

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 6

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 T.M. Apostol: Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1976.
- 2 J.C. Burkill: A First Course in Mathematical Analysis. Cambridge University Press, London 1962.
- 3 H.-J. Kanold: Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel. *El. Math.* 24, 109–110 (1969).
- 4 E. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. a) B.G. Teubner, Leipzig 1909, b) Chelsea Publishing Co., New York 1953 (2. Aufl.).
- 5 R. Mönkemeyer: Einführung in die Zahlentheorie. Schroedel-Schöningh, Hannover 1971.
- 6 I. Niven und H.S. Zuckerman: An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, New York 1972.
- 7 J.B. Rosser und L. Schoenfeld: Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.* 6, 64–94 (1962).
- 8 W. Sierpiński: Elementary Theory of Numbers. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964.
- 9 E. Trost: Primzahlen. Birkhäuser, Basel 1968.
- 10 P.L. Tschebyschew: Mémoires sur les nombres premiers. *J. Math. pures appl.* (1) 17, 366–390 (1852).

## Aufgaben

**Aufgabe 850.**  $\tau(n)$  bezeichne die Anzahl der Teiler  $d_i$  von  $n$ :  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{\tau(n)} = n$ . Wir setzen

$$g(n) := 1 + \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} \frac{d_i}{d_{i+1}}, \quad h(n) := \frac{\tau(n)}{g(n)}.$$

Man zeige, dass  $\frac{\log n}{\log \log n}$  die richtige Grössenordnung von  $h(n)$  ist. P. Erdős

Lösung: Wir setzen

$$f(n) := h(n) \frac{\log \log n}{\log n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$$

und zeigen, dass  $L = 1$  ist.

Beweis: 1. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig klein, fest gewählt; sei  $n = p^{\lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor}$ ,  $p \in \mathbf{P}$ . Aus

$$f(n) = \frac{\lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor + 1}{1 + \frac{\lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor}{p}} \cdot \frac{\log \log p + \log \lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor}{\lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor \log p} = \frac{1 + \frac{1}{\lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor}}{1 + \frac{\lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor}{p}} \left( \frac{\log \log p}{\log p} + \frac{\log \lfloor p^{1-\varepsilon} \rfloor}{\log p} \right)$$

folgt

$$f(n) \rightarrow 1 - \varepsilon \quad \text{für } p \rightarrow \infty.$$

2. Es ist

$$\prod_{i=1}^{\tau-1} \frac{d_i}{d_{i+1}} = \frac{1}{n}; \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\tau-1)} \leq \frac{1}{\tau-1} \cdot \sum_{i=1}^{\tau-1} \frac{d_i}{d_{i+1}} \quad (\tau = \tau(n)).$$

Damit folgt  $h \leq \min \{ \tau, n^{1/(\tau-1)} \}$ .

Aus  $f(n) \leq \tau (\log \log n) / \log n$  sehen wir, dass bei beschränktem  $\tau$  und  $n \rightarrow \infty$  auch  $f(n) \rightarrow 0$  gilt. Wir können also annehmen, dass für  $n \rightarrow \infty$  auch  $\tau \rightarrow \infty$  gilt. Weil wir bei festem  $a \geq 1$  für  $n \leq e^{a\tau}$  sogleich

$$f(n) \leq e^{a\tau/(\tau-1)} \frac{\log \log n}{\log n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

erhalten, können wir

$$e^{a\tau} < n, \quad \frac{\log \log n}{\log n} < \frac{\log \tau + \log a}{a\tau}$$

annehmen. Für  $\varepsilon > 0$ , fest, und hinreichend grosse  $\tau$  ist

$$\frac{\tau}{\tau-1} (1-\varepsilon) < \tau^{1-\varepsilon/2};$$

also gilt für  $n \leq \tau^{\tau(1-\varepsilon)}$  die Ungleichung

$$f(n) < \frac{\log \tau + \log a}{\tau^{\varepsilon/2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Zum Schluss sei  $\tau^{\tau(1-\varepsilon)} < n$ . Dann gilt

$$f(n) < \tau \cdot \frac{\log \tau + \log \log \tau}{\tau(1-\varepsilon) \log \tau} \rightarrow \frac{1}{1-\varepsilon} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Aus Abschnitt 1 und 2 folgt die Behauptung.

H.-J. Kanold, Braunschweig, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) und E. Trost (Zürich).

**Aufgabe 851.** Ist  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  ein Alphabet mit  $r$  verschiedenen Buchstaben, so ist jede Abbildung  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$  ein Wort der Länge  $n$ ; es sei  $n, r \geq 2$  vorausgesetzt.

Zwei Wörter  $f, g$  bilden das gleiche Kreiswort  $\vec{f} = \vec{g}$ , wenn für ein  $p$   $g(i) = f(i+p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, i+p \bmod n$ , gilt. Zwei Kreiswörter  $\vec{f}, \vec{g}$  bilden das gleiche Diederwort  $f^* = g^*$ , wenn für zwei passende Vertreter  $f, g$  die Spiegelbeziehung  $f(i) = g(n+1-i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , erfüllt ist.

Schliesslich heisst ein Wort  $f$  schlicht, wenn  $f(i) \neq f(i+1)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt. Man bestimme die Anzahl  $a(n)$  aller verschiedenen schlichten Kreiswörter und die Anzahl  $b(n)$  aller verschiedenen schlichten Diederwörter über dem Alphabet  $A$ .

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers: Von den  $r(r-1)^{n-1}$  Wörtern ohne Doppelbuchstaben sind  $s(n)$  schlicht, die restlichen  $\bar{s}(n)$  haben gleiche Anfangs- und Endbuchstaben; man findet unmittelbar  $s(2) = r(r-1)$  und  $\bar{s}(2) = 0$ . Für  $n \geq 3$  ordnen wir jedem Wort  $ax_2 \cdots x_{n-1}a$  der zweiten Art das  $(n-1)$ stellige schlichte Wort  $ax_2 \cdots x_{n-1}$  umkehrbar eindeutig zu und erhalten damit  $\bar{s}(n) = s(n-1)$ . Aus der so gewonnenen Rekursion  $s(n) = r(r-1)^{n-1} - s(n-1)$  und dem Anfangswert  $s(2)$  folgt  $s(n) = (r-1)^n + (-1)^n(r-1)$ ,  $n \geq 2$ .

Es sei nun  $I_d$  die Anzahl der schlichten Kreiswörter der Länge  $n$  mit primitiver Periode  $d, d|n$ . Jedes solche Kreiswort gibt Anlass zu  $d$  verschiedenen schlichten Wörtern, woraus sich  $s(n) = \sum_{d|n} d I_d$  ergibt. Daraus schliessen wir mit Hilfe der Moebius-Inversion auf

$$n I_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) s(d).$$

Jetzt wird

$$a(n) = \sum_{q|n} I_q = \sum_{q|n} \frac{1}{q} \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) s(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \left[ \sum_{d|q|n} \frac{n}{q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \right] s(d).$$

Die innere Summe beträgt

$$\sum_{\substack{s|n \\ s|d}} s \mu\left(\frac{n/d}{s}\right) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right),$$

wo  $\varphi$  die Eulerfunktion bedeutet. Damit wird

$$a(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) s(d).$$

Setzt man  $s(d)$  ein und berücksichtigt

$$\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) (-1)^d = \begin{cases} -\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = -n, & n \text{ ungerade,} \\ -\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{2^u m}{d}\right) + \sum_{\substack{d|n \\ \frac{d}{2}|\frac{n}{2}}} \varphi\left(\frac{n/2}{d/2}\right) = 0, & n = 2^u m, u \geq 1, m \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so erhält man schliesslich

$$a(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) (r-1)^d - \begin{cases} 0 & (n \text{ gerade}) \\ (r-1) & (n \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Zur Bestimmung von  $b(n)$  denke man sich die schlichten Kreiswörter regulär auf Kreisen dargestellt. Ist  $n$  ungerade, so gibt es kein spiegelsymmetrisches Kreiswort, da andernfalls Doppelbuchstaben aufträten. Die verschiedenen Kreiswörter  $a_1 a_2 \cdots a_n$  und  $a_n \cdots a_2 a_1$  sind Vertreter des gleichen Diederwortes. Somit ist  $b(n) = a(n)/2$ , falls  $n$  ungerade.

Ist  $n$  gerade, so kann es spiegelsymmetrische Kreiswörter geben; als Spiegelachsen kommen aber nur Achsen durch antipodische Buchstabenpaare in Frage. Wir denken uns einen Vertreter eines symmetrischen Kreisworts so notiert, dass  $a_1 a_{(n+2)/2}$  die Symmetrieachse ist. Ist  $d$  die primitive Periode, so muss  $d$  wegen der Symmetrie gerade sein, und die Achse

$$a_i a_j \quad \left( i = 1 + \frac{d}{2}, \quad j = \frac{n+2}{2} + \frac{d}{2} \right)$$

ist ebenfalls Symmetrieachse. Die Wörter  $a_1 a_2 \cdots a_i$  und  $a_i a_{i+1} \cdots a_{1+d}$  sind verschieden, weil  $d$  primitive Periode ist. Zu jedem symmetrischen Kreiswort gibt es somit zwei verschiedene  $((n+2)/2)$  stellige Wörter  $a_1 a_2 \cdots a_{(n+2)/2}$  und  $a_i a_{i+1} \cdots a_j$ , die keine Doppelbuchstaben, aber eventuell gleiche Anfangs- und Endbuchstaben aufweisen; jedes  $((n+2)/2)$  stellige Wort kommt dabei genau einmal vor. Somit gibt es  $(r(r-1)^{n/2})/2$  symmetrische Kreiswörter.

In  $a(n) + (r(r-1)^{n/2})/2$  ist jedes symmetrische Wort doppelt gezählt, jedes asymmetrische Wort bildet mit dem umgekehrt gelesenen Wort dasselbe Diederwort. Somit wird

$$b(n) = \frac{a(n)}{2} + \frac{r(r-1)^{n/2}}{4},$$

falls  $n$  gerade.

Der Aufgabensteller sandte eine zweite Lösung.

**Aufgabe 852.**  $(x_n), (y_n)$  seien reelle Zahlenfolgen mit

$$y_1 = x_1 \quad \text{sowie} \quad y_n = k x_n + x_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

Dabei ist  $k \neq 0$  ein reeller Parameter. Genau für welche Werte von  $k$  gilt die Äquivalenz

$$(x_n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow (y_n) \text{ konvergent?}$$

W. Janous, Innsbruck, A

Solution: If  $x_n \rightarrow x$  as  $n \rightarrow \infty$ , then  $y_n \rightarrow (k+1)x$  as  $n \rightarrow \infty$ , for any value of  $k$ . The converse implication:

$(y_n)$  convergent  $\Rightarrow$   $(x_n)$  convergent

holds if and only if  $|k| > 1$ .

Proof: If  $k \neq -1$ ,  $0 < |k| \leq 1$ , put  $x_n := (-1)^n k^{-n}$ . Then  $(x_n)$  is not convergent, but  $(y_n)$  clearly is. In fact  $y_n = 0$  for all  $n \geq 2$ . If  $k = -1$ , put  $x_n := \sqrt{n}$ , then  $x_n \rightarrow \infty$ , whereas  $y_n = -(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{-1} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Now suppose  $|k| > 1$ . Then  $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m k^{-m-1}$  is absolutely convergent with sum  $(k+1)^{-1}$ . Moreover, it is easily verified, by induction on  $n$ , that

$$x_n = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^m k^{-m-1} y_{n-m} + (-1)^{n-1} k^{1-n} y_1.$$

Hence, if  $y_n \rightarrow y$  as  $n \rightarrow \infty$ , then [by direct estimation or e.g. by Lebesgue's dominated convergence theorem]  $x_n \rightarrow y(k+1)^{-1}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

All the above results are valid in the complex case as well.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), J.T. Groenman (Groningen, NL), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), H.-J. Kanold (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), H. J. Seiffert (Berlin, BRD).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1982* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625 B (Band 25, S.68), Problem 645 A (Band 26, S.46), Problem 672 A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724 A (Band 30, S.91), Problem 764 A (Band 31, S.44).

**Aufgabe 869.** Es seien zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  gegeben, die nicht in derselben Ebene und nicht auf derselben Kugel liegen, sich nicht schneiden und nicht ineinander verschlungen sind. Dann gibt es genau vier Kreise, darunter eventuell eine Gerade, welche  $k_1$  und  $k_2$  berühren. Man beschreibe deren räumliche Konstruktion.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Aufgabe 870.** In der Ebene seien endlich viele Gitterpunkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen, durch einen einfachgeschlossenen Polygonzug verbunden. Man beweise: Liegt auf dem Polygonzug insgesamt eine ungerade Anzahl von Gitter-

punkten, so durchläuft er auch einen Punkt, dessen verdoppelte Koordinaten ungerade ganze Zahlen sind.

H. Müller, Hamburg, BRD

**Aufgabe 871.** Die Winkel eines ebenen Dreiecks seien  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Man schätze die Summe

$$\sum_{i=1}^3 [\sin^4(a_i/4) + \cos^4(a_i/4)]$$

nach oben und unten bestmöglich ab.

F. Leuenberger, Feldmeilen

**Aufgabe 872A.** Es seien  $r_1, \dots, r_n, n > 1$ , die Radien von  $n$  Kreisen im Einheitsquadrat  $Q = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ , die keinen gemeinsamen inneren Punkt haben und alle die  $x$ -Achse berühren. Ferner sei  $S_n = r_1 + \dots + r_n$ . In einem alten Notizbuch behauptete ich:  $S_n < C \log n$ , aber  $S_n > C \log n / \log \log n$  ist noch möglich. P. Erdős

**Berichtigung zu Aufgabe 864.** Es muss heissen: Im ebenen Dreieck  $ABC$  mit  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$  sowie  $a < b$  seien die beiden durch  $A$  und  $B$  verlaufenden *äusseren* Winkelhalbierenden gleich lang.

## Literaturüberschau

J. Schärf, H. Schierer, W. Baron und R. Strecha: Programmieren mit dem Taschenrechner TI-51-III. 143 Seiten, DM 19.80. Oldenburg, Wien, München 1978.

In letzter Zeit fanden immer mehr auch programmierbare Taschenrechner Eingang in die Schule. Für den Lehrer stellt sich das Problem, diese Rechner im Unterricht zu nutzen. Zudem muss er über die verschiedenen Modelle Bescheid wissen und Schüler bei Anschaffungsfragen beraten können. Das vorliegende Buch zeigt zunächst die Verwendung des TI-51-III als gewöhnlichen Taschenrechner und anschliessend Schulbeispiele von einfachen Programmen mit höchstens einer Schleife und ohne bedingte Sprunganweisungen. Diese Beispiele sind mühelos auf andere Modelle von programmierbaren Rechnern übertragbar. H. Walser

A.J. Weir: General Integration and Measure, Band 2, XI und 298 Seiten, £5.25. Cambridge University Press, 1974.

Es handelt sich in Wirklichkeit um den 2. Band des Buches «Lebesgue Integration and Measure» (Cambridge University Press, 1973); der neue Titel ist durch die Tatsache gerechtfertigt, dass dieser Band vom ersten zum grössten Teil logisch unabhängig gemacht wurde. Obwohl im Vergleich zum 1. Band ein Schritt weiter in die Abstraktion gemacht wurde (im ersten Band wird nur das Lebesguesche Integral behandelt, im zweiten dagegen das abstrakte Integral, gewöhnlich aber nur für  $\sigma$ -endliche Masse), handelt es sich trotzdem um ein betont didaktisches Buch. Der didaktische Aspekt kommt zum Vorschein in den vielen Beispielen und Übungsaufgaben (mit Lösungen oder Hinweisen zu den Lösungen) wie auch in den vielen «Gesprächen» des Verfassers mit dem Leser. Wiederholungen und parallele Entwicklungen werden dabei nicht gescheut.

Das Buch enthält die Konstruktion des Integrals nach mehreren Methoden, den Rießschen Darstellungssatz (auf lokal kompakten, metrisierbaren,  $\sigma$ -kompakten Räumen), das Produkt von zwei Massen (einschliesslich die Sätze von Fubini und Tonelli), den Satz von Radon-Nikodym und die  $L^p$ -Räume (einschliesslich ihre Dualität). Der Integrationstheorie auf den euklidischen Räumen wird besondere Aufmerksamkeit gewidmet. C. Constantinescu