

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 4

Artikel: Das Gitterspiel
Autor: Läuchli, Peter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36396>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

the Gaussian symbol. Put $X = \{x_n | n \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{x_{2n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$ and define $f: X \rightarrow X$, $f(x_n) = x_{n+1}$; $g: Y \rightarrow Y$, $g(x_n) = x_{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

X and Y are dense in $[0, 1]$, and for $x \in X$, $y \in Y$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x_1 & 0 \leq x < 1 - x_1 \\ x + x_1 - 1 & 1 - x_1 \leq x < 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$g(y) = f^2(y).$$

We now see that the bijection g is an autohomeomorphism of Y since none of the possible points of non-continuity $(0, 1, 2x_1, 1 - 2x_1)$ of g or g^{-1} lies in Y :

This is evident for $0, 1$, and $2x_1 = x_2$ by construction.

If $1 - 2x_1 \in Y$, say $1 - 2x_1 = x_k$, there would be an $n \in \mathbb{Z}$ with

$$\begin{aligned} x_{-1} &= 1 - x_1 = f(1 - 2x_1) && (\text{since } 0 < 1 - 2x_1 < 1 - x_1) \\ &= f(x_k) = f^{k+2}(x_{-1}) \\ &= x_{-1} + (k+2)x_1 + n && [\text{by } (*)]. \end{aligned}$$

Thus $(k+2)x_1 \in \mathbb{Z}$ which implies $k = -2$, i.e. $x_k \notin Y$, contrary to the assumption. The proposition follows from the fact that Y and Q are homeomorphic [2].

Ulrich Abel, Heidelberg

REFERENCES

- 1 A.S. Besicovitch: A problem on topological transformations of the plane. Fund. Math. 28, 61-65 (1937).
- 2 H. Salzmann: Zahlbereiche II. Vorlesungsausarbeitung, Tübingen 1973.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/040108-02\$1.50 ± 0.20/0

Elementarmathematik und Didaktik

Das Gitterspiel

Einleitung

C. Berge erwähnt in seinen Büchern über Graphentheorie das nachstehend beschriebene Spiel, dessen Idee von Rufus Isaacs stamme. Er gibt aber lediglich die Formel, welche hier als erste in Satz 7 notiert ist, ohne Beweis, an (siehe [1]).

Ich fühlte mich herausgefordert, der Sache etwas nachzugehen, und skizziere nun im folgenden meine Überlegungen. Herrn H. Imhof verdanke ich den Hinweis auf die wunderschöne Arbeit von K. Jacobs [2].

Es sei auch bemerkt, dass das «Gitterspiel» ein instruktives Beispiel für ein Dialogprogramm auf einem Kleincomputer abgibt.

Problemstellung

Die Menge der Spielsituationen des Gitterspiels besteht aus allen Punkten der Ebene mit ganzzahligen nichtnegativen Koordinaten («Gaußsche natürliche Zahlen»). Ein Punkt P heiße von Punkt Q aus «erreichbar», wenn er in derselben Zeile links, in derselben Kolonne unterhalb oder auf derselben Diagonale links-unterhalb von Q liegt. Das Spiel beginnt in einem beliebigen Startpunkt. Jeder der beiden Spieler zieht abwechselungsweise in einen erreichbaren Nachfolgerpunkt. Wer den letzten Zug machen kann, gewinnt. Um eine Gewinnstrategie anschaulich zu beschreiben, denken wir uns jeden Gitterpunkt entweder weiss oder schwarz gefärbt, und zwar derart, dass ein Punkt schwarz ist, wenn von ihm aus kein schwarzer Punkt erreichbar ist. Man überlegt sich leicht:

- Die Färbung ist eindeutig (Rekursion z. B. zeilenweise).
- Die Färbung ist symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale $y = x$.
- In jeder Zeile, Kolonne, Diagonale liegt höchstens ein schwarzer Punkt.

Wer nun in einem weissen Punkt zum Zuge kommt, besitzt eine Gewinnstrategie: Von jedem weissen Punkt aus existiert ein Zug in einen schwarzen Punkt; der Gegner muss dann, falls er überhaupt noch einen Zug hat, in einen weissen Punkt ziehen. (Die Menge der schwarzen Punkte erzeugt, in der Terminologie der Graphentheorie, einen Kern.)

In dieser Mitteilung befassen wir uns nun vor allem mit der Verteilung der schwarzen Punkte im Gitter.

Die Verteilung der schwarzen Punkte

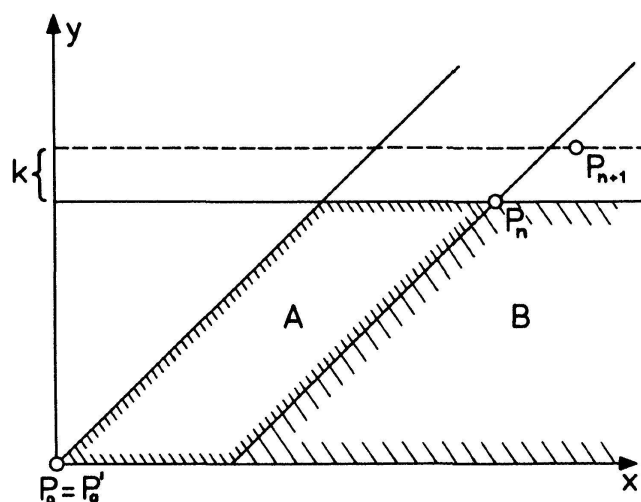
Seien $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots$ die schwarzen Punkte unterhalb, $P'_i = \langle x'_i, y'_i \rangle$ die entsprechenden oberhalb der Hauptdiagonale; also $x'_i = y_i$, $y'_i = x_i$. Ferner sei $P_0 = P'_0 = \langle 0, 0 \rangle$. Die Numerierung der P_i wählen wir so, dass der Index mit dem Abstand von der Hauptdiagonale wächst. Dann gilt zunächst einmal

Satz 1. *Die folgenden Aussagen gelten für alle n :*

1. Für $i \leq n$ wachsen die x_i, y_i monoton.
2. $x_n - y_n = n$.
3. $y_n \geq n$.
4. In A (siehe Abb. 1) ist jede Diagonale durch einen schwarzen Punkt besetzt.
5. In jeder Zeile unterhalb P_n liegt ein schwarzer Punkt.
6. Im Innern von B liegt kein schwarzer Punkt.

Beweis durch Induktion nach n . Für den Induktionsschritt sei die Zeile mit Nummer $(y_n + k)$ die erste oberhalb P_n , in welcher kein schwarzer Punkt oberhalb der Hauptdiagonale liegt. Dann ist $P_{n+1} = \langle x_n + k + 1, y_n + k \rangle$. Es gilt $k < n$, denn z. B. in der Zeile $y_n + n - 1$ liegt sicher kein schwarzer Punkt oberhalb der Hauptdiagonale. Alle Aussagen des Satzes ergeben sich jetzt sehr leicht.

Aus Satz 1 folgt also, dass in jeder Zeile, Kolonne, Diagonale genau ein schwarzer Punkt liegt, oder: dass für $n > 0$ in der n -ten Zeile ein P_i liegt, wenn die n -te Kolonne kein P_j enthält. Da aber nach jeder (durch ein P_i) besetzten Kolonne eine unbesetzte folgt, kommt somit nach jeder unbesetzten Zeile eine besetzte. Also kann

Abb. 1. Die Situation für einen allgemeinen Punkt P_n .

das im Beweis von Satz 1 eingeführte k nur den Wert 1 oder 2 annehmen. Formuliert als

Satz 2. *Beim Schritt von P_n zu P_{n+1} wächst x_n um 2, y_n um 1 oder x_n um 3, y_n um 2.*

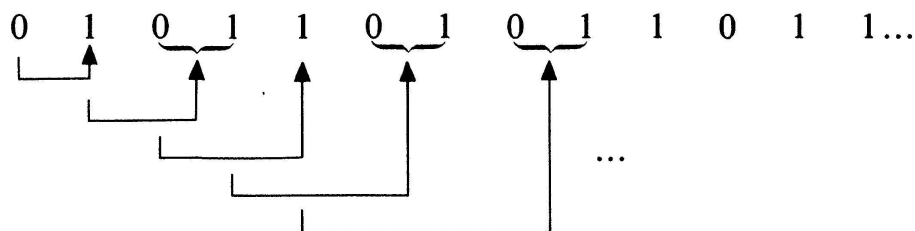
Damit erhebt sich die natürliche Frage nach der Verteilung von kleinen und grossen Schritten. Wir ordnen, bei P_0 beginnend, jedem kleinen Schritt eine 0, jedem grossen eine 1 zu. So erhalten wir die Folge

$F = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \dots)$.

Aufgrund der vorherigen Bemerkungen findet man für F das folgende *Bildungsgesetz*:

Schreibe eine 0. Beginne die Folge sogleich wieder zu lesen und schreibe für jede gelesene 0 am Ende eine 1, für eine gelesene 1 jedoch 01 hin.

Also:



(Veranschaulichung durch einen Automaten, bei dem ein Band nacheinander bei einem Schreib- und einem Lesekopf vorbeiläuft. Dabei wird die dazwischen herabhängende Schleife immer länger.)

Aus dem Bildungsgesetz ergibt sich sofort

Satz 3. *In F folgen nie 2 Nullen und nie mehr als 2 Einsen aufeinander.*

Der Beweis der ersten Behauptung ist trivial, die zweite folgt aus der ersten, da zur Erzeugung von 3 aufeinanderfolgenden Einsen mindestens 2 aufeinanderfolgende Nullen benötigt würden.

Der Beweis des folgenden Satzes sei dem Leser überlassen:

Satz 4. Wenn man in F 0 durch 01, 1 durch 011 ersetzt, erhält man wieder F .

Ferner gilt

Satz 5. F ist nicht periodisch.

Dies lässt sich unabhängig von Satz 4 einsehen: Sei F (schliesslich) periodisch, die Teilsequenz V eine kürzeste Periode; V produziere nach dem oben erwähnten Bildungsgesetz W . V kann weder nur Nullen noch nur Einsen enthalten. Also gilt für die Längen: $|V| < |W| < 2 \cdot |V|$. Da W auch eine Periode sein müsste, ergibt sich daraus der Widerspruch.

Bemerkung: F ist im Sinne von Jacobs fastperiodisch, gehört aber nicht zur Klasse der in [2] untersuchten Folgen.

Wir benützen im folgenden die Bezeichnungen:

$F = (d_1, d_2, d_3, \dots)$

a_n = Anzahl Nullen im Anfangsstück (d_1, \dots, d_n)

b_n = Anzahl Einsen im Anfangsstück (d_1, \dots, d_n)

q = Quotient des goldenen Schnittes $= (\sqrt{5} - 1) / 2 = 1 / (1 + q)$; also $q + q^2 = 1$.

Aus Satz 4 liest man ab: $b_2 = 1, b_5 = 3, b_{13} = 8, b_{34} = 21, \dots$

Es gilt aber sogar allgemein

Satz 6. $b_n = \lfloor n \cdot q \rfloor$.

(Mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnen wir die grösste ganze Zahl, die x nicht übertrifft.)

Beweis: Das Anfangsstück (d_1, \dots, d_n) produziere die Teilsequenz $(d_2, \dots, d_{n'})$. Aus dem Bildungsgesetz folgt

$$a_{n'} = 1 + b_n, \quad b_{n'} = n.$$

Also $n' = a_{n'} + b_{n'} = 1 + n + b_n$. Die Aussage des Satzes sei richtig für n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} n' &= 1 + n + b_n < 1 + n + nq < n' + 1 \\ n'q &< q + n < n'q + q \\ (n' - 1)q &< n < n'q, \end{aligned}$$

d. h. $b_{n'} = n = \lfloor n'q \rfloor$. Ferner ist

$$n - 1 < (n' - 1)q < n,$$

und da $d_{n'} = 1 : b_{n'-1} = n - 1 = \lfloor (n' - 1)q \rfloor$.

Wenn also die Behauptung des Satzes gilt für n , dann auch für $n' - 1$ und n' . Damit lässt sich der Induktionsbeweis sauber durchführen, wenn man noch beachtet, dass n' nur in Schritten von 1 oder 2 zunimmt.

Aufgrund der bisherigen Resultate können nun die schwarzen Gitterpunkte genau lokalisiert werden:

Satz 7. $x_n = \lfloor n \cdot (2 + q) \rfloor = \lfloor n \cdot (3 + \sqrt{5}) / 2 \rfloor$, $y_n = \lfloor n \cdot (1 + q) \rfloor = \lfloor n \cdot (1 + \sqrt{5}) / 2 \rfloor$.

Zum Beweis benötigen wir Satz 2 und Satz 6 sowie, dass $a_n + b_n = n$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_n &= 2a_n + 3b_n = 2n + b_n = \lfloor n \cdot (2 + q) \rfloor, \\ y_n &= a_n + 2b_n = n + b_n = \lfloor n \cdot (1 + q) \rfloor. \end{aligned}$$

Wegen $(1 + q)/(2 + q) = q$ ist jetzt auch klar, dass die P_n in der Nähe der Geraden $y = q \cdot x$ liegen. Genauer:

Satz 8. $y_n = \lfloor x_n \cdot q \rfloor$.

Beweis: $x_n/y_n = (2n + b_n)/(n + b_n) = 1 + n/(n + b_n) = 1 + 1/(1 + b_n/n) > 1 + 1/(1 + q) = 1/q$, also $y_n < x_n \cdot q$.

Ferner ist $x_n < n \cdot (2 + q)$, also $x_n \cdot q < n \cdot (1 + q)$. Aus $y_n < x_n \cdot q < n \cdot (1 + q)$ folgt die Behauptung.

Die Durchführung des Spiels

Um schliesslich die eingangs beschriebene Gewinnstrategie anwenden zu können, muss man zu einem beliebigen weissen Punkt Q herausfinden, ob ein schwarzer Punkt links, unterhalb oder diagonal links-unterhalb Q liegt. Mit Satz 1 (2) erhält man sofort den schwarzen Punkt in der Diagonale von Q . Ist dieser unbrauchbar, da rechts-obenhalb liegend, fragt man weiter nach dem schwarzen Punkt in der Zeile bzw. Kolonne von Q . Dazu benötigt man die Entscheidung, ob eine natürliche Zahl z ein x_n oder ein y_n ist. Nach Satz 7 ist aber sofort einzusehen, dass z ein x_n ist, wenn zwischen $z/(2 + q)$ und $(z + 1)/(2 + q)$ eine ganze Zahl liegt. Mit diesen Überlegungen lässt sich die Gewinnstrategie sehr leicht programmieren.

Peter Läuchli, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Berge, C.: The Theory of Graphs and its Applications. Methuen, London 1962.
- 2 Jacobs, K.: Maschinengenerierte 0-1-Folgen. Selecta Mathematica I, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 49, Springer, Heidelberg 1969.