

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	36 (1981)
<b>Heft:</b>	6
<b>Artikel:</b>	Die Methode der finiten Elemente zur Lösung von elliptischen Randwertaufgaben
<b>Autor:</b>	Schwarz, H.R.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-35557">https://doi.org/10.5169/seals-35557</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

zehn Hohlkanten aufweist<sup>2)</sup>). Dieses Ikosaeder besitzt übrigens neben der Wackelstellung zwei weitere reelle, jedoch überschlagene Positionen; nach dem in Abschnitt 3 dargelegten Verfahren findet man nämlich noch

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,9834, & y_1 &= -0,8403, & z_1 &= 1,2701; \\ x_2 &= -0,7827, & y_2 &= -1,2091, & z_2 &= 0,3463. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ein Umspringen des schwierig zu bauenden Stabmodells zwischen diesen beiden Positionen findet trotz der verwirrenden Struktur des Stabwerks bei richtiger Anordnung der Stäbe tatsächlich statt. Der Übergang zur Wackelform ist allerdings, abgesehen von der übermässigen Beanspruchung des Materials, schon aus topologischen Gründen nicht möglich.

W. Wunderlich, Wien

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. Connelly: An immersed polyhedral surface which flexes. Indiana Univ. Math. J. 25, 965–972 (1976).
- 2 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. Math. Mag. 51, 165–170 (1978).
- 3 B. Jessen: Orthogonal icosahedra. Nordisk Mat. Tidsskr. 15, 90–96 (1967).
- 4 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche. El Math. 20, 25–32 (1965).
- 5 W. Wunderlich: Wackelikosaeder. Geometriae dedicata. Im Druck.

# Die Methode der finiten Elemente zur Lösung von elliptischen Randwertaufgaben

## 1. Zur Problemstellung

In einem früheren Beitrag [5] wurde die historische Entwicklung der Methode der finiten Elemente aus der Sicht der ingenieurmässigen Anwendungen skizziert, wobei aber schon darauf hingewiesen wurde, dass das Verfahren unter diesem Namen später auch zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen herangezogen wurde. Im folgenden wollen wir uns nur mit einem konkreten Fall befassen und daran den Grundgedanken und die wesentlichen Teilschritte bis zur Lösung der Aufgabe darstellen. Wir betrachten lineare elliptische Randwertaufgaben mit Laplaceschem Differentialoperator, welche in einem weitgehend beliebigen Grundgebiet und unter recht allgemeinen Randbedingungen zu lösen sind. Mit dieser

2) Mit den bei  $\mu$  und  $\nu$  zugelassenen negativen Vorzeichen werden die Ungleichungen in (1.1) ausser Kraft gesetzt.

mathematischen Aufgabenstellung werden eine Reihe von typischen Problemen der Physik und der Elektrotechnik erfasst. Gegenüber den geläufigen und leichter verständlichen Differenzenmethoden weist das Verfahren der finiten Elemente einige für die Rechenpraxis ins Gewicht fallende Vorteile auf. So erlaubt die Methode eine sehr flexible und problemgerechte Approximation des Grundgebietes, eine eventuell notwendige, nur lokal feinere Diskretisation des Gebietes, und sie führt stets auf lineare Gleichungssysteme mit symmetrischer und positiv definiter Matrix. Die genannten Eigenschaften erklären die Beliebtheit und die Verbreitung der Methode zur praktischen Lösung von elliptischen Randwertaufgaben.

## 2. Theoretische Grundlage

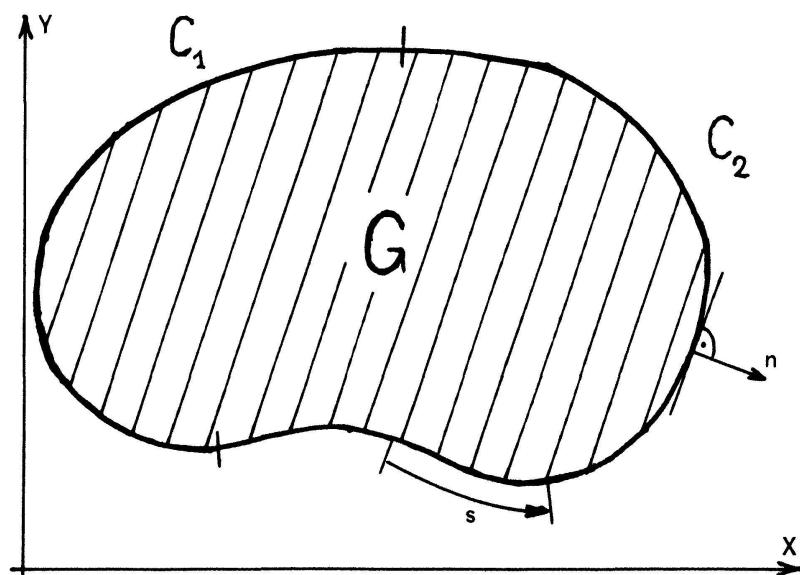
In einem vorgegebenen zusammenhängenden Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  mit dem stückweise stetig differenzierbaren Rand  $C$  soll folgende typische elliptische Randwertaufgabe gelöst werden:

$$u_{xx} + u_{yy} + \rho(x, y)u = f(x, y) \quad \text{in } G, \quad (1)$$

$$u = \varphi(s) \quad \text{auf } C_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(s)u = \gamma(s) \quad \text{auf } C_2. \quad (3)$$

Darin bedeuten  $\rho(x, y) \leq 0$  und  $f(x, y)$  in  $G$  gegebene Funktionen des Ortes,  $s$  die Bogenlänge auf dem Rand,  $\varphi(s)$  eine gegebene Funktion der Bogenlänge auf einem Teil des Randes  $C_1$ ,  $\alpha(s)$  und  $\gamma(s)$  gegebene Funktionen auf dem Rest des Randes  $C_2$  mit der Eigenschaft  $C_1 \cup C_2 = C$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  und  $\partial u / \partial n$  die Ableitung von  $u$  in Richtung der äusseren Normalen der Randkurve  $C_2$  (vgl. Fig. 1). Eines der beiden Randstücke  $C_1$  oder  $C_2$  kann leer sein.



Figur 1

Die Behandlung und numerische Lösung der elliptischen Randwertaufgabe (1), (2), (3) nach der Methode der finiten Elemente beruht entweder auf einem Extremalprinzip oder auf der Methode von Galerkin [4]. Im folgenden soll das Extremalprinzip die Grundlage bilden. So gilt der fundamentale

**Satz.** *Die mindestens stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion  $u(x, y)$ , welche das Funktional*

$$\begin{aligned} I[u] = & \iint_G \left[ \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2} \rho(x, y) u^2 + f(x, y) u \right] dx dy \\ & + \oint_C \left[ \frac{1}{2} a(s) u^2 - \gamma(s) u \right] ds \end{aligned} \quad (4)$$

*minimiert unter Berücksichtigung der einzigen Nebenbedingung (2), löst notwendigerweise die Randwertaufgabe (1), (2), (3).*

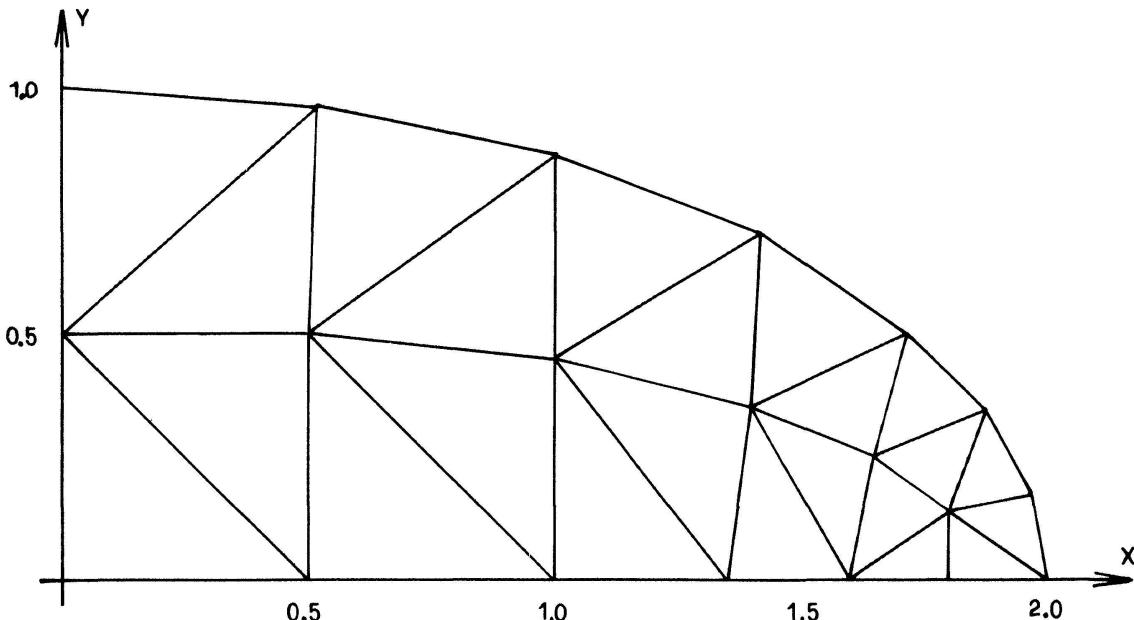
Für den Beweis des Satzes sei etwa auf [4, 6] verwiesen.

Die Aussage des Satzes zeigt gleichzeitig eine für die praktische Durchführung äußerst wichtige Unterscheidung der beiden Randbedingungen der Randwertaufgabe auf. In der Formulierung als Extremalaufgabe ist nur die Dirichletsche Randbedingung (2) zu berücksichtigen, welche deshalb oft als Zwangsbedingung bezeichnet wird. Die Cauchysche Randbedingung (3) erweist sich beim Beweis des Satzes mittels Variationsrechnung als eine natürliche Nebenbedingung, welche die Lösungsfunktion der Extremalaufgabe automatisch erfüllt. Dirichletsche Randbedingungen auf dem Teilstück  $C_1$  sind aber einfacher zu berücksichtigen als Cauchysche Randbedingungen auf  $C_2$ .

### 3. Das prinzipielle Vorgehen

Zur approximativen Lösung der Extremalaufgabe (4) unter Berücksichtigung von (2) wird das Gebiet  $G$  zunächst in einfache Teilgebiete, den *Elementen*, zerlegt. Als Elemente kommen Dreiecke, Parallelogramme, Vierecke und in Verfeinerung auch krummlinige Dreiecke und Vierecke in Frage. In Figur 2 ist eine konkrete grobe Einteilung einer Viertelellipse mit den Halbachsen  $a=2$  und  $b=1$  in geradlinige Dreieckelemente dargestellt. Mit einer dem Gebiet  $G$  angepassten, evtl. lokal feineren Triangulierung erreicht man selbst mit geradlinigen Elementen eine gute Approximation von  $G$ .

In jedem der Elemente wird für die gesuchte Funktion  $u(x, y)$  ein problemgerechter Ansatz so gewählt, dass insbesondere die im Satz geforderte Stetigkeitsbedingung beim Übergang von einem Element ins benachbarte leicht zu erfüllen ist. Hierfür eignen sich ganzrationale Funktionen der beiden Ortskoordinaten sehr gut, wie beispielsweise lineare oder quadratische Funktionen für Dreieckelemente.



Figur 2

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y, \quad (5)$$

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2. \quad (6)$$

Eine lineare Funktion (5) ist in einem beliebigen Dreieck eindeutig bestimmt durch die drei Funktionswerte in den Eckpunkten. Auf jeder Seite des Dreiecks reduziert sich (5) auf eine lineare Funktion der Bogenlänge, welche durch die beiden Funktionswerte in den Eckpunkten eindeutig festgelegt ist. Bei übereinstimmenden Funktionswerten in den Seitenendpunkten von zwei angrenzenden Dreieckelementen ist damit die Stetigkeit des Funktionsansatzes gewährleistet. Die stückweise stetige Differenzierbarkeit ist für (5) offensichtlich auch erfüllt.

Zur eindeutigen Festlegung eines quadratischen Ansatzes (6) in einem beliebigen Dreieck sind die sechs Funktionswerte in den Eckpunkten und in den Seitenmittelpunkten erforderlich. Die zugehörige zweidimensionale Interpolationsaufgabe ist stets eindeutig lösbar [4]. Der Ansatz (6) reduziert sich zudem auf jeder Dreiecksseite auf eine quadratische Funktion der Bogenlänge, welche ihrerseits durch die drei Funktionswerte in den beiden Endpunkten und im Mittelpunkt aufgrund der Eindeutigkeit des quadratischen Interpolationspolynoms wiederum eindeutig bestimmt ist [6]. Analog zum linearen Ansatz folgen daraus die erforderlichen Stetigkeitsbedingungen.

Aus dem eben Gesagten wird klar, dass die Funktionswerte  $u_i$  in den genannten Punkten  $P_i$  die problemgerechten Größen darstellen, um die Ansätze in jedem Element eindeutig zu beschreiben. Die Eckpunkte, für den quadratischen Ansatz auch die Seitenmittelpunkte, stellen die *Knotenpunkte* und die zugehörigen, zu bestimmenden Funktionswerte die *Knotenvariablen* der Aufgabe dar.

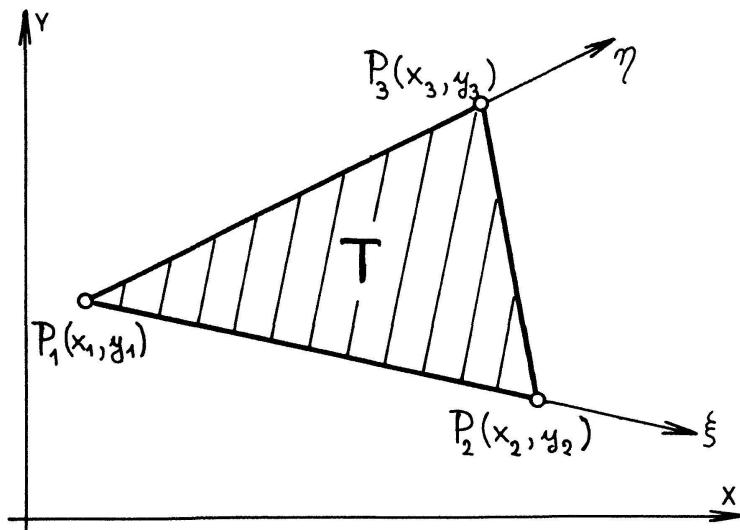
Sobald man eine problemgerechte Triangulierung des Grundgebietes  $G$  und den Typ des Ansatzes gewählt hat, ist das Funktional (4) in Abhängigkeit der Knotenvariablen darzustellen. Diese Aufgabe erledigt man für die einzelnen Elemente,

die im einfachsten Fall Dreiecke und geradlinige Kantenstücke sind. Unter der vereinfachenden Annahme, dass sowohl die Funktionen  $\rho(x, y)$  und  $f(x, y)$  wenigstens für die einzelnen Dreieckelemente als auch  $a(s)$  und  $\gamma(s)$  für die einzelnen Kantenstücke konstant sind, reduziert sich die Aufgabe darauf, die Integrale

$$I_1 = \iint_T (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad I_2 = \iint_T u^2 dx dy, \quad I_3 = \iint_T u dx dy, \quad (7)$$

$$I_4 = \int_R u^2 ds, \quad I_5 = \int_R u ds \quad (8)$$

für den betreffenden Ansatz zu berechnen. Darin bedeutet  $T$  ein Dreieck in beliebiger Lage und  $R$  ein Randstück des approximierten Randes  $C_2$ . Sei  $T$  ein allgemeines Dreieck nach Figur 3 mit den Eckpunkten  $P_i(x_i, y_i)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), welche im Gegenuhrzeigersinn durchnumeriert sind. Zur tatsächlichen Durchführung der Integration wird zweckmässigerweise ein lokales  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem eingeführt, dessen Nullpunkt im Eckpunkt  $P_1$  liege. Im lokalen Koordinatensystem sollen weiter die beiden andern Eckpunkte die normierten Koordi-



Figur 3

ten  $(1, 0)$  bzw.  $(0, 1)$  erhalten, so dass dem Dreieck  $T$  das Einheitsdreieck  $T_0$  entspricht. Den Übergang leistet die linear affine Transformation

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Integrale (7) transformieren sich mit

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \quad (10)$$

$$dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} d\xi d\eta = J d\xi d\eta \quad (11)$$

nach einer elementaren Rechnung in

$$I_1 = a \iint_{T_0} u_\xi^2 d\xi d\eta + 2b \iint_{T_0} u_\xi u_\eta d\xi d\eta + c \iint_{T_0} u_\eta^2 d\xi d\eta, \quad (12)$$

$$I_2 = J \iint_{T_0} u^2 d\xi d\eta, \quad I_3 = J \iint_{T_0} u d\xi d\eta \quad (13)$$

mit den allein von der Geometrie des Dreiecks  $T$  abhängigen Konstanten

$$a = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2]/J, \quad (14)$$

$$b = -[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)]/J, \quad (15)$$

$$c = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]/J. \quad (16)$$

Die Werte für  $a$ ,  $b$  und  $c$  entstehen unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die partiellen Ableitungen  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\eta_x$  und  $\eta_y$  die Elemente der Inversen der Jacobi-Matrix der Transformation (9) sind.

Die fünf in (12) und (13) auftretenden Integrale sind nur vom verwendeten Ansatz im Dreieckelement  $T$  abhängig.

Für den linearen Ansatz (5) beispielsweise stellt sich die Funktion  $u(\xi, \eta)$  in den lokalen Koordinaten mit den Knotenvariablen  $u_1, u_2, u_3$  in den entsprechenden Eckpunkten dar als

$$u(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) u_1 + \xi u_2 + \eta u_3. \quad (17)$$

Nach Substitution von (17) in (12) und (13) und nach Ausführung der Integration ergibt sich offensichtlich für  $I_1$  und  $I_2$  je eine quadratische Form und für  $I_3$  eine lineare Form in den drei Knotenvariablen. Die Ergebnisse lassen sich mit dem Knotenelementvektor  $\mathbf{u}_e = (u_1, u_2, u_3)^T$  zusammenfassen in

$$I_1 = \mathbf{u}_e^T \mathbf{S}_e \mathbf{u}_e, \quad I_2 = \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{u}_e, \quad I_3 = \mathbf{b}_e^T \mathbf{u}_e. \quad (18)$$

Darin stellen  $\mathbf{S}_e$  die Steifigkeitselementmatrix,  $\mathbf{M}_e$  die Massenelementmatrix und  $\mathbf{b}_e$  den Elementvektor dar und sind zahlenmäßig gegeben durch [4]

$$\mathbf{S}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+2b+c & -(a+b) & -(b+c) \\ -(a+b) & a & b \\ -(b+c) & b & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_e = \frac{J}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_e = \frac{J}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Analog liefern  $I_4$  und  $I_5$  quadratische bzw. lineare Formen in den Knotenvariablen des Randstückes  $R$ .

Die Überlegungen übertragen sich sinngemäß auf den quadratischen Ansatz (6), wobei anstelle von (17) für  $u(\xi, \eta)$  eine Linearkombination von sechs Basisfunktionen mit den sechs Knotenvariablen  $u_1$  bis  $u_6$  der sechs Knotenpunkte des Dreieckelements tritt. Die Matrizen  $\mathbf{S}_e$  und  $\mathbf{M}_e$  sowie der Vektor  $\mathbf{b}_e$  sind von der Ordnung sechs [4].

Zusammengefasst liefert jedes Element (Dreieck oder Kantenstück) zum Funktional (4) eine quadratische Funktion der beteiligten Knotenvariablen in der Form

$$I_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{A}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{u}_e. \quad (20)$$

Die Addition über alle Elemente ergibt folglich für das Funktional eine quadratische Funktion in allen der Elementeinteilung und dem gewählten Ansatz entsprechenden und durchnumerierte Knotenvariablen  $u_1, u_2, \dots, u_N$

$$I = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{d}}^T \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T. \quad (21)$$

Der erhaltene Ausdruck (21) für das Funktional  $I[u]$  ist unter Berücksichtigung der Dirichletschen Randbedingung (2) zu minimieren. Dies geschieht dadurch, dass die Knotenvariablen, welche auf dem eventuell approximierten Randstück  $C_1$  liegen, gleich den vorgegebenen Randwerten gesetzt werden. Das bedeutet, dass die Randbedingungen vermöge Interpolation auf dem Rand approximativ erfüllt werden. Um für das Folgende eine konkrete Situation zu schaffen, sollen die nicht durch Randbedingungen vorgeschriebenen Knotenvariablen die Indizes 1 bis  $n$ , die übrigen die Indizes  $n+1$  bis  $N$  erhalten.

Werden nun die Randwerte in (21) eingesetzt, modifiziert sich (21) zum Ausdruck

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{d}^T \mathbf{u} + f, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, \quad (22)$$

worin  $\mathbf{A}$  die Untermatrix der Ordnung  $n$  von  $\tilde{\mathbf{A}}$  darstellt, gebildet aus den ersten  $n$  Zeilen und Kolonnen,  $\mathbf{d}$  aus  $\tilde{\mathbf{d}}$  hervorgeht und  $f$  eine Konstante bedeutet. Die notwendige Bedingung für ein Minimum von (22) lautet

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Die unbekannten Knotenvariablen ergeben sich als Lösung des symmetrischen Gleichungssystems (23) mit positiv definiter Matrix  $\mathbf{A}$ .

Damit ist der Lösungsgang vollständig skizziert, bestehend aus der geeigneten Triangulierung des Gebietes  $G$ , Numerierung der Knotenpunkte, Datenvorbereitung (Koordinaten der Eckpunkte und Daten der einzelnen Elemente), Kompilation der Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  und des Vektors  $\tilde{\mathbf{d}}$ , Berücksichtigung der Randbedingungen und Auflösung des Systems (23).

#### 4. Einiges zur Lösung der linearen Gleichungssysteme

Die zu lösenden linearen Gleichungssysteme (23) sind symmetrisch und besitzen eine positiv definite Koeffizientenmatrix. Die Gaußsche Elimination ist deshalb mit Pivots längs der Diagonale durchführbar, wobei die Symmetrie erhalten bleibt

[6]. Der erforderliche Rechenaufwand reduziert sich dabei auf rund die Hälfte im Vergleich zur Lösung eines allgemeinen Gleichungssystems.

Im Fall von komplexen Strukturen mit vielen Elementen [5] oder bei feiner Elementeinteilung des Gebietes im Fall von elliptischen Randwertaufgaben ist die Zahl der unbekannten Knotenvariablen sehr gross und beträgt in praktischen Anwendungen mehrere hundert bis mehrere tausend. Die Methode der finiten Elemente besitzt aber die wesentliche Eigenschaft, sehr schwach besetzte Gleichungssysteme zu liefern. Dies ist aufgrund der Komplilation der Gesamtmatrix der quadratischen Form offensichtlich, denn es können nur jene Elemente einen additiven Beitrag zur  $i$ -ten Zeile, zugehörig zur  $i$ -ten Knotenvariablen, liefern, denen die  $i$ -te Variable angehört, und zwar nur in jene aussendiagonalen Positionen, denen Knotenvariable entsprechen, welche denselben Elementen angehören. Im Vergleich zur grossen Zahl der Unbekannten sind in jeder Zeile relativ wenige Koeffizienten von Null verschieden. Die durchschnittliche Zahl der von Null verschiedenen Elemente pro Zeile ist stark problemabhängig und dann auch von den verwendeten Ansätzen. Sie bewegt sich in der Größenordnung zwischen 10 und 100.

Bei geeigneter Numerierung der Knotenvariablen erhält die Matrix  $A = (a_{ik})$  des Gleichungssystems eine *Bandstruktur*. Unter einer Bandmatrix mit der Bandbreite  $m < n$  versteht man eine Matrix mit der Eigenschaft

$$a_{ik} = 0 \quad \text{für alle } i, k \quad \text{mit } |i - k| > m. \quad (24)$$

Der Gaußsche Algorithmus mit Pivots in der Diagonale lässt die Bandstruktur unverändert. Folglich sind für die praktische Durchführung nur die Matrixelemente der Diagonale und etwa der  $m$  unteren Nebendiagonalen im Rechenautomaten zu speichern. Ferner beträgt der Rechenaufwand zur Lösung eines symmetrischen, positiv definiten Bandgleichungssystems größenordnungsmässig nur

$$Z_{\text{Band}} = \frac{1}{2} nm^2 \quad (25)$$

multiplikative Operationen [3]. Aus ökonomischen Gründen hinsichtlich Speicherplatz und Rechenaufwand ist die Bandbreite  $m$  zu minimieren. Zur Bestimmung der optimalen Numerierung sind heuristisch begründete Algorithmen entwickelt worden, welche auf graphentheoretischen Überlegungen beruhen [4].

Eine Verfeinerung des Begriffs der Bandstruktur führt zur *Hülle* oder *Enveloppe* einer Matrix. Sei  $f_i(A)$  der Kolonnenindex des ersten von Null verschiedenen Elementes  $a_{ij}$  der  $i$ -ten Zeile, d. h.

$$f_i(A) = \min \{j \mid a_{ij} \neq 0, j \leq i\}. \quad (26)$$

Damit definiert man die Enveloppe der Matrix  $A$  als die Menge der Indexpaare

$$\text{Env}(A) = \{(i, j) \mid f_i(A) \leq j \leq i, 1 \leq i \leq n\}. \quad (27)$$

Die Kardinalität der Enveloppe heisst das *Profil* der Matrix. Es kann leicht verifiziert werden, dass sich der Gaußsche Eliminationsprozess vollständig in der Hülle der Matrix  $A$  abspielt [4]. Damit kann der Speicherbedarf für die Matrix in der Regel recht drastisch auf das Profil reduziert werden.

Der zur Verfügung stehende Speicherplatz im Zentralspeicher von modernen Grossrechenanlagen reicht jedoch bei weitem nicht aus, die grossen Gleichungssysteme mit Speicherung der Elemente des Bandes oder der Hülle zu lösen. Deshalb sind spezielle Rechentechniken entwickelt worden, unter denen die Frontlösungsmethode [4] zu erwähnen ist. Hier wird der Aufbau der Gesamtmatrix  $A$  und der Eliminationsprozess in geeignetem Wechsel so vollzogen, dass bei einer Bandmatrix der Bandbreite  $m$  größenordnungsmässig nur etwa  $m^2/2$  Matrixelemente im Zentralspeicher gleichzeitig vorhanden sein müssen. Damit lassen sich sehr respektable Gleichungssysteme lösen.

Neben der direkten Eliminationsmethode, welche für lange Zeit als das effizienteste Vorgehen angesehen worden ist, gewinnen in neuester Zeit iterative Lösungsverfahren ihre praktische Bedeutung zurück und vermögen in vielen Fällen die Gleichungssysteme mit wesentlich kleinerem Speicherbedarf und auch Rechenaufwand zu lösen. Der grundsätzliche Vorteil der iterativen Methoden besteht nämlich darin, dass sie die gegebene Matrix des Systems unverändert benützen und somit die schwache Besetzung vollkommen ausnützen können. Für den Rechenprozess selbst sind deshalb nur die von Null verschiedenen Matrixelemente mit der Information ihrer Position abzuspeichern. Als besonders effizient erweisen sich zwei Modifikationen der Methode der konjugierten Gradienten von *Stiefel* und *Hestenes* [1, 3]. Falls eine sog. *Vorkonditionierung* des zu lösenden Gleichungssystems angewandt wird, liefert das iterative Verfahren die Lösung in erstaunlich wenig Iterationsschritten und damit mit entsprechend kleiner Rechenzeit [2, 4].

Dieser kleine Abriss möge zeigen, dass die Methode der finiten Elemente auf dem Gebiet der Numerik der linearen Algebra neue Akzente gesetzt und interessante Impulse vermittelt hat.

H.R. Schwarz, Universität Zürich

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Hestenes und E. Stiefel: Methods of conjugate gradients for solving linear systems. J. Res. Nat. Bur. Stand. 49, 409–436 (1952).
- 2 Th.A. Manteuffel: Shifted incomplete Cholesky factorization. Sparse Matrix Proceedings 1978, SIAM Philadelphia 1979, S.41–61.
- 3 H.R. Schwarz, H. Rutishauser und E. Stiefel: Numerik symmetrischer Matrizen, 2. Aufl. Teubner, Stuttgart 1972.
- 4 H.R. Schwarz: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart 1980.
- 5 H.R. Schwarz: Zur Methode der finiten Elemente. El. Math. 36, 1–8 (1981).
- 6 E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik, 5. Aufl. Teubner, Stuttgart 1976.