Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Anmerkung: Die Autoren danken Herrn Professor L. Fejes Tóth für die vielen interessanten Diskussionen während seines Aufenthaltes in Salzburg und für sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

F. Österreicher und J. Linhart, Universität Salzburg

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Fejes Tóth: Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *20*, 375-381 (1969).
2 J. Linhart: Über einige Vermutungen von L. Fejes Tóth. Acta Math. Sci. Hung. *24*/1-2, 199-201 (1973).
3 F. Österreicher und W. Rohm: Über das Legen kongruenter Stäbchen, so dass jedes genau drei Nachbarn besitzt. Arbeitsber. Math. Inst. Univ. Salzburg *4*, 69-86 (1979).
4 A.B. Owens: On the planarity of regular incidence sequences. J. Combinat. Theory (B) *11*, 201-212 (1971).
5 E.F. Schmeichel and S.L. Hakimi: On planar graphical degree sequences. Siam J. appl. Math. *32*, 598-609 (1977).
6 G. Wegner: Bewegungsstabile Packungen konstanter Nachbarnzahl. Studia Sci. Math. Hung. *6*, 431-438 (1971).
7 P. Manca: Generating all planar graphs of degree four. J. Graph Theory *3*/4, 357-363 (1979).
8 F. Österreicher: Notizen zur Erzeugung von 5-regulären ebenen Graphen. Unveröffentlichtes Manuskript.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/010005-12 $1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

Über den Rang gewisser zirkulanter Matrizen (zu Problem 764A)

Es sei stets p eine Primzahl $\neq 2$ und C_p die zirkulante Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(p-2) & 1/(p-1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(p-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1/(p-1) & 1 & \dots & 1/(p-3) & 1/(p-2) \end{pmatrix}.$$

In [4] stellte Spindelböck die Aufgabe, den Rang von C_p in $\mathbf{Z}_p$, dem Primkörper der Charakteristik p, zu ermitteln. Hier sollen nun einige Aussagen über den fraglichen Rang abgeleitet werden; dabei wird sich zeigen, dass wir im Augenblick weit davon entfernt sind, etwa eine handliche Formel angeben zu können, die $\operatorname{Rang}(C_p)$ für jedes vorgegebene p liefert.

Sind $v_1, \ldots, v_{p-1}$ die Nullstellen von $X^{p-1}-1$ in $\mathbf{Z}_p$, ist V_p die Vandermondematrix $(v_j^{i-1})_{1 \leq i,j < p}$ und wird schliesslich

$$f_p(X) := \sum_{k=1}^{p-1} X^{k-1}/k \tag{1}$$

gesetzt, so ist

$$C_p V_p = \begin{pmatrix} f_p(v_1) & \ldots & f_p(v_{p-1}) \\ v_1^{-1} f_p(v_1) & \ldots & v_{p-1}^{-1} f_p(v_{p-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{2-p} f_p(v_1) & \ldots & v_{p-1}^{2-p} f_p(v_{p-1}) \end{pmatrix}.$$

Nach dem kleinen Fermatschen Satz sind die $v_1, \ldots, v_{p-1}$ genau die von Null verschiedenen Elemente von $\mathbf{Z}_p$. Da V_p regulär ist, gilt also für den gesuchten Rang

$$\operatorname{Rang}(C_p) = p - 1 - \operatorname{card}\{w \in \mathbf{Z}_p \mid f_p(w) = 0\}. \tag{2}$$

Die Lösung des Problems in [4] ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung der genauen Anzahl der in $\mathbf{Z}_p$ gelegenen Nullstellen von f_p für jede Primzahl $p \geqslant 3$.

Proposition 1. *f_p hat in $\mathbf{Z}_p$ die einfache Nullstelle* 1; *jede von* 1 *verschiedene, in $\mathbf{Z}_p$ gelegene Nullstelle ist genau zweifach. Daher gelten die Ungleichungen*

$$1 \leq \operatorname{card}\{w \in \mathbf{Z}_p \mid f_p(w) = 0\} \leq (p-1)/2 \tag{3}$$

bzw.

$$(p-1)/2 \leq \operatorname{Rang}(C_p) \leq p-2, \tag{4}$$

und die Schranken sind scharf.

Beweis: Zuerst betrachten wir die aus (1) folgenden Identitäten

$$X f_p'(X) + f_p(X) = (X f_p(X))' = \sum_{k=1}^{p-1} X^{k-1} = (X^{p-1}-1)/(X-1) = \prod_{k=2}^{p-1} (X-k) \tag{5}$$

bzw.

$$X f_p''(X) + 2 f_p'(X) = \sum_{k=2}^{p-1} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{p-1} (X-j). \tag{6}$$

Nun ist $f_p(1) = 0$ nach dem Satz von Lagrange, vgl. etwa [2]; gemäss (5) ist 1 jedoch eine einfache Nullstelle. Sei nun $w \in \mathbf{Z}_p$, $w \neq 1$ eine Nullstelle von f_p; sicher ist $w \neq 0$,

und aus (5) bzw. (6) folgt $f_p'(w)=0$ bzw. $f_p''(w)\neq 0$. Damit ist (3) und wegen (2) auch (4) klar. Dass die in (3) gegebene Abschätzung scharf ist, zeigt die erste Zeile der nachstehenden Tabelle.

Primzahl p	Grad des Polynoms $g_p(X):=f_p(X)/(X-1)$	Anzahl der Nullstellen von g_p in $\mathbf{Z}_p$	Lage der Nullstellen von g_p
3	0	0	-
5	2	0	-
7	4	2	3 und 5
11	8	0	-
13	10	2	4 und 10
17	14	0	-
19	16	2	8 und 12
23	20	0	-
29	26	0	-
31	28	2	6 und 26
37	34	2	11 und 27

Wir entnehmen weiter der Tabelle, dass das Polynom

$$g_p(X):=f_p(X)/(X-1)\in\mathbf{Z}_p[X]$$

für die aufgeführten $p\equiv 1 \pmod 6$ genau zwei verschiedene Nullstellen in $\mathbf{Z}_p$ hat. Wir zeigen später, dass g_p für jedes $p\equiv 1 \pmod 6$ in $\mathbf{Z}_p$ mindestens zwei Nullstellen hat, so dass die untere Schranke in (3) für diese p auf 3 angehoben und somit die obere Schranke in (4) für dieselben p auf $p-4$ herabgedrückt werden kann.

Proposition 2. *Für $w\in\mathbf{Z}_p\backslash\{0\}$ ist*

$$wf_p(w)=-f_p(w^{-1})\,; \tag{7}$$

$w\in\mathbf{Z}_p$ ist also Nullstelle von f_p genau dann, wenn dies für w^{-1} zutrifft.

Beweis: Nach dem kleinen Fermatschen Satz ist nämlich

$$wf_p(w)=\sum_{k=1}^{p-1} w^k/k=\sum_{k=1}^{p-1} w^{k-p+1}/(k-p)=-\sum_{j=1}^{p-1}(w^{-1})^{j-1}/j=-f_p(w^{-1}).$$

Hat man also eine von 1 und -1 verschiedene Nullstelle $w\in\mathbf{Z}_p$ von f_p, so findet man sofort $w^{-1}\neq w$ als weitere Nullstelle von f_p.

Proposition 3. *In $\mathbf{Z}_p$ gelten die Gleichungen*[1])

$$f_p(X)=\left(1-X^p-(1-X)^p\right)/pX \tag{8}$$

und also

$$(1-X)f_p(1-X)=Xf_p(X)\,. \tag{9}$$

1) Man beachte, dass hier rechts jeder Koeffizient des Zählerpolynoms durch p teilbar ist.

Daher gilt für $w \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0,1\}$: w ist Nullstelle von f_p genau dann, wenn dies für $1-w$ zutrifft.

Beweis: Für $k=1,\ldots,p-1$ schreiben wir $y_k := \binom{p}{k}/p$ und haben also

$$k!y_k = (p-1)\cdots(p-k+1) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Dies liefert $y_k \equiv (-1)^{k-1}/k \,(\mathrm{mod}\, p)$ und daher modulo p^2

$$(1-X)^p = 1 - X^p + p\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k y_k X^k \equiv 1 - X^p - p\sum_{k=1}^{p-1} X^k/k = 1 - X^p - pXf_p(X).$$

Damit ist (8) gezeigt; die restliche Behauptung ist dann klar.
Im Hinblick auf die Nullstellenaussagen der Propositionen 2 und 3 wird man sich natürlich für solche $w \in \mathbf{Z}_p$ interessieren, die $w^{-1} = 1-w$ erfüllen.

Proposition 4. *Sei $p \geq 5$. $X(1-X)=1$ hat in $\mathbf{Z}_p$ genau dann Wurzeln, und zwar zwei verschiedene, wenn $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6)$ ist. Ist $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6)$, so sind diese tatsächlich Nullstellen von g_p und damit von f_p.*

Beweis: $w(w-1) = -1$ in $\mathbf{Z}_p$ ist hier gleichbedeutend mit $(2w-1)^2 \equiv -3 \,(\mathrm{mod}\, p)$. Nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und seinen Ergänzungssätzen gilt bei $p \geq 5$ für das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

und dies ist 1 genau dann, wenn $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ ist, was mit $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6)$ äquivalent ist. Sei nun $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6)$ und $w_0 \in \mathbf{Z}_p$ eine der beiden Lösungen von $X(1-X)=1$. Sicher ist $w_0 \neq 0, 1$ und also nach (9) und (7)

$$w_0 f_p(w_0) = (1-w_0)f_p(1-w_0) = (1-w_0)f_p(w_0^{-1}) = -w_0(1-w_0)f_p(w_0) = -f_p(w_0);$$

wegen $w_0 \neq -1$ folgt hieraus $f_p(w_0) = 0$.
Das hier gefundene Ergebnis erklärt in unserer Tabelle das Auftreten zweier Nullstellen von g_p in $\mathbf{Z}_p$ für die $p \leq 37$, die kongruent 1 modulo 6 sind. Wenn man aber aufgrund der Tabelle vermutet, g_p habe stets zwei bzw. keine Nullstelle, je nachdem ob $p \equiv 1$ bzw. $\not\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6)$ ist, so wird sich dies sogleich als unzutreffend erweisen.
Sei weiterhin $p \geq 5$. Dann sind 2, $(p+1)/2$, $p-1$ paarweise verschiedene Elemente von $\mathbf{Z}_p$, die überdies von 0 und 1 und [falls $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 6)$ ist] von den Wurzeln von $X(1-X)=1$ verschieden sind. Setzen wir

$$H_p := \{2, (p+1)/2, p-1\},$$

so gilt nach den Propositionen 2 und 3: Ist $f_p(w)=0$ für ein $w \in H_p$, so verschwindet

f_p an jeder Stelle von H_p. Nach Proposition 3 ist dies aber mit dem Bestehen der Kongruenz

$$2^p \equiv 2 \pmod{p^2} \tag{10}$$

von Wieferich [6] gleichbedeutend, die von den Untersuchungen zur Fermatschen Vermutung über $x^p + y^p = z^p$ her wohlbekannt ist, vgl. etwa [3]. Ob (10) unendlich viele Lösungen p besitzt, ist bis heute nicht sicher; das bisher beste Ergebnis stammt von Brillhart, Tonascia und Weinberger [1] und besagt, dass unterhalb $3 \cdot 10^9$ alleine die Primzahlen 1093 und 3511 der Bedingung (10) genügen. Da beide Primzahlen kongruent 1 modulo 6 sind, haben nach Proposition 4 die g_{1093} bzw. g_{3511} wenigstens fünf Nullstellen in $\mathbf{Z}_{1093}$ bzw. $\mathbf{Z}_{3511}$.
Lassen wir nun aus $\mathbf{Z}_p$ die $0, 1, 2, (p+1)/2, p-1$ und im Falle $p \equiv 1 \pmod 6$ noch die beiden Wurzeln von $X(1-X) = 1$ fort, so bleibt jedenfalls eine durch 6 teilbare Anzahl von Elementen übrig, die sich wie folgt auf lauter disjunkte Klassen zu je sechs Elementen verteilen: Ist w ein beliebiges übriggebliebenes Element, so ist nach den Propositionen 2 und 3 entweder jedes oder keines der folgenden, paarweise verschiedenen Elemente

$$w, \quad w^{-1}, \quad 1-w^{-1}, \quad w(w-1)^{-1}, \quad (1-w)^{-1}, \quad 1-w$$

von $\mathbf{Z}_p$ Nullstelle von f_p. Fassen wir diese sechs Elemente zur Menge $G_p(w)$ zusammen, so können wir schliesslich formulieren:

Proposition 5. *Ist $p \equiv 1 \pmod 6$ und $w_0 \in \mathbf{Z}_p$ eine Wurzel von $X(1-X) = 1$, so gibt es $w_1, \ldots, w_{(p-7)/6} \in \mathbf{Z}_p \backslash \{0, 1, w_0, w_0^{-1}, 2, 1/2, -1\}$ derart, dass die $G_p(w_1), \ldots, G_p(w_{(p-7)/6})$ paarweise disjunkt sind und die Zerlegung*

$$\mathbf{Z}_p \backslash \{0, 1, w_0, w_0^{-1}\} = H_p \cup G_p(w_1) \cup \cdots \cup G_p(w_{(p-7)/6})$$

die Eigenschaft besitzt, dass das Verschwinden von f_p an einer Stelle von G_p bzw. H_p sogleich das Verschwinden von f_p an jeder Stelle von G_p bzw. H_p impliziert. Ist $p \equiv 5 \pmod 6$, so gibt es analog $w_1, \ldots, w_{(p-5)/6} \in \mathbf{Z}_p \backslash \{0, 1, 2, 1/2, -1\}$ derart, dass die Zerlegung

$$\mathbf{Z}_p \backslash \{0, 1\} = H_p \cup G_p(w_1) \cup \cdots \cup G_p(w_{(p-5)/6})$$

die vorher aufgeführte Eigenschaft hat.

Damit erschöpfen sich unsere Aussagen über die Nullstellenverteilung von f_p bei beliebigem $p \geq 5$. Wie oben schon erwähnt, kennen wir nur zwei p-Werte $\equiv 1 \pmod 6$, für die die drei Elemente von H_p Nullstellen von f_p sind. Ist $p > 7$, so fällt jedenfalls $3 \in \mathbf{Z}_p$ in ein G_p; ob jedes der sechs Elemente dieses G_p tatsächlich Nullstelle von f_p ist oder keines, hängt nach Proposition 3 ab von der Frage, ob die Kongruenz

$$3^p \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2} \tag{11}$$

lösbar ist oder nicht. Hinsichtlich (11) sind unsere Kenntnisse jedoch genauso lückenhaft wie bezüglich (10).
Abschliessend erwähnen wir, dass die in (1) eingeführten Polynome f_p und ihre Nullstellen in $\mathbf{Z}_p$ eine wichtige Rolle spielen bei vielen Untersuchungen zur Fermat-Vermutung im sog. «ersten Fall», wenn also keines der x, y, z durch p teilbar ist, vgl. etwa [3] und [5].

Peter Bundschuh, Mathematisches Institut der Universität Köln

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Brillhart, J. Tonascia und P. Weinberger: On the Fermat Quotient. In: Computers in Number Theory, S. 213-222, New York 1971.
2 G.H. Hardy und E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, 2. Aufl. Oxford 1945.
3 P. Ribenboim: 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. New York, Heidelberg, Berlin 1979.
4 K. Spindelböck: Problem 764A. El. Math. *31*, 44 (1976).
5 H.S. Vandiver: Note on Euler Number Criteria for the First Case of Fermat's Last Theorem. Am. J. Math. *62*, 79-82 (1940).
6 A. Wieferich: Zum letzten Fermatschen Theorem. J. reine angew. Math. *136*, 293-302 (1909).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/010016-06 $1.50+0.20/0

Eine räumliche Deutung der Vierseiteigenschaft von Bodenmiller

In der euklidischen Ebene π gilt der auf Bodenmiller ([6], S. 1003) zurückgehende

Satz. *Die Thaleskreise über den Gegeneckenpaaren eines Vierseits liegen in einem Kreisbüschel.*

Beweise dieses Satzes stammen u.a. von Schlömilch [3], Möbius [2], Chasles [1] und Study [5]. Für den hier gegebenen einfachen Beweis interpretieren wir Abb. 1 als

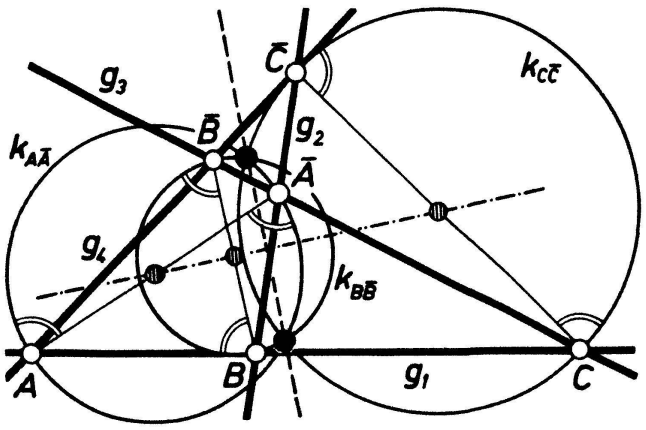

Abb. 1

Zentralriss eines räumlichen Objektes. Die mit X_u^c, Y_u^c, Z_u^c beschrifteten Diagonalecken des gegebenen Vierseits $V=\{g_1,\ldots,g_4\}$ werden als die Fluchtpunkte dreier Durchmesser einer Kugel Φ aufgefasst. Die Durchmesserendpunkte $X,\bar{X},Y,\bar{Y},Z,\bar{Z}$ sind Ecken eines Φ eingeschriebenen Oktaeders mit sechs Paaren paralleler Kanten, die jeweils nach den mit $A_u^c,\bar{A}_u^c,B_u^c,\bar{B}_u^c,C_u^c,\bar{C}_u^c$ beschrifteten Ecken von V fluchten (vgl. Abb. 2). Um die Lage des Augpunktes O der Zentralprojektion auf π zu ermitteln, koppeln wir zwei der Paare antipodischer Kugelpunkte, etwa $X,\bar{X}$ und $Y,\bar{Y}$ zu einem Rechteck. Die Fluchtpunkte $A_u^c,\bar{A}_u^c$ orthogonaler Seiten dieses Rechtecks müssen dann aus dem Augpunkt O unter rechtem Winkel gesehen werden; somit liegt O auf der Thaleskugel $\Psi_{A\bar{A}}$ über dem Gegeneckenpaar $A_u^c,\bar{A}_u^c$ von V (vgl. Abb. 2). Koppelt man das verbleibende Paar von Durchmesserendpunkten Z

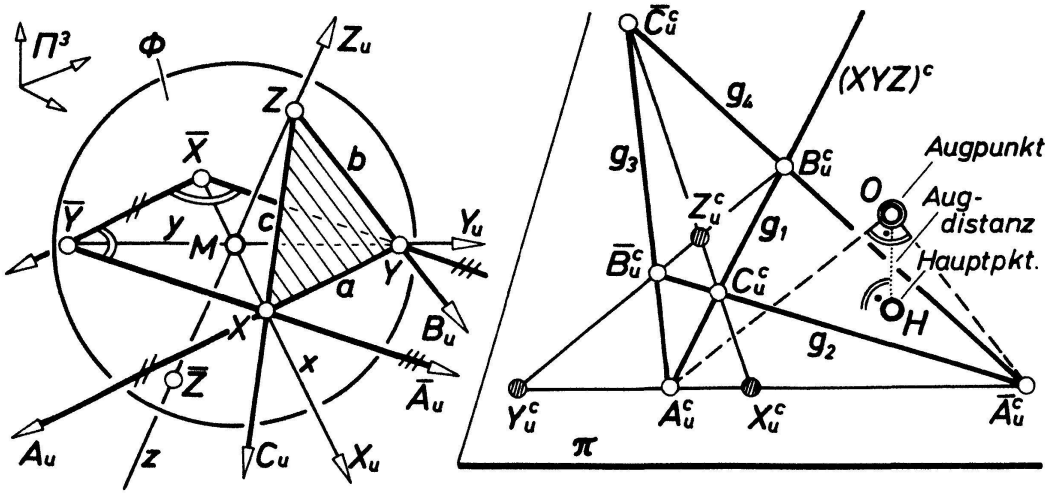

Abb. 2

und $\bar{Z}$ etwa mit Y und $\bar{Y}$, so liefert obige Überlegung eine weitere Thaleskugel $\Psi_{B\bar{B}}$ über $B_u^c,\bar{B}_u^c$ durch O. Das dritte mögliche Rechteck $\{Z,X,\bar{Z},\bar{X}\}$ ist nun durch die vorher verwendeten bereits mitbestimmt und kann daher keine weitere, von den ersten beiden unabhängige Bedingung für O liefern. Damit liegt die aus $\{Z,X,\bar{Z},\bar{X}\}$ abgeleitete Thaleskugel $\Psi_{C\bar{C}}$ über dem Fluchtpunktepaar $C_u^c,\bar{C}_u^c$ in dem von $\Psi_{A\bar{A}}$ und $\Psi_{B\bar{B}}$ aufgespannten Kugelbüschel. Die Spurkreise von $\Psi_{A\bar{A}},\Psi_{B\bar{B}},\Psi_{C\bar{C}}$ in π sind aber die Thaleskreise $k_{A\bar{A}},k_{B\bar{B}},k_{C\bar{C}}$ über den Gegeneckenpaaren des Angabevierseits V und gehören somit, wie behauptet, einem Kreisbüschel an.

Für den Augpunkt O gelten die Bedingungen $O\in\Psi_{A\bar{A}}\cap\Psi_{B\bar{B}}$ und $O\in\Psi_{C\bar{C}}$. Mit jedem Punkt O ist auch der zu π symmetrische Punkt ein möglicher Augpunkt für die gesuchte Zentralprojektion, so dass unabhängig von der Realität von O die Normalprojektion H von O auf π stets reell ausfällt. Der Punkt H heisst «Hauptpunkt» der Zentralprojektion aus O auf π und liegt auf der Spur s der zu π normalen Chordalebene von $\Psi_{A\bar{A}}$ und $\Psi_{B\bar{B}}$, also auf der Chordalen der Spurkreise $k_{A\bar{A}},k_{B\bar{B}}$ von $\Psi_{A\bar{A}},\Psi_{B\bar{B}}$. Aus dem Bodenmillerschen Satz folgt somit, dass H nur bis auf (beliebige) Wahl auf s festgelegt ist.

Bei einer Zentralprojektion mit dem Hauptpunkt H sind nun die Fluchtelemente A_u^c und a_u^c einer Geraden a und einer zu ihr normalen Ebene α notwendig so beschaffen, dass $HA_u^c\perp a_u^c$ gilt. Gibt man also H auf s vor, so ist die Fluchtspur a_u^c not-

wendig die Normale auf HA_u^c durch $\bar{A}_u^c$. Wählen wir H insbesondere so, dass a_u^c in $\bar{A}_u^c\bar{B}_u^c$ fällt (vgl. Abb. 3), dann muss wegen $H \in s$ auch $H\bar{B}_u^c \perp A_u^c B_u^c$ gelten und H

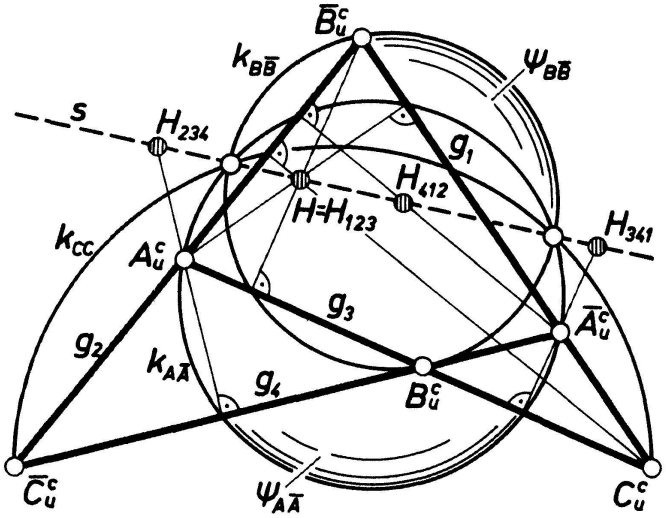

Abb. 3

ist der Höhenschnittpunkt H_{123} des Dreiecks $\{A_u^c, B_u^c, C_u^c\} = \{g_1, g_2, g_3\}$. Nebenbei ergibt sich, dass $C_u^c, \bar{C}_u^c$ wegen $\bar{C}_u^c \in A_u^c\bar{B}_u^c = g_2$ und $g_2 \perp HC_u^c$ ebenfalls Fluchtpunkte orthogonaler Richtungen sind und ein eventuell reeller[1]), zu H gehöriger Augpunkt O auch auf der Thaleskugel $\Psi_{C\bar{C}}$ liegt. Mit gleicher Schlussweise lässt sich auch für die übrigen Teildreiseite von V nachweisen, dass deren Höhenschnittpunkte mit s inzidieren. Wir haben damit folgenden Satz bewiesen (vgl. [4], S. 223, und [6], S. 1003):

Die Höhenschnittpunkte der vier Teildreiseite $\{g_i, g_j, g_k\}$ $(i,j,k$ pw. $\neq, \in 1,\ldots,4)$ *eines Vierseits* $\{g_1,\ldots,g_4\}$ *der euklidischen Ebene sind kollinear mit der gemeinsamen Chordalen der Bodenmillerschen Thaleskreise dieses Vierseits.*

G. Weiss, Technische Universität Wien, A

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Chasles: Traité de Géométrie supérieure. Gauthier-Villars, Paris 1880.
2 A.F. Möbius: Zwei rein geometrische Beweise des Bodenmillerschen Satzes. Verh. K. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl. *6*, 87–91 (1854).
3 O. Schlömilch: Über das vollständige Viereck. Verh. K. Sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl. *6*, 4–13 (1854).
4 J. Steiner: Gesammelte Werke, 1. Bd. Hrsg. K. Weierstrass. Reimer, Berlin 1881.
5 E. Study: Elementare Beweise einiger geometrischer Sätze. J. Math. *94*, 233–236 (1883).
6 M. Zacharias: Elementargeometrie. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III.1.2. Teubner, Leipzig 1914, 1931.

1) Hiefür ist bekanntlich hinreichend, dass das Teildreiseit $\{g_1, g_2, g_3\}$ spitzwinklig ist.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/010021-03 $1.50 + 0.20/0