

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Iterierte arithmetische Mittelung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Ungleichung  
**Autor:** Wellstein, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36392>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Iterierte arithmetische Mittelung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Ungleichung

## 1. Iterierte arithmetische Mittelung

Die Bildung des arithmetischen Mittels  $(x_1 + x_2)/2$  der reellen Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  kann als Austausch der Hälften  $x_1/2$  und  $x_2/2$  aufgefasst werden. Dieser Prozess, auf mehr als zwei Zahlen übertragen, führt zwar nicht unmittelbar, aber doch in der Grenze zum entsprechenden Ergebnis.

Ausgehend vom Verteilungsvektor  $(x_1, \dots, x_n)$  bildet man der Reihe nach durch Mitteln der Koordinaten 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, ... die Vektoren

$$(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1/2 + x_2/2, x_1/2 + x_2/2, x_3, \dots, x_n), \\ (x_1/2 + x_2/2, x_1/4 + x_2/4 + x_3/2, x_1/4 + x_2/4 + x_3/2, x_4, \dots, x_n)$$

usw., bis nach  $n-1$  Schritten alle Koordinaten erfasst sind. Eine günstige Darstellung gelingt mit Hilfe der  $(n, n)$ -Matrizen

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 2 & & \\ & & 1 & 1 & \dots \\ & & 1 & 1 & \\ 0 & & & & 2 & \ddots & 2 \\ & & \vdots & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \quad \textcircled{i}$$

als Folge  $(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)A_1, (x_1, \dots, x_n)A_1A_2, \dots, (x_1, \dots, x_n)\prod_{i=1}^{n-1} A_i$ .

Die Matrix  $A := \prod_{i=1}^{n-1} A_i$  ist als Produkt doppelt-stochastischer Matrizen selbst doppelt-stochastisch. Nach Konstruktion besteht ihre letzte Spalte aus positiven Zahlen, denn die  $n$ -te Koordinate des Vektors  $(x_1, \dots, x_n)A$  ist

$$2^{1-n}x_1 + 2^{1-n}x_2 + 2^{2-n}x_3 + \dots + 2^{-2}x_{n-1} + 2^{-1}x_n.$$

Nach dem Ergodensatz ([1], S.395) existiert dann die Grenzmatrix  $M := \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ .

Ihre Zeilen stimmen, wieder nach diesem Satz, miteinander überein. Da zudem die Spalten die Summen 1 haben, ist

$$M = \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Folge  $(x_1, \dots, x_n)A^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  konvergiert daher ebenfalls, und zwar,  $\bar{x} = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n x_i$  gesetzt, gegen die Gleichverteilung  $(x_1, \dots, x_n)M = (\bar{x}, \dots, \bar{x})$ .

## 2. Verallgemeinerung

Gegeben seien positive Zahlen  $p_1, \dots, p_n$ . Zur Abkürzung wird  $q_i = p_i/(p_i + p_{i+1})$ ,  $q'_i = p_{i+1}/(p_i + p_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , gesetzt. Aus den doppelt-stochastischen Matrizen

$$P_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & q_i & q'_i & \dots \\ & & & q'_i & q_i & \dots \\ 0 & & & & & 1 & \ddots & \ddots & 1 \end{pmatrix} \quad (i)$$

wird die Matrix  $P := \prod_{i=1}^{n-1} P_i$  gebildet. Sie ist doppelt-stochastisch, erfüllt die entscheidende Voraussetzung des Ergodensatzes, und die Folge  $P^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  hat, wie oben  $A^k$ , die Grenzmatrix  $M$ . Die Folge  $(x_1, \dots, x_n)P^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  konvergiert wieder gegen die Gleichverteilung  $(\bar{x}, \dots, \bar{x})$ .

Hier wird auch für  $n=2$  das arithmetische Mittel i.a. nur approximiert. Man bestätigt leicht, dass sich die Komponentenfolgen  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$  der Vektorfolge  $(x_1, x_2)P^k$ ,  $k=1, 2, \dots$  durch

$$x_1^{(k)} = \bar{x} + \frac{1}{2} \cdot (2q_1 - 1)^k \cdot (x_1 - x_2), \quad x_2^{(k)} = \bar{x} - \frac{1}{2} \cdot (2q_1 - 1)^k \cdot (x_1 - x_2)$$

darstellen lassen. Die Konvergenz zeigt sich unmittelbar an  $|2q_1 - 1| < 1$ . Für  $q_1 > 1/2$  sind beide Folgen monoton, für  $q_1 < 1/2$  schwanken sie um ihren Grenzwert  $\bar{x}$ .

## 3. Die Ungleichung

Ist  $g$  eine konvexe Funktion auf dem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , so bedeutet dies:  $(1/2) \cdot (g(x_1) + g(x_2)) \geq g(\bar{x})$ . Setzt man  $f(x_1, x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ , entsteht eine Funktion auf  $I^2$  mit der Eigenschaft  $f(x_1, x_2) \geq f(\bar{x}, \bar{x})$ .

Allgemeiner werden nun Funktionen von  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  betrachtet, die bei den Mittelungen  $P_i$  gemäss Nr. 2 entsprechenden Ungleichungen genügen.

Die Abbildungen  $P_i$  ändern das arithmetische Mittel der Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  nicht. Es wird im weiteren als fest vorgegeben anzusehen sein; um dies zu verdeutlichen, steht jetzt  $\hat{x}$  für  $\bar{x}$ .

**Satz.** Gegeben seien  $n \in \mathbb{N}$  und ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Zu  $\hat{x} \in I$  sei  $H_n(\hat{x})$  die Hyperebene  $\{(x_1, \dots, x_n) \mid (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \hat{x}\}$ . Auf  $K(\hat{x}) := I^n \cap H_n(\hat{x})$  sei eine reelle Funktion  $f$  mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1. Auf  $K(\hat{x})$  und für alle  $i = 1, \dots, n-1$  gilt

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq f(x_1, \dots, x_{i-1}, q_i x_i + q'_i x_{i+1}, q'_i x_i + q_i x_{i+1}, \dots, x_n),$$

wobei Gleichheit nur für  $x_i = x_{i+1}$  zugelassen ist.

2. Die Funktion  $f$  ist in  $(\hat{x}, \dots, \hat{x})$  nach unten halbstetig.

Dann gilt  $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(\hat{x}, \dots, \hat{x})$  mit Gleichheit nur für  $x_1 = \dots = x_n = \hat{x}$ .

Es ist klar, dass «nach unten halbstetig» und « $\geq$ » durch «nach oben halbstetig» und « $\leq$ » ersetzt werden können.

Beweis: Nach Voraussetzung wird der Funktionswert bei keiner der Mittelungen  $P_i$ , die von  $(x_1, \dots, x_n)$  zu  $(x_1, \dots, x_n)P$  führen, vergrößert. Dasselbe gilt dann auch beim Übergang von  $(x_1, \dots, x_n)$  zu  $(x_1, \dots, x_n)P^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Für die Folge der Funktionswerte  $f((x_1, \dots, x_n)P^k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  kann man schliessen:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &\geq f((x_1, \dots, x_n)P^k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f((x_1, \dots, x_n)P^k) \\ &\geq f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (x_1, \dots, x_n)P^k\right) = f((x_1, \dots, x_n)M) = f(\hat{x}, \dots, \hat{x}). \end{aligned}$$

In der letzten Abschätzung ist die Halbstetigkeit ausgenutzt. Gilt Gleichheit, so auch  $f(x_1, \dots, x_n) = f((x_1, \dots, x_n)P)$ . Aus  $(x_1, \dots, x_n) \neq (x_1, \dots, x_n)P$  würde folgen, dass mindestens eine der Mittelungen  $P_i$  ein Koordinatenpaar abändern und so den Funktionswert verkleinern müsste. Also ist  $(x_1, \dots, x_n)$  Fixvektor von  $P$  und damit auch von  $M$ . Diese Matrix hat aber  $(\hat{x}, \dots, \hat{x})$  als einzigen Fixvektor.

In den folgenden Anwendungen wird nur die einfache Mittelung  $A$  vorkommen.

#### 4. Spezialisierung auf die Jensensche Ungleichung

Die Funktion  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und streng konvex, also

$$(g(x_1) + g(x_2))/2 \geq g(x_1/2 + x_2/2)$$

mit Gleichheit nur für  $x_1 = x_2$ .

Setzt man  $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n g(x_i)$ , wird für  $x_i \neq x_{i+1}$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i/2 + x_{i+1}/2, x_i/2 + x_{i+1}/2, \dots, x_n) \\ = g(x_i) + g(x_{i+1}) - 2 \cdot g(x_i/2 + x_{i+1}/2) > 0. \end{aligned}$$

Der Satz besagt dann:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g(x_i) \geq g\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

mit Gleichheit nur für  $x_1 = \dots = x_n = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ .

Dies ist die Jensensche Ungleichung (siehe z. B. [2], S. 51).

## 5. Beispiel

In [3] wird die Aufgabe gestellt, die Ungleichung

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j / (1 - x_i)(1 - x_j) \geq \binom{n}{2} / (n-1)^2$$

für  $n \geq 3$  und positive Zahlen  $x_i$  mit  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  zu beweisen; Gleichheit solle nur für  $x_1 = \dots = x_n = 1/n$  eintreten.

Der bewiesene Satz liefert etwas mehr: Für  $n \geq 3$  und  $\hat{x} \geq 1/n$  gilt auf  $[0, 1]^n \cap H_n(\hat{x})$

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j / (1 - x_i)(1 - x_j) \geq \binom{n}{2} \hat{x}^2 / (1 - \hat{x})^2$$

mit Gleichheit nur für  $x_1 = \dots = x_n = \hat{x}$ .

Zunächst wird ein trivialer Sonderfall erledigt:  $x_1 + x_2 = 1$  und  $x_3 = \dots = x_n = 0$ .

Dann ist  $\hat{x} = 1/n$  und

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 > \frac{n}{2(n-1)} = \binom{n}{2} \hat{x}^2 / (1 - \hat{x})^2.$$

Um den Satz ins Spiel zu bringen, berechnet man die Differenz  $D$  der Funktionswerte aus Bedingung 1; wegen der Symmetrie von  $f$  genügt es, dies für  $i=1$  zu tun.

Mit  $m := x_1/2 + x_2/2$  und  $x_1 \neq x_2$  erhält man

$$\begin{aligned} D &= f(x_1, \dots, x_n) - f(m, m, x_3, \dots, x_n) \\ &= (x_1 x_2 / (1 - x_1)(1 - x_2) - m^2 / (1 - m)^2) \\ &\quad + (x_1 / (1 - x_1) + x_2 / (1 - x_2) - 2m / (1 - m)) \cdot \sum_{i=3}^n x_i / (1 - x_i). \end{aligned}$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich für die erste Klammer

$$K_1 = -(x_1 - x_2)^2 (1 - x_1 - x_2) / (1 - x_1)(1 - x_2)(2 - x_1 - x_2)^2$$

und für die zweite

$$K_2 = (x_1 - x_2)^2 / (1 - x_1)(1 - x_2)(2 - x_1 - x_2).$$

Beachtet man  $K_2 > 0$  und

$$\sum_{i=3}^n x_i / (1 - x_i) \geq \sum_{i=3}^n x_i = n\hat{x} - x_1 - x_2 \geq 1 - x_1 - x_2,$$

wo aber Gleichheit zwischen erstem und letztem Term nur im Sonderfall eintreten kann, folgt ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von  $(1 - x_1 - x_2)$

$$D = K_1 + K_2 \cdot \sum_{i=3}^n x_i / (1 - x_i) > K_1 + K_2 \cdot (1 - x_1 - x_2) \\ = (x_1 - x_2)^2 (1 - x_1 - x_2)^2 / (1 - x_1)(1 - x_2)(2 - x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Damit ist der Satz anwendbar und die Behauptung bewiesen. Übrigens gilt für  $\hat{x} < 1/n$  die Abschätzung nicht mehr, wie die Gleichung  $f(n\hat{x}, 0, \dots, 0) = 0$  zeigt.

## 6. Bemerkungen

Bekanntlich kann die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel positiver Zahlen bewiesen werden, indem man auf  $g(x) = \log x$  die Jensensche Ungleichung anwendet. Zum Vergleich sei  $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$  betrachtet:

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1/2 + x_2/2, x_1/2 + x_2/2, x_3, \dots, x_n) \\ = (x_1 x_2 - ((x_1 + x_2)/2)^2) \cdot \prod_{i=3}^n x_i < 0 \quad \text{für } x_1 \neq x_2.$$

Das gibt sofort

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

Offensichtlich ist es zweckmässig,  $f$  als symmetrische Funktion zu wählen; analog zum Beispiel in Nr. 5 etwa

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(x_i) g(x_j) \quad \text{mit einer stetigen Funktion } g: I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Ungleichung  $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(\hat{x}, \dots, \hat{x})$  kann für diesen Funktionstyp umgeformt werden zu

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n g(x_i) \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (g(x_i))^2 \geq \binom{n}{2} \cdot \left( g\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right) \right)^2,$$

also zu einer Ungleichung, die drei Mittel verknüpft. Ist  $g$  positiv, konvex und logarithmisch konvex (bzw. konkav und logarithmisch konkav), lässt sich die entscheidende Bedingung (o.E. für  $i=1$  aufgeschrieben)

$$g(x_1)g(x_2) - (g(x_1/2 + x_2/2))^2 \\ + (g(x_1) + g(x_2) - 2 \cdot g(x_1/2 + x_2/2)) \cdot \sum_{i=3}^n g(x_i) \geq 0 \quad (\text{bzw. } \leq 0)$$

sofort verifizieren.

Ein typisches Beispiel ist  $g(x) = \log x$  mit  $x > e$ :

$$\left(\log \prod_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n(n-1) \left(\log \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^n (\log x_i)^2.$$

Man kann sich überzeugen, dass diese Ungleichung für  $x_i > e$  die arithmetisch-geometrische Ungleichung verschärft.

Die Verallgemeinerung dieser Konstruktion von 2-Auswahlen auf  $k$ -Auswahlen liegt auf der Hand und führt z. B. für die Gammafunktion zu

$$\sum_{k\text{-Auswahlen aus } n} \Gamma(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot \Gamma(x_{i_k}) \geq \binom{n}{k} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)\right)^k.$$

Interessanter sind Funktionen wie  $g(x) = x/(1-x)$  in Nr. 5, die zwar konvex, aber nicht logarithmisch konvex sind. Zur Anwendung des Satzes benötigt man daher eine zusätzliche Bedingung; im Beispiel war dies  $\hat{x} \geq 1/n$ .

H. Wellstein, Flensburg, BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. Rényi: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1962.
- 2 G. Pólya und G. Szegő: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 1, 3. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964.
- 3 S. Gabler: Aufgabe 830, in: El. Math. 34, 126 (1979).

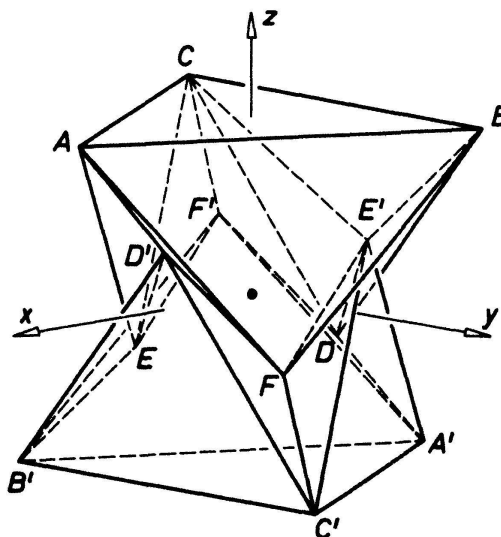
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/030079-06\$1.50+0.20/0

## Kipp-Ikosaeder II<sup>1)</sup>

### II. Ikosaeder mit dreizähliger Symmetrieachse

5. Betrachtet werden jetzt Ikosaeder mit Mittelpunkt, welche die 120°-Drehungen um die  $z$ -Achse vertragen und deren Aussehen an eine Sanduhr erinnert (Fig. 4).



Figur 4. Wackelikosaeder mit dreizähliger Symmetrieachse.

1) Kipp-Ikosaeder I erschien in El. Math. 36, 153–158 (1981).