

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Historical remarks: Most of the above results were known to nineteenth century mathematicians, although obtained by various quite different methods (see Dickson [3], chap. VII). M. A. Stern (J. Math. 6, 147–153, 1830) proved that, if $p=2q+1$ and q are odd primes, 2 or -2 is a primitive root of p according as $p=8n+3$ or $8n+7$ (see corollary 2.2). If $p=4q+1$ and q are primes, 2 and -2 are primitive roots of p (see corollary 3.1). F.J. Richelot (J. Math. 9, 5, 1832) proved that, if $p=2^m+1$ is a prime, every quadratic nonresidue (in particular, 3) is a primitive root of p (see corollaries 1.1, 1.2). Nearly the same results were given by P. L. Tchebychef [‘Theory of congruences’ (in Russian), 1849]. G. Wertheim (Acta Math. 17, 315–320, 1893) proved that any prime $2^{4n}+1$ has the primitive root 7 (see corollary 1.3). If $p=2^n \cdot q+1$ is a prime and q is an odd prime, any quadratic nonresidue a of p is a primitive root of p if $a^{2^n}-1$ is not divisible by p (see lemma 3). These and other nice results on primitive roots can be derived from theorems 1–4 as corollaries (see for example in [3], p. 192, what V. Bouniakowsky proved or loc. cit., p. 199, the result of A. Cunningham).

A. Ecker,
Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung Berlin GmbH

REFERENCES

- 1 J. Agnew: Explorations in number theory. Wadsworth, Belmont 1972.
- 2 J.D. Baum: A note on primitive roots. Math. Mag. 38, 12–14 (1965).
- 3 L.E. Dickson: History of the theory of numbers, vol. I. Chelsea, New York 1971.
- 4 W.J. Le Veque: Topics in number theory, vol. I. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1956.
- 5 E. Trost: Primzahlen. Birkhäuser, Basel 1953.
- 6 A. Wilansky: Primitive roots without quadratic reciprocity. Math. Mag. 49, 146 (1976).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/040103-06\$1.50±0.20/0

Kleine Mitteilungen

A homeomorphism of \mathbb{Q} with \mathbb{Q} as an orbit

The following result can be deduced from a theorem proved by Besicovitch [1] in which an autohomeomorphism h of the real plane is constructed such that for some $x \in \mathbb{R}^2$

$$\{h^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ is dense in } \mathbb{R}^2.$$

We give a direct proof for the consequence.

Proposition. *There exists an autohomeomorphism h of \mathbb{Q} with*

$$\{h^n(1) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}.$$

Proof: Let $x_1 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ with $2x_1 < 1$ and, for $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = nx_1 - [nx_1]$, [] designating

the Gaussian symbol. Put $X = \{x_n | n \in \mathbf{Z}\}$, $Y = \{x_{2n+1} | n \in \mathbf{Z}\}$ and define $f: X \rightarrow X$, $f(x_n) = x_{n+1}$; $g: Y \rightarrow Y$, $g(x_n) = x_{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}$).

X and Y are dense in $[0, 1]$, and for $x \in X$, $y \in Y$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x_1 & 0 \leq x < 1 - x_1 \\ x + x_1 - 1 & 1 - x_1 \leq x < 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$g(y) = f^2(y).$$

We now see that the bijection g is an autohomeomorphism of Y since none of the possible points of non-continuity $(0, 1, 2x_1, 1 - 2x_1)$ of g or g^{-1} lies in Y :

This is evident for $0, 1$, and $2x_1 = x_2$ by construction.

If $1 - 2x_1 \in Y$, say $1 - 2x_1 = x_k$, there would be an $n \in \mathbf{Z}$ with

$$\begin{aligned} x_{-1} &= 1 - x_1 = f(1 - 2x_1) && \text{(since } 0 < 1 - 2x_1 < 1 - x_1) \\ &= f(x_k) = f^{k+2}(x_{-1}) \\ &= x_{-1} + (k+2)x_1 + n && \text{[by (*)].} \end{aligned}$$

Thus $(k+2)x_1 \in \mathbf{Z}$ which implies $k = -2$, i.e. $x_k \notin Y$, contrary to the assumption. The proposition follows from the fact that Y and \mathbf{Q} are homeomorphic [2].

Ulrich Abel, Heidelberg

REFERENCES

- 1 A.S. Besicovitch: A problem on topological transformations of the plane. *Fund. Math.* 28, 61-65 (1937).
- 2 H. Salzmann: *Zahlbereiche II. Vorlesungsausarbeitung*, Tübingen 1973.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/040108-02\$1.50 ± 0.20/0

Elementarmathematik und Didaktik

Das Gitterspiel

Einleitung

C. Berge erwähnt in seinen Büchern über Graphentheorie das nachstehend beschriebene Spiel, dessen Idee von Rufus Isaacs stamme. Er gibt aber lediglich die Formel, welche hier als erste in Satz 7 notiert ist, ohne Beweis, an (siehe [1]).

Ich fühlte mich herausgefordert, der Sache etwas nachzugehen, und skizziere nun im folgenden meine Überlegungen. Herrn H. Imhof verdanke ich den Hinweis auf die wunderschöne Arbeit von K. Jacobs [2].

Es sei auch bemerkt, dass das «Gitterspiel» ein instruktives Beispiel für ein Dialogprogramm auf einem Kleincomputer abgibt.