

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1981)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Abschätzung der Primzahlfunktion mit elementaren Methoden

In Anfängerkursen über elementare Zahlentheorie wird meistens

$$c_1 \frac{n}{\log n} < \pi(n) < c_2 \frac{n}{\log n} \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad (1)$$

mit $\pi(n)$ als Anzahl der Primzahlen $\leq n$ bewiesen. In Lehrbüchern findet man für $(c_1; c_2; n_0)$ zum Beispiel $(1/12; 4; 2)$ in [8], $(\log 2/4; 32 \log 2; 2)$ in [6], $(1/6; 6; 2)$ in [1] oder $(2/3; 8/5; 3)$ in [5] und [9]. Der Primzahlsatz garantiert in (1) $c_1 = 1 - \varepsilon$, $c_2 = 1 + \varepsilon$ und die Existenz von $n_0 = n_0(\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$. Aus den bekannten Beweisen ist jedoch eine explizite Bestimmung von $n_0(\varepsilon)$ undurchführbar. In [7] ist $(1; 5/4; 114)$ für (1) genannt, allerdings wurde dies mit funktionentheoretischen Mitteln und mit Hilfe von Rechenanlagen erzielt. Hier soll ganz elementar $(0,92; 1,26; 11)$ für (1) bewiesen werden (siehe (15) und (16)).

Für Primzahlen p und ganze Zahlen $h > 1$, a wird

$$A_h = \frac{(30h)!h!}{(15h)!(10h)!(6h)!} = \prod_{p \leq 30h} p^a \quad (2)$$

betrachtet. Hierin gilt für a nach der Formel von Legendre

$$a = \sum_{i=1}^t \Delta_i = \sum_{i=1}^t \left(\left[\frac{30h}{p^i} \right] + \left[\frac{h}{p^i} \right] - \left[\frac{15h}{p^i} \right] - \left[\frac{10h}{p^i} \right] - \left[\frac{6h}{p^i} \right] \right) \quad (3)$$

mit $t = [\log 30h / \log p]$ und $[x]$ als grösster ganzer Zahl $\leq x$.

Wird $h = vp^i + r$, $0 \leq r < p^i$, $v \geq 0$, ganz, eingesetzt, so folgt

$$\Delta_i = \left[\frac{30r}{p^i} \right] - \left[\frac{15r}{p^i} \right] - \left[\frac{10r}{p^i} \right] - \left[\frac{6r}{p^i} \right]. \quad (4)$$

Sodann ergibt r mit $sp^i/30 \leq r < (s+1)p^i/30$ und $0 \leq s \leq 29$

$$-1 < -\frac{s}{30} \leq \Delta_i = s - \left[\frac{s}{2} \right] - \left[\frac{s}{3} \right] - \left[\frac{s}{5} \right] \leq s - \frac{s-1}{2} - \frac{s-2}{3} - \frac{s-4}{5} < 2.$$

Damit gilt auch $0 \leq \Delta_i \leq 1$, das heisst, A_h ist ganzzahlig, und aus (3) folgt $a \leq t$, also $p^a \leq 30h$. Einsetzen in (2) ergibt

$$\begin{aligned} A_h &\leq \prod_{p \leq \sqrt{30h}} (30h) \prod_{\sqrt{30h} < p < 15h} p \prod_{15h < p < 30h} p \\ &\leq (30h)^{\pi(\sqrt{30h})} (15h)^{\pi(15h) - \pi(\sqrt{30h})} (30h)^{\pi(30h) - \pi(15h)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Weiterhin gilt $A_1 = 1$ für alle p mit $5h < p < 30h$, was mit A_1 aus (3) jeweils für $5h < p < 6h$, $6h < p < (15/2)h$, $(15/2)h < p < 10h$, $10h < p < 15h$ und $15h < p < 30h$ unmittelbar einzusehen ist. Das Produkt aller dieser Primzahlen teilt also die ganze Zahl A_h , das heisst

$$A_h \geq \prod_{5h < p < 15h} p \prod_{15h < p < 30h} p \geq (5h)^{\pi(15h) - \pi(5h)} (15h)^{\pi(30h) - \pi(15h)}. \quad (6)$$

Für

$$\gamma_n = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

lässt sich elementar nachweisen (siehe etwa [2] oder [3])

$$e = \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n > \gamma_{n+1} > \dots > 2. \quad (8)$$

Die rechte Seite von (8) lässt sich bestmöglich (Stirlingsche Formel) durch $\sqrt{2\pi} = \lim \gamma_n$ ersetzen, was aber im weiteren nicht benötigt wird, so dass auf den Beweis mit Hilfe des Wallisschen Produkts (siehe etwa [2]) hier verzichtet werden kann.

Wird $n!$ aus (7) in (2) eingesetzt und (8) benutzt, so ergeben sich

$$A_h = \frac{\gamma_{30h} \gamma_h}{\gamma_{15h} \gamma_{10h} \gamma_{6h}} \frac{e^{30ha}}{\sqrt{30h}}, \quad a = \frac{1}{30} \log(2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5) = 0,921292\dots, \quad (9)$$

$$e^{-1,16} < \frac{2}{\gamma_{15} \gamma_{10}} < \frac{\gamma_{30h}}{\gamma_{15h} \gamma_{10h}} < \frac{\gamma_{30h} \gamma_h}{\gamma_{15h} \gamma_{10h} \gamma_{6h}} < \frac{\gamma_h}{\gamma_{10h} \gamma_{6h}} < \frac{e}{4}, \quad (10)$$

$$30ha - \frac{1}{2} \log 30h - 1,16 < \log A_h < 30ha. \quad (11)$$

Aus (5) und (11) werden

$$\pi(30h) \log 30h - (\pi(15h) - \pi(\sqrt{30h})) \log 2 > 30ha - \frac{1}{2} \log 30h - 1,16$$

und mit der Abkürzung

$$\eta_n = \frac{\pi(n) \log n}{n} \quad (12)$$

$$\eta_{30h} > a + \frac{\pi(15h) - \pi(\sqrt{30h})}{30h} \log 2 - \frac{\log 30h}{60h} - \frac{1,16}{30h}. \quad (13)$$

Für n mit $30h \leq n < 30(h+1)$ folgt aus (13) wegen $n \eta_n > (n-30) \eta_{30h}$

$$\eta_n > \left(1 - \frac{30}{n}\right) \left(a + \left(\pi\left(\frac{n-30}{2}\right) - \sqrt{n}\right) \frac{\log 2}{n} - \frac{\log(n-30)}{(n-30) \cdot 2} - \frac{1,16}{n-30}\right). \quad (14)$$

Für $n \geq 1160$ ist die rechte Seite von (14) sicher $> a$, denn nach Ersetzen von $\pi((n-30)/2)$ durch (12) und Anwenden von $\eta_m > a$ für $m < n$ als Induktionsvoraussetzung ($m \geq 11$) ergibt sich

$$\frac{a(n-30)\log 2}{2\log \frac{n-30}{2}} - \sqrt{n} \log 2 - \frac{\log(n-30)}{2} > 30a + 1,16,$$

was wegen der Monotonie der linken Seite für $n \geq 1160$ erfüllt ist.

Zur Sicherung des Induktionsanfangs werden noch die kleinsten ganzen Zahlen n_{i+1} ($1 \leq i \leq 15, n_1 = 1160$) mit $\pi(n_{i+1})\log(n_i-1) \geq a(n_i-1)$ aus einer Primzahltafel bestimmt ($n_2 = 881, n_3 = 659, \dots, n_{10} = 73, \dots, n_{16} = 11$), und damit gilt $\eta_n > a$ auch für $n_{i+1} \leq n < n_i$ wegen der Monotonie von $n/\log n$.

Zusammen ist bewiesen

$$\pi(n) > a \frac{n}{\log n} > 0,921292 \frac{n}{\log n} \quad \text{für } n \geq 11. \quad (15)$$

Aus (6) und (11) mit der Abkürzung (12) folgt

$$\eta_{30h} < \left(1 + \frac{\log 2}{\log 15h}\right) \left(a + \frac{1}{6} \eta_{5h} + \frac{\log 3}{2 \log 15h} \eta_{15h}\right).$$

Mit $30(h-1) \leq n < 30h$ und $n \geq 380\,000$ folgt hieraus wegen $n \eta_n < (n+30) \eta_{30h}$

$$\eta_n < \left(1 + \frac{30}{n}\right) \left(1 + \frac{\log 2}{\log(n/2)}\right) \left(a + \frac{1}{6} \eta_{5h} + \frac{\log 3}{2 \log(n/2)} \eta_{15h}\right) < \eta_{113},$$

wenn $\eta_m \leq \eta_{113} < 1,255059$ für $m < n$ als Induktionsvoraussetzung benutzt wird ($m \geq 2$).

Für den Induktionsanfang werden aus einer Primzahltafel die grössten ganzen Zahlen n_{i+1} ($1 \leq i \leq 76, n_1 = 117$) mit $\pi(n_{i+1})\log(n_i+1) < \eta_{113}(n_i+1)$ bestimmt ($n_2 = 130, n_3 = 138, \dots, n_{30} = 1300, \dots, n_{77} = 439492$), und damit gilt $\eta_n < \eta_{113}$ auch für $n_i < n \leq n_{i+1}$. Für $2 \leq n \leq 117$ ist $\eta_n \leq \eta_{113}$ leicht nachzuprüfen, und somit gilt

$$\pi(n) \leq \eta_{113} \frac{n}{\log n} < 1,255059 \frac{n}{\log n} \quad \text{für } n \geq 2. \quad (16)$$

Die Abschätzung nach unten lässt sich mit dem Ansatz A_h aus (2) bei grösserem n_0 nicht verbessern. Bei $n = 113$ ist η_n maximal. Mit sehr grossem n_0 ist die obere Abschätzung mit dem Ansatz (2) bis zu $\eta_n < 1,106$ zu verbessern. Diese Werte sind asymptotisch schon bei Tschebyschew (siehe [10] oder [4]) zu finden.

Heiko Harborth, Hans-Joachim Kanold, Arnfried Kemnitz, TU Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 T.M. Apostol: Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1976.
- 2 J.C. Burkill: A First Course in Mathematical Analysis. Cambridge University Press, London 1962.
- 3 H.-J. Kanold: Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel. El. Math. 24, 109–110 (1969).
- 4 E. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. a) B.G. Teubner, Leipzig 1909, b) Chelsea Publishing Co., New York 1953 (2. Aufl.).
- 5 R. Mönkemeyer: Einführung in die Zahlentheorie. Schroedel-Schöningh, Hannover 1971.
- 6 I. Niven und H.S. Zuckerman: An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, New York 1972.
- 7 J.B. Rosser und L. Schoenfeld: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. Math. 6, 64–94 (1962).
- 8 W. Sierpiński: Elementary Theory of Numbers. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1964.
- 9 E. Trost: Primzahlen. Birkhäuser, Basel 1968.
- 10 P.L. Tschebyschew: Mémoires sur les nombres premiers. J. Math. pures appl. (1) 17, 366–390 (1852).

Aufgaben

Aufgabe 850. $\tau(n)$ bezeichne die Anzahl der Teiler d_i von n : $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{\tau(n)} = n$. Wir setzen

$$g(n) := 1 + \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} \frac{d_i}{d_{i+1}}, \quad h(n) := \frac{\tau(n)}{g(n)}.$$

Man zeige, dass $\frac{\log n}{\log \log n}$ die richtige Größenordnung von $h(n)$ ist. P. Erdős

Lösung: Wir setzen

$$f(n) := h(n) \frac{\log \log n}{\log n}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$$

und zeigen, dass $L = 1$ ist.

Beweis: 1. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein, fest gewählt; sei $n = p^{[p^{1-\varepsilon}]}$, $p \in \mathbf{P}$. Aus

$$f(n) = \frac{[p^{1-\varepsilon}] + 1}{1 + \frac{[p^{1-\varepsilon}]}{p}} \cdot \frac{\log \log p + \log [p^{1-\varepsilon}]}{[p^{1-\varepsilon}] \log p} = \frac{1 + \frac{1}{[p^{1-\varepsilon}]}}{1 + \frac{[p^{1-\varepsilon}]}{p}} \left(\frac{\log \log p}{\log p} + \frac{\log [p^{1-\varepsilon}]}{\log p} \right)$$

folgt

$$f(n) \rightarrow 1 - \varepsilon \quad \text{für } p \rightarrow \infty.$$