

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 37 (1982)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

The case  $d=3$ : Clearly:  $V(S_n^3)=6(n+1)$ .

To compute  $G(S_n^3)$  we count the integers  $x_3 \geq 0$  satisfying

$$3(n+1)x_1 + 2(n+1)x_2 + x_3 \leq 6(n+1)$$

for  $(x_1, x_2) = (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1)$  and  $(2,0)$ .

Easy computation gives  $G(S_n^3) = 16n + 23$ .

The case  $d=4$ :  $V(S_1^4) = 147$ .

To compute  $G(S_1^4)$  we count the pairs  $(x_3, x_4)$  of integers  $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  satisfying

$$42x_1 + 28x_2 + 7x_3 + x_4 \leq 84$$

for  $(x_1, x_2) = (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (2,0)$ .

Counting yields  $G(S_1^4) = 680$ .

This completes the proof of the theorem.

We raise the following *conjecture*:

$$v(d, n) < \infty \quad \text{for all } d \geq 3 \quad \text{and} \quad n \geq 1.$$

We remark that the conjecture implies  $g(d, n) < \infty$  by Blichfeldt ([1], p. 55):  $G(P) \leq d! V(P) + d$  for nondegenerate lattice polytopes (compare [4]).

Similar problems may be asked for the number of  $i$ -dimensional faces of convex lattice polytopes  $P$  satisfying  $G^0(P) = n$ , where  $0 \leq i \leq d-1$ .

J. Zaks, University of Haifa and C.R.M.A., University of Montreal,  
M. A. Perles, Hebrew University, Jerusalem,  
J. M. Wills, University of Siegen, West Germany

## REFERENCES

- 1 C.G. Lekkerkerker: Geometry of numbers. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.
- 2 H. Minkowski: Geometrie der Zahlen. Teubner, Leipzig 1910.
- 3 P.R. Scott: On convex lattice polygons. Bull. Austr. Math. Soc. 15, 395–399 (1976).
- 4 J.M. Wills: Gitterzahlen und innere Volumina. Comm. Math. Helv. 53, 508–524 (1978).

# Kleine Mitteilungen

## A note on the successive remainders of the exponential series

1. For real  $x \neq 0$ , we have by Taylor's theorem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \phi_n(x), \quad (1.1)$$

where

$$\phi_n(x) = e^{x\theta_n(x)}, \quad 0 < \theta_n(x) < 1. \quad (1.2)$$

The behavior of  $\phi_n(x)$  for  $x = -n$ , and  $n$  large, is considered by Copson [1] in connection with a related problem of Ramanujan. (For the latter, see Karamata [2].) Here we wish to consider  $\phi_n(x)$  and  $\theta_n(x)$  as functions of  $n$  for  $x$  fixed. We prove two monotonicity properties and advance two conjectures.

2. A sequence  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  of real numbers is called *totally monotone* if

$$(-1)^k \Delta^k u_n > 0, \quad k \geq 0, \quad n \geq 0,$$

where  $\Delta$  is the forward difference operator,  $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ .

**Proposition 1.** If  $x > 0$ , the sequence  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  is totally monotone; if  $x < 0$ , then  $\{\Delta \phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  is totally monotone.

Proof: Using the integral form of the remainder term one finds

$$\phi_n(x) = (n+1) \int_0^1 t^n e^{(1-t)x} dt = 1 + x \int_0^1 t^{n+1} e^{(1-t)x} dt, \quad n \geq 0.$$

This shows that, apart from an additive constant,  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  is a moment sequence on  $[0, 1]$ , and therefore

$$(-1)^k \Delta^k \phi_n = x \int_0^1 (1-t)^k t^{n+1} e^{(1-t)x} dt, \quad k \geq 1.$$

The assertion now follows immediately.

3. Turning to the sequence  $\{\theta_n\}$ , we prove

**Proposition 2.** If  $x \neq 0$ , then

$$(-1)^k \Delta^k \theta_n > 0, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0.$$

Proof: For  $k = 0$ , the stated inequality is trivial. For  $k = 1$ , it follows from proposition 1, since

$$\Delta \phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n = e^{x \theta_n} [e^{x \Delta \theta_n} - 1] \tag{3.1}$$

is negative for  $x > 0$  and positive for  $x < 0$ .

To prove it for  $k = 2$ , we let

$$v_{-2}(x) = v_{-1}(x) = e^x,$$

$$v_n(x) = e^x - \left[ 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Clearly,

$$v'_n(x) = v_{n-1}(x), \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$

and from (1.1), (1.2) we have

$$v_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{x\theta_n}, \quad n \geq 0,$$

implying that

$$e^{x\Delta^2\theta_n} = \frac{n+3}{n+2} \frac{v_n(x)v_{n+2}(x)}{v_{n+1}^2(x)}, \quad n \geq 0.$$

Defining

$$f_n(x) = (n+3)v_n(x)v_{n+2}(x) - (n+2)v_{n+1}^2(x), \quad n = -2, -1, 0, 1, \dots,$$

we must show (for  $n \geq 0$ ) that

$$f_n(x) > 0 \quad \text{if } x > 0, \quad f_n(x) < 0 \quad \text{if } x < 0. \quad (3.3)$$

We prove by induction on  $n$  that (3.3) holds true for  $n \geq -2$ . Clearly, (3.3) is true if  $n = -2$ . Using (3.2), we find that

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{f_{n+1}}{v_{n+1}} \right] &= v_{n+1} f'_{n+1} - v_n f_{n+1} \\ &= v_{n+1} [(n+4)v_n v_{n+3} - (n+2)v_{n+1} v_{n+2}] \\ &\quad - v_n [(n+4)v_{n+1} v_{n+3} - (n+3)v_{n+2}^2] = v_{n+2} f_n. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\dot{f}_{n+1}(x) = v_{n+1}(x) \int_0^x \frac{v_{n+2}(t)}{v_{n+1}^2(t)} f_n(t) dt, \quad (3.4)$$

the constant of integration being zero, since  $f_n(x) = O(x^{2n+5})$  as  $x \rightarrow 0$ ,  $n \geq -2$ . (For the same reason, the integrand in (3.4) is regular at  $t = 0$ .) Using the induction assumption (3.3), and noting that  $\operatorname{sgn} v_{n+1}(x) = (-1)^n$  if  $x < 0$ , it follows from (3.4) that  $f_{n+1}(x) \geq 0$  for  $x \geq 0$ . This is (3.3) with  $n$  replaced by  $n+1$ , and thus completes the induction.

Since  $\{\theta_n\}$  is decreasing and bounded below by zero, the limit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$  exists. Observing that

$$1 = e^{x\theta_n} - \frac{x}{n+2} e^{x\theta_{n+1}}, \quad n \geq 0,$$

and letting  $n \rightarrow \infty$ , we get  $1 = e^{x\theta}$ , so that  $\theta = 0$ . Proposition 2 is proved.

4. It might be conjectured that the sequence  $\{\theta_n\}$  is totally monotone for every  $x \neq 0$ . However, this appears to be false. For  $x = 31.5$  it was found by computation that  $\Delta^4 \theta_{18} = -1.8443798 \dots \times 10^{-7}$ , while  $\Delta^4 \theta_n > 0$  for all  $n \neq 18$  in the range  $0 \leq n \leq 26$ . On the other hand, there is numerical evidence to suggest the following two conjectures:

**Conjecture 1.**  $\Delta^3 \theta_n < 0$  for every  $x \neq 0$ .

**Conjecture 2.** For  $x < 0$ , the sequence  $\{\theta_n\}$  is totally monotone.

The second conjecture may be given the following equivalent form

$$(-1)^k(1 - Q^k \phi_n) > 0, \quad k \geq 0, \quad n \geq 0, \quad x < 0, \quad (4.1)$$

where  $Q$  denotes the quotient operator

$$Q u_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (u_n \neq 0).$$

For, by (1.2), we have

$$Q^k \phi_n = e^{x A^k \theta_n},$$

from which the assertion follows.

#### ACKNOWLEDGMENT

The author is pleased to acknowledge comments from Professor A. Ostrowski which led to simplifications in the proof of proposition 2.

Walter Gautschi, Purdue University, Lafayette, USA.

#### REFERENCES

- 1 E.T. Copson: An approximation connected with  $e^{-x}$ . Proc. Edinb. Math. Soc. 3 (2), 201–206 (1933).
- 2 J. Karamata: Sur quelques problèmes posés par Ramanujan. J. Indian Math. Soc. (N.S.) 24, 343–365 (1960).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/020046-04\$1.50 + 0.20/0

## Ein Planaritätskriterium für endliche Graphen

Im folgenden sei mit  $\Gamma$  stets ein endlicher, schlichter und zusammenhängender Graph bezeichnet.

Die erste rein kombinatorische Charakterisierung der planaren Graphen wurde 1930 von Kuratowski [2] gegeben. Danach ist ein Graph  $\Gamma$  dann und nur dann planar, wenn er keine Unterteilung des vollständigen Graphen  $K_5$  oder des vollständigen paaren Graphen  $K_{3,3}$  als Teilgraphen enthält. Whitney [3] zeigte, dass ein Graph  $\Gamma$  genau dann planar ist, wenn er einen kombinatorischen Dualgraphen besitzt. Mac Lane [4] beschrieb die planaren Graphen durch die Existenz einer speziellen Kreisbasis. Darüber hinaus gibt es noch eine Reihe von sehr verschiedenen, mehr oder weniger komplizierten Planaritätskriterien<sup>1)</sup>, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

Nachstehend soll eine kombinatorische Charakterisierung der planaren Graphen aufgezeigt werden, welche sich durch besondere Einfachheit sowohl in der Formu-

1) Man vergleiche dazu [1], S.88.

lierung als auch in der Herleitung auszeichnet. Es werden dazu zwei Begriffe benötigt.

Ein *Gittergraph*  $Q_n$  sei ein Graph mit den Knotenpunkten  $a_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), welche wie folgt durch Kanten miteinander verbunden sind:

$$(a_{i,j}, a_{i,j+1}) \left\{ \begin{array}{l} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n-1 \end{array} \right\}, \quad (a_{i,j}, a_{i+1,j}) \left\{ \begin{array}{l} i=1, \dots, n-1 \\ j=1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Unter einer *Vergrößerung*<sup>2)</sup> eines Graphen  $\Gamma$  versteht man einen Graphen  $\Gamma'$ , welcher durch Herausnahme und Kontraktion von Kanten aus  $\Gamma$  erzeugt werden kann.

Damit lässt sich jetzt aussprechen:

**Planaritätskriterium.** Ein Graph  $\Gamma$  ist dann und nur dann planar, wenn er Vergrößerung eines Gittergraphen  $Q_n$  ist.

Beweis: Der Gittergraph  $Q_n$  ist offensichtlich planar. Zerlegt man nämlich ein (geometrisches) Quadrat  $ABCD$  durch Ziehung von jeweils  $n-2$  Parallelen zu den Seiten  $AB$  und  $AD$  in  $(n-1)^2$  Teilquadrate, so erhält man den zum Gittergraphen  $Q_n$  isomorphen ebenen Gittergraphen  $\bar{Q}_n$ , wenn man geeignete Strecken und Punkte als Kanten und Knotenpunkte auszeichnet. Da jede Vergrößerung eines planaren Graphen stets wiederum ein planarer Graph ist, hat man noch zu zeigen, dass jeder ebene Graph  $\Gamma$  Vergrößerung eines  $\bar{Q}_n$  ist.

Nun lässt sich zu jedem ebenen Graphen  $\Gamma$  stets ein ebener Graph  $\Gamma^{(3)}$  mit den folgenden Eigenschaften angeben:

- (I) Jeder Knotenpunkt  $a \in \Gamma^{(3)}$  ist vom Grade  $v(a) \leq 3$ .
- (II) Der Graph  $\Gamma^{(3)}$  ist auf  $\Gamma$  kontrahierbar.

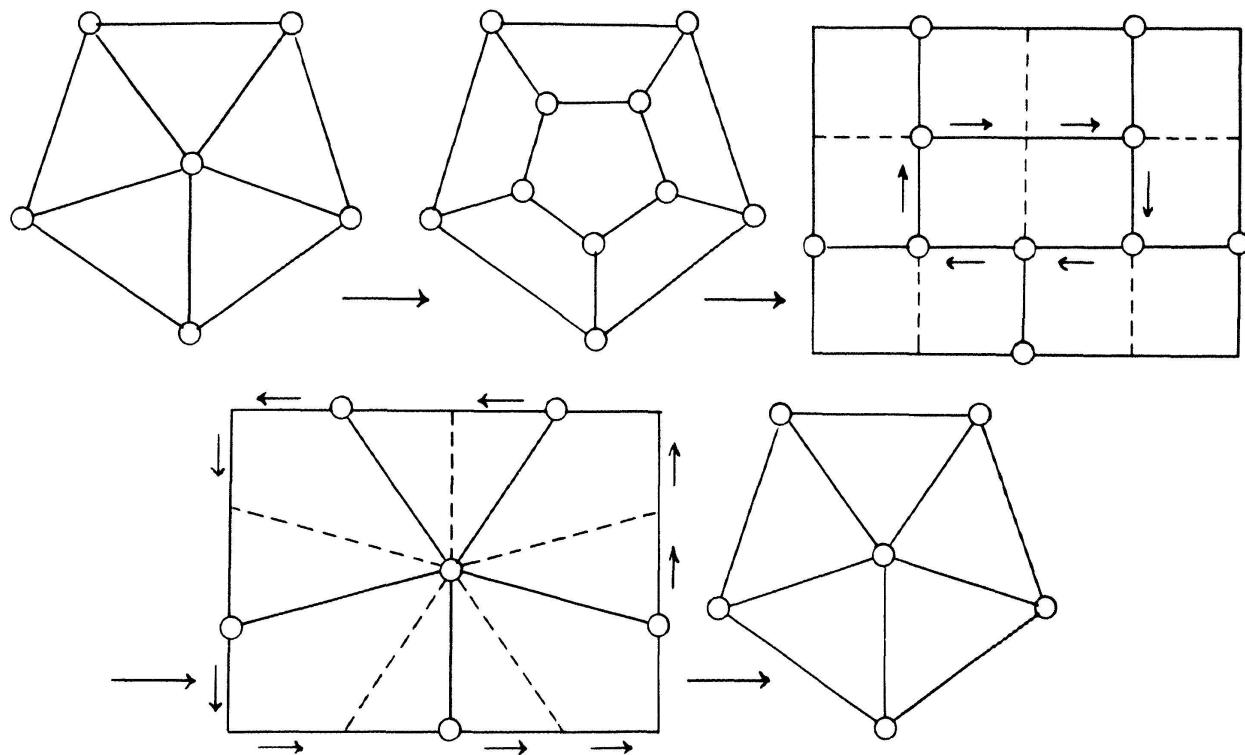
Da sich weiter jede Unterteilung  $U(\Gamma)$  eines Graphen  $\Gamma$  auf  $\Gamma$  kontrahieren lässt, hat man jetzt nur noch die folgende Aussage zu beweisen:

(A) Zu jedem ebenen Graphen  $\Gamma^{(3)}$  gibt es stets einen ebenen Gittergraphen  $\bar{Q}_n$  derart, dass eine Unterteilung  $U(\Gamma^{(3)})$  von  $\Gamma^{(3)}$  Teilgraph von  $\bar{Q}_n$  ist.

Der Beweis von (A) wird durch vollständige Induktion nach der Anzahl  $a_1(\Gamma^{(3)})$  der Kanten von  $\Gamma^{(3)}$  erbracht. Es sei dazu angenommen, dass (A) für alle ebenen Graphen  $\Gamma^{(3)}$  mit  $a_1(\Gamma^{(3)}) < r$  bereits bewiesen ist, was für  $r=2$  sicher zutrifft.

Jetzt bezeichne  $\Gamma^{(3)}$  einen ebenen Graphen mit  $a_1(\Gamma^{(3)}) = r$  und  $k = (a_1, a_2)$  eine Kante von  $\Gamma^{(3)}$ . Nach der Induktionsannahme gibt es dann einen ebenen Gittergraphen  $\bar{Q}_m$ , so dass gilt  $U(\Gamma^{(3)} - k) \subseteq \bar{Q}_m$ . Um auch eine Unterteilung  $U(k)$  der Kante  $k$  in  $\bar{Q}_m$  einzeichnen zu können, hat man im allgemeinen eine «Verfeinerung» von  $\bar{Q}_m$  vorzunehmen. Dazu zeichne man in  $\bar{Q}_m$  weitere Parallelen zu  $AB$  und  $AD$  derart ein, dass jedes Teilquadrat von  $\bar{Q}_m$  in 4 Quadrate zerlegt wird. Man erhält auf diese Weise den ebenen Gittergraphen  $\bar{Q}_{2m-1}$  mit der «feineren» Unterteilung  $U'(\Gamma^{(3)} - k)$  von  $\Gamma^{(3)} - k$  als Teilgraphen. Jetzt kann man aber sicher eine Unterteilung  $U(k)$  der Kante  $k = (a_1, a_2)$  als Weg derart in  $\bar{Q}_{2m-1}$  einzeichnen,

2) Der Begriff wird von H. Sachs ([1], S.213) eingeführt.

Figur 1.  $\Gamma \rightarrow \Gamma^{(3)} \rightarrow U(\Gamma^{(3)}) \subset Q_n \rightarrow \text{Vergrößerung} \rightarrow \Gamma$ .

dass  $U(k)$  ausser den Endpunkten keine weiteren Punkte mit  $U'(\Gamma^{(3)} - k)$  gemeinsam hat. Dabei wird  $U(k)$  im allgemeinen an die zu den Knotenpunkten  $a_1$  bzw.  $a_2$  benachbarten Knotenpunkte von  $U'(\Gamma^{(3)} - k)$  angeheftet werden müssen, welche bei der «Verfeinerung» von  $\bar{Q}_m$  neu hinzugekommen und daher in  $U'(\Gamma^{(3)} - k)$  vom Grade 2 sind.

Damit ist (A) durch vollständige Induktion gezeigt und zugleich der Beweis des Planaritätskriteriums abgeschlossen.

Man kann das eben bewiesene Kriterium in gewisser Hinsicht als Gegenstück zum Kriterium von Kuratowski ansehen. Während dort die planaren Graphen «von innen» durch die einfachsten nicht planaren Graphen ( $K_5, K_{3,3}$ ) charakterisiert werden, werden sie hier «von aussen» durch einen in seiner Struktur besonders einfachen planaren Graphen ( $Q_n$ ) beschrieben: Mit Hilfe des Begriffs der Vergrößerung lassen sich die beiden Sätze nämlich wie folgt zusammenfassend formulieren:

*Ein Graph  $\Gamma$  ist dann und nur dann planar,*

*wenn  $\left\{ \begin{array}{l} \text{weder } K_5 \text{ noch } K_{3,3} \\ \text{Vergrößerung von } \Gamma \end{array} \right. \text{ ist.}$*

Horst Bergmann, Hamburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Sachs: Einführung in die Theorie der endlichen Graphen II. Leipzig 1972.
- 2 G. Kuratowski: Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. 15, 271-283 (1930).
- 3 H. Whitney: Nonseparable and planar graphs. Trans. Am. Math. Soc. 34, 339-362 (1932).
- 4 S. Mac Lane: A combinatorial condition for planar graphs. Fund. Math. 28, 22-32 (1937).

## On a certain selection process

A fundamental selection model in mathematical population genetics is that of Fisher-Wright-Haldane (cf. e.g. [1-7]). Since it seems to be impossible to give a complete global analysis of this model for general fitness parameters we restrict ourselves to the case where all the heterozygotes of the population have fitness equal to 1. Under this additional assumption a complete global analysis of the continuous version of this model is performed.

Consider a population the individuals of which differ only in one single locus with  $m$  alleles  $A_1, \dots, A_m$ . Let  $p_i(t)$  denote the frequency of  $A_i$  at time  $t$  and let  $f_{ij}$  denote the fitness of the genotype  $A_i A_j$ . Then the model equations of the continuous Fisher-Wright-Haldane selection model read as follows:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(t) &= p_i(t) (\sum (f_{ij} p_j(t); j = 1, \dots, m) - \Phi(t)), \\ \Phi(t) &= \sum (f_{jk} p_j(t) p_k(t); j, k = 1, \dots, m)\end{aligned}\quad (1)$$

( $m \geq 1, i = 1, \dots, m, p_i(0) \geq 0, \sum (p_j(0); j = 1, \dots, m) = 1, f_{ij} \geq 0, f_{ij} = f_{ji}$  for all  $i, j$ ). It is well-known that the solutions of (1) exist on the whole of  $[0, \infty)$ , that  $\Phi(t) \uparrow \bar{\Phi} < \infty$  and that  $\dot{p}_i(t) \rightarrow 0$  for all  $i = 1, \dots, m$  both for  $t \rightarrow \infty$  (cf. e.g. [1]). We now make the following additional assumption:

$$f_{ij} = 1 \quad \text{if } 1 \leq i < j \leq m.$$

For the sake of simplicity of notation we also assume

$$\dot{p}_1(0), \dots, \dot{p}_m(0) > 0.$$

Now put  $a_i := f_{ii} - 1$  for all  $i = 1, \dots, m$ . Then (1) reads as follows:

$$\dot{p}_i = p_i (1 + a_i p_i - \Phi), \quad \Phi = 1 + \sum (a_j p_j^2; j = 1, \dots, m).$$

**Lemma 1.** For all  $i = 1, \dots, m$  there exists  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) =: \bar{p}_i$ .

Proof: Let  $1 \leq i \leq m$ . Then  $(2a_i p_i + 1 - \Phi)^2 = 4a_i \dot{p}_i + (1 - \Phi)^2$  which converges. Hence  $|2a_i p_i + 1 - \Phi|$  and - since  $2a_i p_i + 1 - \Phi$  is continuous - also  $2a_i p_i + 1 - \Phi$  converge. If  $a_i \neq 0$  this shows convergence of  $p_i$ . If  $a_i = 0$  then  $\dot{p}_i = p_i (1 - \Phi)$  which shows (remember  $\Phi \uparrow !$ ) that  $p_i(t)$  becomes monotonous for sufficiently large  $t$  completing the proof of the lemma.

In the following for arbitrary functions  $x, y: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$   $x \leq y$  means that  $x(t) \leq y(t)$  for all  $t \in [0, \infty)$ .

**Lemma 2.** Let  $x, g \in C^1[0, \infty)$  and assume  $\dot{x} = xg$  on  $[0, \infty)$ . If  $x(0) \leq 0$  then  $x \leq 0$ .

**Proof of lemma 2:** Easy, since the differential equation  $\dot{x} = xg$  is linear.

**Lemma 3**

- (i)  $p_i > 0$  for all  $i = 1, \dots, m$ .
- (ii) If  $1 \leq i, j \leq m$  and  $a_i p_i(0) \leq a_j p_j(0)$  then  $a_i p_i \leq a_j p_j$ .

Proof: Apply lemma 2 to the differential equations  $\dot{p}_i = p_i(1 + a_i p_i - \Phi)$  and  $(a_i p_i - a_j p_j)' = (a_i p_i - a_j p_j)(1 + a_i p_i + a_j p_j - \Phi)$ .

**Lemma 4.** Assume  $1 \leq i, j \leq m$  and  $a_i \bar{p}_i < a_j \bar{p}_j$ . Then  $\bar{p}_i = 0$ .

Proof: Otherwise  $(p_i/p_j)' = (p_i/p_j)(a_i p_i - a_j p_j)$  would converge to some element of  $[-\infty, 0)$  contradicting  $p_i/p_j > 0$ .

**Theorem 5.** Let  $m \geq 1$ , let  $f_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ) be non-negative real numbers such that  $f_{ij} = 1$  for  $i \neq j$  and let  $p_1(t), \dots, p_m(t)$  denote the (unique) solutions of the system

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(t) = & p_i(t) \left( \sum (f_{ij} p_j(t); j = 1, \dots, m) \right. \\ & \left. - \sum (f_{jk} p_j(t) p_k(t); j, k = 1, \dots, m) \right)\end{aligned}$$

( $1 \leq i \leq m$ ) of non-linear first order differential equations with initial values  $p_1(0), \dots, p_m(0) > 0$ . Then (i)–(iii) hold:

- (i) Assume there exists some  $s \in \{1, \dots, m\}$  such that  $f_{ss} > 1$ . Then  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = (f_{ii} - 1)^{-1} (\sum ((f_{jj} - 1)^{-1}; j = 1, \dots, m, (f_{jj} - 1)p_j(0) = \max \{(f_{kk} - 1)p_k(0) | k = 1, \dots, m\})^{-1}$  if  $(f_{ii} - 1)p_i(0) = \max \{(f_{kk} - 1)p_k(0) | k = 1, \dots, m\}$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0$  otherwise ( $i = 1, \dots, m$ ).
- (ii) Assume  $f_{ij} \leq 1$  for all  $i, j = 1, \dots, m$  and assume there exists some  $v \in \{1, \dots, m\}$  such that  $f_{vv} = 1$ . Then  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i(0) (\sum (p_j(0); j = 1, \dots, m, f_{jj} = 1))^{-1}$  if  $f_{ii} = 1$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0$  otherwise ( $i = 1, \dots, m$ ).
- (iii) Assume  $f_{ii} < 1$  for all  $i = 1, \dots, m$ . Then  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = (1 - f_{ii})^{-1} (\sum ((1 - f_{jj})^{-1}; j = 1, \dots, m))^{-1}$  for all  $i = 1, \dots, m$ .

Proof:

- (i) WLOG,  $a_s p_s(0) = \max \{a_k p_k(0) | k = 1, \dots, m\}$ . Suppose, there exists some  $u \in \{1, \dots, m\}$  with  $a_u p_u(0) < a_s p_s(0)$  such that  $\bar{p}_u > 0$ . Then  $a_u \bar{p}_u < a_s \bar{p}_s$  by lemma 3 and  $a_u \bar{p}_u \geq a_s \bar{p}_s$  by lemma 4. Now  $(p_s/p_u)' = (p_s/p_u)(a_s p_s - a_u p_u) > 0$  and hence  $a_u/a_s < p_s(0)/p_u(0) < \bar{p}_s/\bar{p}_u \leq a_u/a_s$ , a contradiction. Therefore  $\bar{p}_i = 0$  for all  $i = 1, \dots, m$  with  $a_i p_i(0) < a_s p_s(0)$ . From lemma 3 it follows that  $(p_i/p_j)' = 0$  for all  $i, j = 1, \dots, m$  with  $a_i p_i(0) = a_j p_j(0) = a_s p_s(0)$  which together with  $\sum (\bar{p}_i; i = 1, \dots, m) = 1$  yields (i).
- (ii) Lemma 4 implies  $\bar{p}_i = 0$  for all  $i = 1, \dots, m$  with  $a_i < 0$ . Moreover,  $(p_i/p_j)' = 0$  for all  $i, j = 1, \dots, m$  with  $a_i = a_j = 0$  which together with  $\sum (\bar{p}_i; i = 1, \dots, m) = 1$  yields (ii).
- (iii) From lemma 4 it follows  $a_i \bar{p}_i = a_j \bar{p}_j$  for all  $i, j = 1, \dots, m$  which together with  $\sum (\bar{p}_i; i = 1, \dots, m) = 1$  yields (iii).

Remark: These results are exactly the same as in the discrete time case (cf. [4]) though completely different methods are used within the corresponding proofs.

H. Länger, Vienna

## REFERENCES

- 1 K.P. Hadeler: Mathematik für Biologen. Springer, 1974.
- 2 R. Ineichen and E. Batschelet: Genetic selection and de Finetti diagrams. J. Math. Biol. 2, 33–39 (1975).
- 3 S. Karlin: Theoretical aspects of multi-locus selection balance I. Ed. S.A. Levin. MAA Studies in Math. 16, 503–587 (1978).
- 4 H. Länger and W. Timischl: The evolution of a population for a certain viability system. ZAMP 31, 538–541 (1980).
- 5 T. Nagylaki: Selection in one- and two-locus systems. Lect. Notes in Biomath., vol. 15. Springer, 1977.
- 6 W. Nöbauer and W. Timischl: Mathematische Modelle in der Biologie. Vieweg, 1979.
- 7 J. Rosner and W. Timischl: Über ein Differenzengleichungssystem der Populationsgenetik. Öst. Akad. Wiss. Sitz.-Ber. Math.-naturw. Kl. II 188, 247–254 (1979).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/020052-03\$1.50 + 0.20/0

## Elementarmathematik und Didaktik

### Zur Existenz von pythagoreischen Quadern mit vorgegebener Raumdiagonale

#### *1. Pythagoreische Rechtecke und pythagoreische Quader*

Ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenmasszahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  bezeichnet man bekanntlich als pythagoreisches Dreieck. Zwei kongruente pythagoreische Dreiecke lassen sich dann zu einem pythagoreischen Rechteck zusammensetzen, bei welchem Seiten und Diagonale ganzzahlige Längenmasszahlen besitzen.

In Analogie dazu sprechen wir hier von einem pythagoreischen Quader, falls alle Kanten und die Raumdiagonale ganzzahlige Längenmasszahlen besitzen. Sind  $a, b, c$  die Kantenmasszahlen und ist  $d$  die Längenmasszahl der Diagonale, so muss also  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  mit  $a, b, c \in \mathbb{N}$  gelten, wobei hier  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Es sei angemerkt, dass  $\text{ggT}(a, b, c) = 1$  nicht verlangt wird, wie dies bei der Untersuchung der sog. primitiven pythagoreischen Dreiecke erforderlich ist.

#### *2. Beweis des Satzes von Hurwitz über pythagoreische Quader mit vorgegebener Raumdiagonale*

Die Frage nach der Existenz von pythagoreischen Quadern mit vorgegebener Raumdiagonale  $d \in \mathbb{N}$  ist gleichwertig zu der Frage, für welche  $d \in \mathbb{N}$  die Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  in  $\mathbb{N}$  mindestens eine Lösung besitzt. Die Antwort gibt der folgende

**Satz von Hurwitz.** *Die Zahlen  $2^k$  und  $5 \cdot 2^k$  mit  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  sind die einzigen natürlichen Zahlen, die nicht als Längenmasszahl der Raumdiagonale eines pythagoreischen Quaders in Frage kommen. (Vgl. [1], S. 271<sup>1</sup>), und [2], S. 101.)*

Wir zeigen: Zu  $d \neq 2^k \cdot 5^l$  mit  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  und  $l \in \{0, 1\}$  gibt es mindestens eine Lösung von  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  in  $\mathbb{N}$ .

1) Für diesen Literaturhinweis bin ich Herrn E. Trost zu Dank verpflichtet.