

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Kipp-Ikosaeder. II  
**Autor:** Wunderlich, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36393>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ein typisches Beispiel ist  $g(x) = \log x$  mit  $x > e$ :

$$\left( \log \prod_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n(n-1) \left( \log \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^2 + \sum_{i=1}^n (\log x_i)^2.$$

Man kann sich überzeugen, dass diese Ungleichung für  $x_i > e$  die arithmetisch-geometrische Ungleichung verschärft.

Die Verallgemeinerung dieser Konstruktion von 2-Auswahlen auf  $k$ -Auswahlen liegt auf der Hand und führt z. B. für die Gammafunktion zu

$$\sum_{k\text{-Auswahlen aus } n} \Gamma(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot \Gamma(x_{i_k}) \geq \binom{n}{k} \cdot \left( \Gamma \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^k.$$

Interessanter sind Funktionen wie  $g(x) = x/(1-x)$  in Nr. 5, die zwar konvex, aber nicht logarithmisch konvex sind. Zur Anwendung des Satzes benötigt man daher eine zusätzliche Bedingung; im Beispiel war dies  $\hat{x} \geq 1/n$ .

H. Wellstein, Flensburg, BRD

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. Rényi: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1962.
- 2 G. Pólya und G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 1, 3. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964.
- 3 S. Gabler: Aufgabe 830, in: El. Math. 34, 126 (1979).

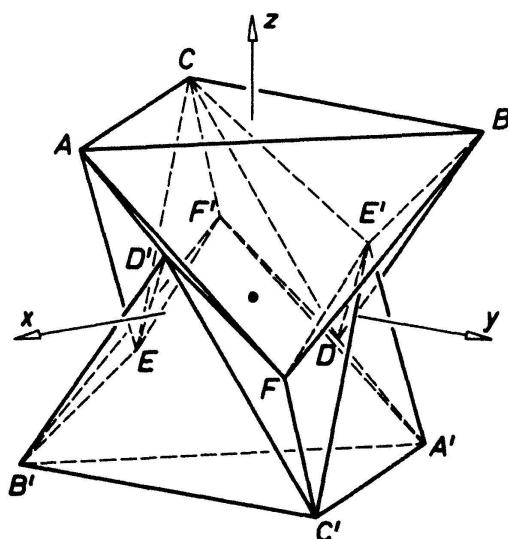
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/030079-06\$1.50+0.20/0

## Kipp-Ikosaeder II<sup>1</sup>)

### II. Ikosaeder mit dreizähliger Symmetriearchse

5. Betrachtet werden jetzt Ikosaeder mit Mittelpunkt, welche die  $120^\circ$ -Drehungen um die  $z$ -Achse vertragen und deren Aussehen an eine Sanduhr erinnert (Fig. 4).



Figur 4. Wackelikosaeder mit dreizähliger Symmetriearchse.

1) Kipp-Ikosaeder I erschien in El. Math. 36, 153–158 (1981).

Die zwölf Ecken verteilen sich auf vier gleichseitige Dreiecke  $ABC$ ,  $A'B'C'$  und  $DEF$ ,  $D'E'F'$  in parallelen Ebenen  $z=\pm p$  und  $z=\mp q$  ( $p>q>0$ ); unter Verwendung der Umkreisradien  $m$  bzw.  $n$  ( $m>n>0$ ) können die Ecken angesetzt werden mit

$$\begin{aligned} A(m, 0, p), \quad B\left(-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\sqrt{3}, p\right), \quad C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\sqrt{3}, p\right); \\ D(-n, 0, -q), \quad E\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\sqrt{3}, -q\right), \quad F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\sqrt{3}, -q\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Für die restlichen sind jeweils die Vorzeichen umzukehren. Die Anordnung der Kanten folgt dem gleichen Schema wie in Teil I (vgl. auch Fig. 6).

Wird die Kantenlänge  $AB=a$  vorgegeben, so ist  $m$  wegen  $3m^2=a^2$  bekannt. Schreibt man auch noch die übrigen Kantenlängen durch  $AF=b$ ,  $AD'=c$  und  $D'E=d$  vor, dann hat man für die fehlenden Formparameter  $n$ ,  $p$  und  $q$  die Bestimmungsgleichungen

$$m^2 - mn + n^2 + (p+q)^2 = b^2, \quad (m-n)^2 + (p-q)^2 = c^2, \quad n^2 + 4q^2 = d^2. \quad (5.2)$$

Hieraus folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4p^2 &= 2b^2 + 2c^2 - d^2 - 4m^2 + 6mn - 3n^2, \\ 4q^2 &= d^2 - n^2, \\ 4pq &= b^2 - c^2 - mn. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nach der leicht zu bewerkstelligenden Elimination von  $p$  und  $q$  gelangt man zu einer *Gleichung 4. Grades* für  $n$ . Die Substitution

$$n = (m/2) + t \quad (5.4)$$

bringt das kubische Glied zum Verschwinden, und die Formbestimmung des Ikosaeders verlangt die Auflösung der Gleichung

$$\begin{aligned} t^4 - \frac{2}{3} \left( b^2 + c^2 + d^2 + \frac{3}{4} m^2 \right) t^2 - \frac{4}{3} (c^2 - d^2) mt + K &= 0 \quad \text{mit} \\ K &= \frac{m^4}{16} + \frac{m^2}{6} (b^2 - 3c^2 - 3d^2) + \frac{d^2}{3} (2b^2 + 2c^2 - d^2) - \frac{1}{3} (b^2 - c^2)^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Zwecks Vereinfachung sei nun die *einschränkende Voraussetzung*  $c=d$  getroffen, die übrigens auch bei den einschlägigen Wackelikosaedern in [5] erfüllt ist. Dadurch reduziert sich die Gleichung (5.5) auf

$$\begin{aligned} t^4 - Pt^2 + Q &= 0 \quad \text{mit} \\ P &= \frac{m^2}{2} + \frac{2}{3} (b^2 + 2c^2), \quad Q = \left( \frac{m^2}{4} - \frac{b^2}{3} \right) \left( \frac{m^2}{4} + b^2 - 4c^2 \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Grundsätzlich sind demnach vier Positionen eines solchen Sanduhr-Ikosaeders zu erwarten, die natürlich nicht durchwegs reell zu sein brauchen.

Ein *Wackelikosaeder* liegt vor, wenn die Schlüsselgleichung (6.1) eine Doppelwurzel aufweist. Dies wäre einmal bei verschwindender Diskriminante

$$\Delta = P^2 - 4Q = \frac{16}{9} [3m^2c^2 + (b^2 - c^2)^2] \quad (6.2)$$

der Fall, was aber wegen  $mc \neq 0$  ausgeschlossen ist. Die zweite Möglichkeit besteht mit  $t=0$ , die für  $Q=0$  eintritt und zufolge (5.4)  $m=2n$  bedingt.  $Q$  verschwindet gemäß (6.1) entweder für  $4b^2=3m^2$ , was jedoch wegen (5.2)  $p+q=0$  nach sich ziehen und im Hinblick auf (5.1) starke Ausartungen bewirken würde. Es bleibt demnach nur mehr die Annahme

$$m^2 = 4(4c^2 - b^2), \quad (6.3)$$

die durchaus realisierbar ist. Die Gleichungen (5.2) reduzieren sich damit auf

$$\frac{1}{4}(p+q)^2 = (p-q)^2 = 4q^2 = b^2 - 3c^2. \quad (6.4)$$

So erhält man für das Wackelikosaeder mit den vorgelegten Kantenlängen  $b$  und  $c=d$  die seine Gestalt gemäß (5.1) festlegenden Formparameter

$$m = 2n = 2\sqrt{4c^2 - b^2}, \quad p = 3q = \frac{3}{2}\sqrt{b^2 - 3c^2}, \quad (6.5)$$

was die Einhaltung der Bedingungen  $c\sqrt{3} < b < 2c$  verlangt. – Figur 4 zeigt das zum Mittelwert  $b^2/c^2 = 7/2$  gehörige Exemplar.

7. In der Folge sollen nun jene der Vereinbarung  $c=d$  genügenden *Kipp-Ikosaeder* untersucht werden, bei welchen das Umspringen durch den mit (6.1) verträglichen Übergang von  $t>0$  zu  $\bar{t}=-t$  erfolgt. Zur besseren Übersicht mag die *Normierung*  $m=1$  vorgenommen werden, was  $a=\sqrt{3}$  bedeutet. Die Ausgangsgleichungen (5.2) lauten dann mit Beachtung von (5.4):

$$(p+q)^2 + t^2 + \frac{3}{4} = b^2, \quad (p-q)^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} = 4q^2 + t^2 + t + \frac{1}{4} = c^2. \quad (7.1)$$

Massgebend ist demnach die Beziehung

$$2t = (p-q)^2 - 4q^2 = (p+q)(p-3q). \quad (7.2)$$

Der genannte Übergang von  $t$  zu  $\bar{t}=-t$  zieht also gemäß (5.4) die Änderung von  $n=(1/2)+t$  auf  $\bar{n}=(1/2)-t$  nach sich; um Selbstüberschneidungen des Ikosaeders zu vermeiden, wird man daher  $0 \leq t \leq 1/2$  verlangen.

Für die neuen Koten  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  gelten zufolge (7.1) und (7.2) die Abhängigkeiten

$$\bar{p} + \bar{q} = \pm(p + q), \quad \bar{p} - 3\bar{q} = \mp(p - 3q), \quad (7.3)$$

wobei nur das obere Vorzeichen berücksichtigt zu werden braucht. Dies bedeutet

$$\bar{p} = (p + 3q)/2, \quad \bar{q} = (p - q)/2. \quad (7.4)$$

Um den Überblick und damit die Annahme brauchbarer Daten zu erleichtern, empfiehlt sich mit Rücksicht auf (7.3) die Einführung der neuen Parameter

$$u = p + q, \quad v = p - 3q. \quad (7.5)$$

Die Schlüsselgleichung (7.2) vereinfacht sich dadurch auf

$$2t = uv, \quad (7.6)$$

und die ursprünglichen Parameter werden ausgedrückt durch

$$n = (1 + uv)/2, \quad p = (3u + v)/4, \quad q = (u - v)/4. \quad (7.7)$$

Der Kippvorgang wird durch Vorzeichenwechsel bei  $v$  erfasst.

8. Zur Wahl von brauchbaren Werten für die vorgesehenen Parameter  $u$  und  $v$  mag man sich der in Figur 5 wiedergegebenen *Kurventafel* bedienen. Sie enthält im  $(u, v)$ -Netz der Parameterebene die zufolge (7.7) geradlinigen Niveaulinien  $p = \text{const}$  und  $q = \text{const}$ , ferner die (gleichseitigen) Schichtenhyperbeln  $t = \text{const}$ .

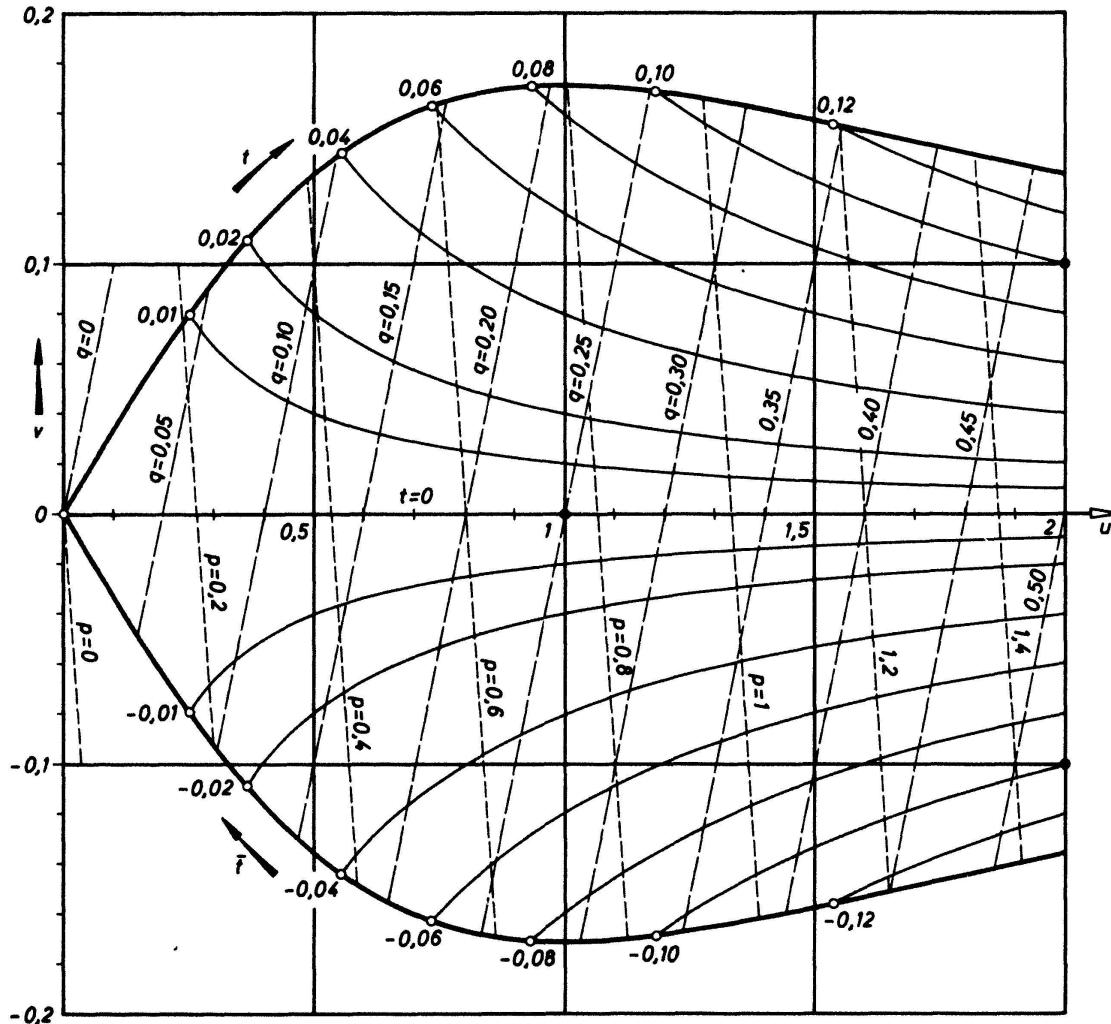
Damit der Kippvorgang nicht behindert wird, darf hierbei der Flächenwinkel längs der Hohlkante  $D'F$  nicht durch Null gehen. Dies verlangt, dass der kritische, in der Ebene  $x = y\sqrt{3}$  befindliche Zwischenpunkt  $Z$  der Kante  $AF$  (Fig. 6) auch in der zweiten Position eine nichtnegative Höhenkote  $z$  hat. Dieser Punkt teilt in der Ausgangslage, wie aus dem Bildtrapez des Vierecks  $AD'FC'$  im Grundriss abzulesen ist, die Kante  $AF$  im Verhältnis  $AZ:FZ = -m:n = -1:n$  und hat daher die Kote

$$z = \frac{np - q}{1 + n} = \frac{uv(3u + v) + u + 3v}{4(uv + 3)}, \quad (8.1)$$

die wegen  $u > 0, v > 0$  stets positiv ist. In der Endform ergibt sich hingegen (aufgrund des Vorzeichenwechsels von  $v$ ) der Kotenwert

$$\bar{z} = \frac{uv(3u - v) - u + 3v}{4(uv - 3)}, \quad (8.2)$$

der durchaus negativ werden könnte. Die dies ausschliessende Forderung  $\bar{z} \geq 0$  schränkt daher die Wahl des Diagrammpunktes  $(u, v)$  auf ein gewisses Gebiet ein, das von der in Figur 5 eingetragenen *Grenzkubik*  $\bar{z} = 0$  berandet wird und natürlich die den Wackelformen  $v = 0$  entsprechende  $u$ -Achse enthalten muss.



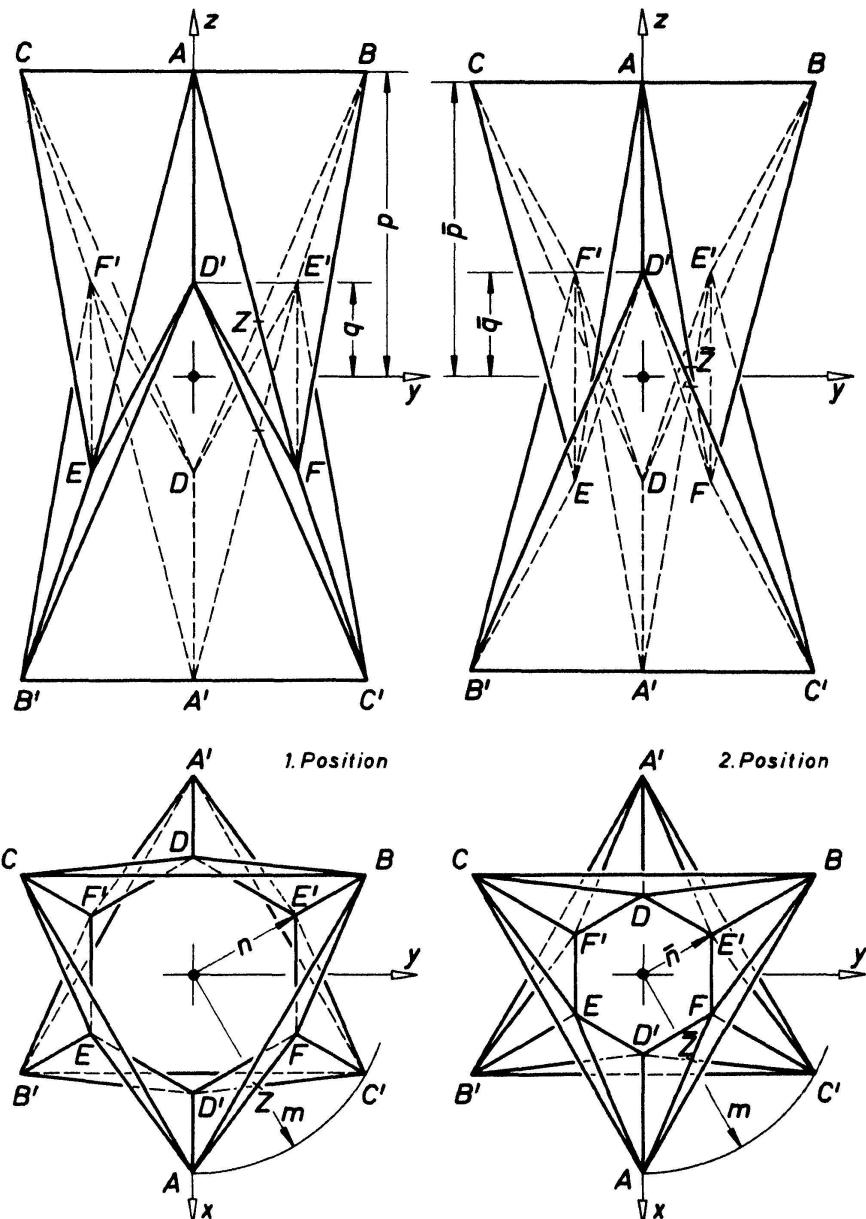
Figur 5. Kurventafel.

Durch diese Bedingung wird die in Abschnitt 7 festgestellte Schranke  $t \leq 1/2$  weiter herabgedrückt: damit nämlich die Schichtenhyperbel  $uv = 2t = \text{const}$  die Grenzkubik  $uv(3u - v) = u - 3v$  reell schneidet und ins Innere des zulässigen Bereichs gelangt, muss sogar  $t < 1/6$  sein, wie aus der Parameterdarstellung der Grenzkubik

$$u = \sqrt{\frac{2t(3-2t)}{1-6t}}, \quad v = \sqrt{\frac{2t(1-6t)}{3-2t}} \quad (8.3)$$

hervorgeht. – Die Grenzkubik kennzeichnet nebenbei gleichzeitig jene Ausgangsformen des Sanduhr-Ikosaeders, bei welchen die längs  $AD'$  und den analogen Kanten auftretenden Flächenwinkel zu gestreckten werden. In der Endform hingegen klappen die Flächenwinkel längs der Kanten des Sechsecks  $DE'FD'EF'$  auf Null zusammen.

Abschliessend sei der Gebrauch der Netztafel an einem Beispiel erläutert. Man wähle im zulässigen Bereich einen beliebigen Punkt  $(u, v)$ , etwa  $u = 2, v = 0,1$ ; hierzu liest man im Einklang mit (7.6)  $t = 0,1$  ab, was gemäss (7.7) die Werte  $n = 0,6, p = 1,525$  und  $q = 0,475$  liefert. Macht man noch die Normierung  $m = 1$  rückgängig, so lauten die einfachsten Werte für die Formparameter der Ausgangsposition:  $m = 40, n = 24, p = 61, q = 19$ . Für die Endform (die im unteren Teil



Figur 6. Kipp-Ikosaeder vom Sanduhr-Typ.

der Tafel bei  $u=2$ ,  $v=-0,1$  erfasst wird) hat man hingegen:  $m=40$ ,  $\bar{n}=16$ ,  $\bar{p}=59$ ,  $\bar{q}=21$ . Die zur Herstellung des in Figur 6 dargestellten Modells benötigten Kantenlängen sind aus (5.2) zu entnehmen:  $a=m\sqrt{3}=69,28$ ,  $b=87,27$ ,  $c=d=44,94$ . – Das Wackelikosaeder von Figur 4 gehört zum Ablesepunkt  $u=1$ ,  $v=0$ ; seine Formparameter verhalten sich wie  $m:n:p:q=4:2:3:1$ , die Kantenlängen wie  $a:b:c=2\sqrt{3}:\sqrt{7}:\sqrt{2}$ .

W. Wunderlich, Wien