline{HA_4} = \overline{A_4 A}, \quad \overline{HW} = \overline{WU}. \quad (1)$$

Der Sekantensatz in  $k_a$  und  $k_F$  liefert:

$$\overline{UH} \cdot \overline{HV_2} = \overline{AH} \cdot \overline{HA_3}, \quad (2)$$

$$\overline{WH} \cdot \overline{HV_3} = \overline{A_4 H} \cdot \overline{HA_3} \quad \text{oder mit (1): } \overline{UH} \cdot \overline{HV_3} = \overline{AH} \cdot \overline{HA_3}. \quad (3)$$

Aus dem Vergleich von (2) und (3) folgt:  $\overline{HV_2} = \overline{HV_3}$ , d. h.  $V_2 \equiv V_3 \equiv V$ . Die Punkte  $U, H, V$  sind somit kollinear.

3. Das Symmetriezentrum der Kreise  $k$  und  $k_F$  ist  $H$ , d. h.  $\overline{HV} = \overline{VS}$ , und bekanntlich ([2], 2.4) geht die Simsongerade von  $S$  bez.  $ABC$  durch die Mitte der Strecke  $HS$ , also durch  $V$ .

Die Simsongerade des Orthopols  $V$  bez.  $A_2 B_2 C_2$  ist  $\parallel d$  ([2], 2.30), d. h., auch die Simsongerade von  $S$  bez.  $A_1 B_1 C_1$  ist  $\parallel d$ .

Das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  ergibt sich aus  $ABC$  durch Halbdrehung um  $M$ . Daher bildet  $s$  mit der zu  $d$  parallelen Simsongeraden von  $S$  bez.  $A_1 B_1 C_1$  einen Winkel von  $180^\circ/2 = 90^\circ$  ([2], Umkehrung von 2.6).

G. Bercea, München, BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Aufgabe 761, 1. Lösung. El. Math 32, 40–41 (1977).
- 2 T. Lalesco: La géométrie du triangle Paris (1937).

Weitere Lösungen sandten J. T. Groenman und G. R. Veldkamp (Groningen, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), W. A. van der Spek (Nordbergum, NL), E. Ungethüm (Wien, A).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Februar 1983* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 882.** Für  $n=2$  und  $n=3$  ermittelte man Lösungen  $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{2n}$  der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n (x_i/y_i) = \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

in Gestalt zyklischer Parameterdarstellungen, d. h.:

$$x_{\sigma(i)} = f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}), \quad y_{\sigma(i)} = g(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}); \quad i = 1, \dots, n$$

für beliebige zyklische Permutationen  $\sigma$  der Indizes  $1, \dots, n$ .

I. Paasche, München, BRD

**Aufgabe 883.** Für komplexe  $z$  mit  $|z| < 1$  ist die Summe

$$\sum_{(m,n)=1} mn z^{m+n} (1+z^{m+n})(1-z^{m+n})^{-3},$$

erstreckt über alle Paare  $(m, n)$  teilerfremder natürlicher Zahlen geschlossen auszuwerten.

M. Bencze, Săcele, Rumänien

**Aufgabe 884.** Für beliebige  $x_{ik} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$  zeige man, dass

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{ik} \right)^2 \right\}^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^m x_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

## Mitteilung

### 5. Internationaler Kongress über Mathematikunterricht («ICME 5»)

Der von der Internationalen Mathematikunterrichts-Kommission organisierte Kongress «ICME 5» findet vom 24. bis 30. August 1984 an der University of Adelaide, Australien, statt.

Adresse für den Bezug von Unterlagen: ICME 5, Wattle Park Teacher's Center, 424 Kensington Road, Wattle Park, South Australia 5066.