Représentation conforme et symétries : une détermination élémentaire du module d'un quadrilatère en forme de L

Autor(en): **Hersch, Joseph**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 1

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-36385

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 37 | Heft 1 | Seiten 1-32 | Basel, 10. Januar 1982

Représentation conforme et symétries: une détermination élémentaire du module d'un quadrilatère en forme de L

1. Introduction

1.1. Dans le cadre du «Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach», une semaine a été consacrée, en juillet 1980, aux méthodes constructives de l'analyse complexe. A la suite d'un exposé de G.T. Symm, j'ai appris que le quadrilatère $OCDE$, dessiné à la figure 3, a un module égal à $\sqrt{3}$: D. Gaier l'a obtenu [1] à l'aide d'intégrales elliptiques. Ce module étant si simple, j'ai cherché une méthode tout à fait élémentaire pour le déterminer: c'est celle que je propose ici. A côté de la notion de *module* d'un *quadrilatère*, cette méthode nécessite celle de *mesure harmonique* d'un arc-frontière en un point d'un domaine. Rappelons d'abord ces deux notions.

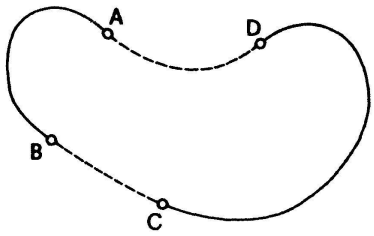

Fig. 1: quadrilatère.

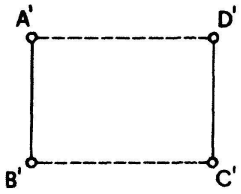

Fig. 1'.

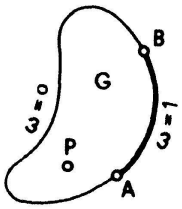

Fig. 2.

1.2. Un *quadrilatère* Q est un domaine de Jordan avec quatre points A, B, C, D désignés sur sa frontière (fig. 1).
Son *module* $\mu_{AB,CD} = |B'C'|/|A'B'|$ est le rapport des côtés d'un rectangle $A'B'C'D'$ qui lui est conformément équivalent (fig. 1'). Comme $\mu_{AD,BC} = |A'B'|/|B'C'|$, on a toujours

$$\mu_{AB,CD} \cdot \mu_{AD,BC} = 1. \tag{1}$$

Au point de vue physique, $\mu_{AB,CD}$ est (à un facteur constant près) la *résistance* d'une plaque homogène entre les «électrodes» $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$, isolée le long des arcs $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{AD}$.
Nous utiliserons essentiellement que *le module d'un quadrilatère est un invariant conforme.*

1.3. Soient G un domaine de Jordan (fig. 2), P un point intérieur, A et B deux points sur la frontière ∂G. On appelle *mesure harmonique* de l'arc-frontière $\overset{\frown}{AB}$ au point P la valeur en P de la fonction harmonique (bornée) dans G, qui vaut 1 sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et 0 sur le reste de la frontière ∂G. On l'écrit $\omega(P; \overset{\frown}{AB}; G)$ ou plus brièvement $\omega(P; \overset{\frown}{AB})$.

2. Une propriété de «symétrie généralisée» [2] du quadrilatère en L considéré

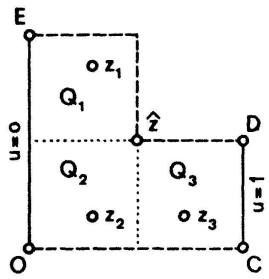

Fig. 3: on cherche le module μ de ce quadrilatère.

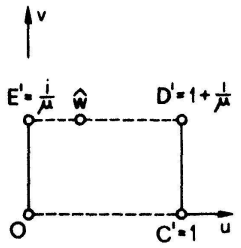

Fig. 3′: module $= \mu$.

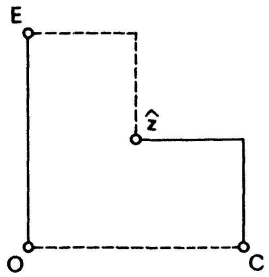

Fig. 4: module $= 1$.

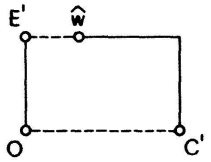

Fig. 4′: module $= 1$.

Appelons $u = u(z)$ la fonction harmonique dans notre quadrilatère $OCDE$ (fig. 3), qui prend les valeurs 0 et 1 sur les arcs-frontière $\overset{\frown}{EO}$ resp. $\overset{\frown}{CD}$, et dont la dérivée normale s'annule sur les arcs-frontière en pointillé - - - - - -.
Soient z_1 un point quelconque du carré supérieur Q_1, z_2 son symétrique dans Q_2 et z_3 le symétrique de z_2 dans Q_3. Alors

$$u(z_1) + u(z_2) + u(z_3) = 1 \tag{2}$$

quel que soit $z_1 \in Q_1$.

Démonstration: La fonction $\tilde{u}(z_1) := u(z_1) + u(z_2) + u(z_3)$ est définie et harmonique dans Q_1, elle vaut 1 sur le côté gauche de Q_1 et sa dérivée normale s'annule sur les trois autres segments de ∂Q_1. C'est donc la constante 1, c.q.f.d.
Pour $z_1 \to \hat{z}$ (fig. 3), nous avons aussi $z_2 \to \hat{z}$ et $z_3 \to \hat{z}$, d'où

$$u(\hat{z}) = \frac{1}{3} \cdot \tag{2'}$$

3. La représentation conforme de notre quadrilatère sur un rectangle de côtés 1 et $1/\mu$. Une caractérisation de μ par une condition sur le module d'un autre quadrilatère

Nous écrirons désormais μ pour $\mu_{EO,CD}$.
La fonction harmonique $u(z)$ considérée au paragraphe 2 est la partie réelle de la fonction $w(z)=u(z)+i\,v(z)$ qui applique conformément notre quadrilatère $OCDE$ sur le rectangle $0<u<1$, $0<v<1/\mu$ (fig. 3′), avec $w(O)=0$, $w(C)=C'=1$, $w(D)=D'=1+i/\mu$, $w(E)=E'=i/\mu$. De plus, par (2′), $\hat{w}:=w(\hat{z})=1/3+i/\mu$.
Considérons maintenant, dans notre domaine en L, *un autre quadrilatère: on désigne, sur la frontière, les points $O, C, \hat{z}, E$* (fig. 4). Ce quadrilatère étant *symétrique* relativement à la diagonale $O\hat{z}$, son module $\mu_{EO,C\hat{z}}$ est égal à son «module inverse» $\mu_{OC,\hat{z}E}$, donc [cf. (1)] *égal à* 1. - Comme le module est un invariant conforme, l'image de ce quadrilatère par l'application $w(z)$, c'est-à-dire *le quadrilatère $OC'\hat{w}E'$* (fig. 4′), *a lui aussi le module* 1.

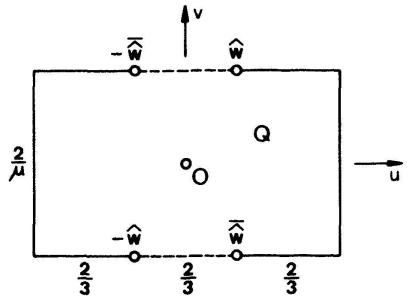

Fig. 5: le quadrilatère Q, de module 1.

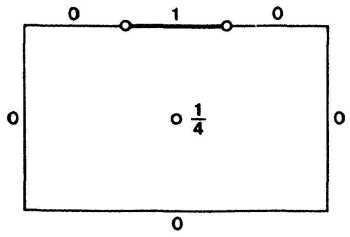

Fig. 6′: la fonction harmonique h.

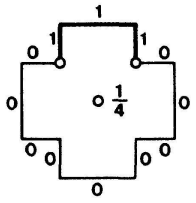

Fig. 6: fonction harmonique.

Il s'ensuit que *le quadrilatère Q* de la figure 5, obtenu par deux symétries successives, *a aussi le module* 1, c'est-à-dire qu'*il est conformément équivalent à un carré. C'est cette condition qui déterminera μ.* Le passage de la figure 4′ à la figure 5 peut être interprété ainsi: on a quatre résistances égales à 1, $R_1+R_2=2$ (connectées en série) et $R_3+R_4=2$ (connectées en série); la résistance R_1+R_2 est connectée en parallèle avec la résistance R_3+R_4; la resistance résultante est de nouveau égale à 1.

4. La détermination de μ par une condition sur la mesure harmonique

4.1. Le quadrilatère Q (fig. 5) est conformément équivalent à un carré, c'est-à-dire qu'il existe une et une seule représentation conforme $\zeta(w)$ du quadrilatère Q sur le carré de sommets $\zeta(\hat{w})=1+i$, $\zeta(-\bar{\hat{w}})=-1+i$, $\zeta(-\hat{w})=-1-i$, $\zeta(\bar{\hat{w}})=1-i$. Vu la symétrie du quadrulatère Q relativement à son centre O, la fonction $\tilde{\zeta}(w):=-\zeta(-w)$ donne la même représentation conforme, donc $\zeta(w)\equiv\tilde{\zeta}(w)=-\zeta(-w)$ et en particulier $\zeta(O)=0$. Chaque côté du carré ayant au centre O la mesure harmonique $1/4$, il en est de même pour les «côtés» du quadrilatère Q, et l'on a

$$h(O):=\omega\,(O;\,\widehat{\hat{w},-\bar{\hat{w}}};\,Q)=\frac{1}{4}\,. \tag{3}$$

Autrement dit: la fonction harmonique h dans le rectangle $|u|<1$, $|v|<1/\mu$, égale à 1 sur le segment-frontière $\widehat{\vec{w}, -\vec{w}}$ et à zéro sur le reste du contour ∂Q, doit satisfaire $h(O)=1/4$ (fig. 6′). *Cette condition détermine* μ.

Remarque: Cette condition (3) suit aussi du fait que la figure 6′ est l'image conforme de la figure 6: la fonction h est la transplantée conforme de la fonction harmonique indiquée par la figure 6.

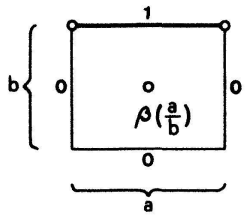

Fig. 7: la fonction harmonique définissant $\beta(a/b)$.

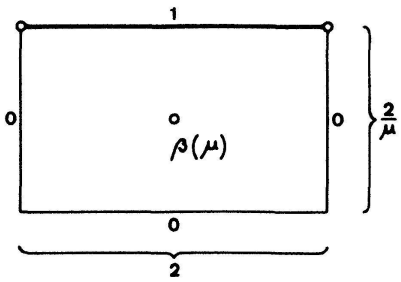

Fig. 8: la fonction harmonique h_1.

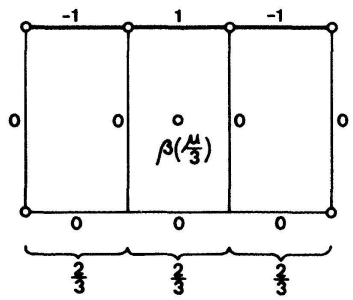

Fig. 9: la fonction harmonique h_2.

4.2. Considérons un rectangle quelconque de côtés a et b; *nous désignons par* $\beta(a/b)$ *la mesure harmonique, au centre du rectangle, d'un côté de longueur* a (fig. 7). Alors $\beta(b/a)$ est la mesure harmonique, au centre du rectangle, d'un côté de longueur b; $2\beta(a/b)+2\beta(b/a)=1$ car c'est la valeur, au centre, de la fonction harmonique qui vaut 1 sur tout le contour du rectangle: elle est $\equiv 1$. Nous retenons donc l'identité

$$\beta(\xi)+\beta\left(\frac{1}{\xi}\right)\equiv\frac{1}{2}\cdot \tag{4}$$

D'autre part, *la fonction* $\beta(\xi)$ *est strictement monotone croissante, donc biunivoque.*

4.3. Considérons, dans notre rectangle $|u|<1$, $|v|<1/\mu$, la mesure harmonique h_1 du côté supérieur (fig. 8): sa valeur au centre est $\beta(\mu)$.
D'autre part, considérons, dans le rectangle $|u|<1/3$, $|v|<1/\mu$ (un tiers du rectangle précédent), la mesure harmonique du côté supérieur (fig. 9): sa valeur au centre est $\beta(\mu/3)$. De plus, cette dernière fonction harmonique peut être *prolongée, par antisymétrie, à tout le rectangle* $|u|<1$, $|v|<1/\mu$: nous y obtenons ainsi une fonction harmonique h_2, prenant les valeurs indiquées par la figure 9.
La moyenne arithmétique de ces deux fonctions harmoniques h_1 *et* h_2 *prend précisément les mêmes valeurs que* h *sur le contour du rectangle* (fig. 6′). Donc

$$(h_1+h_2)/2\equiv h;$$

en particulier, au centre O du rectangle, on a par (3)

$$\beta(\mu)+\beta\left(\frac{\mu}{3}\right)=h_1(O)+h_2(O)=2h(O)=\frac{1}{2}\cdot$$

D'autre part, nous avons par (4)

$$\beta(\mu)+\beta\left(\frac{1}{\mu}\right)=\frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \quad \beta\left(\frac{\mu}{3}\right)=\beta\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot$$

La fonction $\beta(\xi)$ étant biunivoque, il s'ensuit que $\mu/3=1/\mu$,

$$\mu=\sqrt{3}, \tag{5}$$

ce qui achève cette démonstration élémentaire. Elle ne fait intervenir aucune formule de Schwarz-Christoffel, aucune intégrale elliptique.

Joseph Hersch, Math. Seminar, ETH Zürich

BIBLIOGRAPHIE

1 D. Gaier: Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden. Numer. Math. 19, 179–194 (1972).
2 J. Hersch: Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme. J. reine angew. Math. *218*, 143–158 (1965).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/010001-05 $1.50+0.20/0

Packungen kongruenter Stäbchen mit konstanter Nachbarnzahl

Wir betrachten – grob formuliert – folgende einfache Fragen: Gegeben sei eine beliebige Anzahl kongruenter Stäbchen (etwa Holzspachteln, wie sie bei ärztlichen Untersuchungen des Rachens verwendet werden).

A. Wie viele Stäbchen hat man herauszugreifen und wie hat man diese auf einen ebenen Tisch zu legen, so dass jedes Stäbchen die gleiche Anzahl n von Nachbarn erhält?

Ohne Zweifel werden die möglichen Lösungen wesentlich von der konstanten Nachbarnzahl n abhängen. Da die Fälle $n \leqq 2$ ziemlich trivial sind, nehmen wir im folgenden $n \geqq 3$ an.

B. Für welche Nachbarnzahlen $n \geqq 3$ gibt es Lösungen?

C. Wenn für ein bestimmtes n Lösungen existieren, welche sind (ist) die mit minimaler Stäbchenzahl? An dieser Frage wird unser Hauptinteresse liegen.

Um die obigen Begriffe zu präzisieren, folgen wir der Terminologie von L. Fejes Tóth, dessen Artikel «Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl» diese und eine Reihe anderer interessanter Fragen aufwirft.