

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1981)
Heft: 6

Artikel: Kipp-Ikosaeder I
Autor: Wunderlich, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35556>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die ERMETH vereinigte nützliche Merkmale in einer Kombination, die selten anzutreffen war. Viele der Ideen hatten wir von unseren Gastaufenthalten in USA und von Besuchen in England mitgebracht. Weitere, überaus wertvolle Merkmale kamen auf Grund der Tatsache hinzu, dass mehrjährige Erfahrungen aus dem praktischen Betrieb mit der Z4 verwertet werden konnten. Die ERMETH-Equipe hatte damit einen Vorzug, den die wenigsten Hochschulgruppen, die mit dem Bau von Elektronenrechnern beschäftigt waren, aufzuweisen hatten.

Die ERMETH ging 1955 in Betrieb. Es war die letzte Gelegenheit für den Selbstbau eines Computers. Inzwischen hatte die Industrie den Ball aufgenommen, und eine kleine Gruppe an einer Hochschule hatte keine Chance mehr mitzuhalten. Nach einer Reihe von erfolgreichen Betriebsjahren hatte auch die ERMETH ausgedient. Damit zog sich das Institut für angewandte Mathematik von der Hardware-Szene, wo es ein kurzes, aber intensives Gastspiel gegeben hatte, zurück.

An der Software-Front ist die ETH unvermindert – und unverändert erfolgreich – tätig geblieben. Sowohl in der numerischen Analysis als auch in den Programmierungssprachen ist in den vergangenen Jahrzehnten ein ununterbrochener Fluss von bedeutenden und allgemein anerkannten Ergebnissen entstanden, der noch heute andauert. Die ETH Zürich ist auf der Landkarte der Computerwissenschaften deutlich sichtbar eingezeichnet; die Saat auf diesem Feld trägt reiche Früchte. Das Feld wurde von 1948 bis 1950 hergerichtet und erstmals beackert. Wie sah die Forschungsszene unseres Landes damals aus? Der Nationalfonds war bereits gegründet; der Wissenschaftsrat und das Bundesamt für Bildung und Wissenschaft existierten noch nicht. Aber die Zeit hatte ein gewaltiges Plus für sich: Es war eine Periode des raschen Aufstiegs; von Jahr zu Jahr standen mehr Mittel zur Verfügung. Es ist eine Erfahrungstatsache, die sich immer wieder bestätigt, dass solche Perioden für die Wissenschaften besonders fruchtbar sind.

Die Zeit der Mittelknappheit, in der wir heute leben, ist bedeutend schwieriger. Ich hoffe trotzdem, dass sich in 30 Jahren eine Gruppe von Zuhörern, so wie wir heute, in einem Hörsaal versammeln wird, um einer Pioniertat der Jahre 80 und 81 zu gedenken!

A. P. Speiser, Brown Boveri Baden

Kipp-Ikosaeder I

Zur Betrachtung stehen zentrisch-symmetrische *Ikosaeder* vom topologischen Typ des regulären, also berandet von 20 Dreiecken, die zu fünft in den 12 Ecken zusammenstossen. Ein konvexes Exemplar, etwa aus Karton oder dünnen Stäben zusammengebaut, wird nach dem klassischen Satz von A. Cauchy (1813) selbst bei gelenkiger Verbindung der Elemente starr sein. Bei vorhandenen Hohlkanten

braucht dies jedoch nicht der Fall zu sein, und wenn zwei mögliche Formen nicht allzu verschieden sind, so kann mit sanfter Gewalt ein *Umkippen* von einer Position in die andere herbeigeführt werden, wie dies für Kipp-Oktaeder bereits dargelegt wurde [4].

Rücken die beiden Positionen zusammen, so hat man ein *Wackelpolyeder* mit infinitesimaler Beweglichkeit, die praktisch durchaus merkbar ist. Nach der Entdeckung der merkwürdigen «orthogonalen Ikosaeder» durch Jessen [3] – das sind solche, deren Seitenflächen längs sämtlicher 30 Kanten rechtwinklig zusammenstossen – hat Goldberg [2] die Wackeligkeit einer hochsymmetrischen Sonderform dieser Ikosaeder bemerkt und in einer noch unveröffentlichten Note auch die entsprechenden Kippformen beschrieben. Während in einer demnächst erscheinenden Arbeit [5] des Verfassers gezeigt wird, dass überhaupt alle orthogonalen Ikosaeder (mit Mittelpunkt) sowie sämtliche dazu affinen Ikosaeder wackelig sind, scheint die Erfassung von Kipp-Ikosaedern in voller Allgemeinheit aussichtslos zu sein. Schon die vorliegende Behandlung von Sonderformen mit ausgeprägten Symmetrieverhältnissen führt auf Probleme höheren Grades.

Nachdem R. Bricard (1897) durch Stabmodelle realisierbare Gelenkoktaeder gefunden hat, die eine stetige Deformation endlichen Ausmasses gestatten, und Connelly [1] jüngst sogar einschlägige Kartonmodelle geschlossener 18-Fläche konstruiert hat, ist es wahrscheinlich, dass es auch stetig bewegliche Ikosaeder gibt. Hierüber ist allerdings noch nichts bekannt.

I. Ikosaeder mit drei orthogonalen Symmetrieebenen

1. Unter Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems ($O; x, y, z$) verteilen sich die zwölf Ikosaederecken auf drei in den Koordinatenebenen angenommene Rechtecke $ADA'D'$, $BEB'E'$ und $CFC'F'$, festgelegt durch

$$A(a, y, 0), B(0, b, z), C(x, 0, c) \quad \text{mit} \quad a > x > 0, \quad b > y > 0, \quad c > z > 0. \quad (1.1)$$

Die übrigen neun Ecken ergeben sich durch Spiegelung an den Koordinatenachsen gemäss Figur 2. Die Langseiten der Rechtecke bilden die Hohlkanten des Ikosaeders, und deren Enden sind jeweils mit den benachbarten Ecken der beiden anderen Rechtecke zu verbinden, so etwa A, D' mit B und E usw. Schreibt man noch die Längen dieser zusätzlichen Kanten durch $AB=d$, $BC=e$ und $CA=f$ vor, so läuft die Ermittlung der Gestalt des Ikosaeders auf die Auflösung des folgenden Gleichungstripels hinaus:

$$a^2 + (b-y)^2 + z^2 = d^2, \quad x^2 + b^2 + (c-z)^2 = e^2, \quad (a-x)^2 + y^2 + c^2 = f^2. \quad (1.2)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Bestimmung der acht Schnittpunkte von drei durch die Gleichungen beschriebenen *Drehzylindern* Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , ist also eine Aufgabe 8. Grades, die im allgemeinen nicht reduzibel und daher nicht elementar zu bewältigen ist. Nach Summierung der Gleichungen (1.2) sieht man übrigens, dass alle acht Schnittpunkte einer Kugel Σ

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = r^2 \quad \text{mit}$$

$$r^2 = \frac{1}{2} (d^2 + e^2 + f^2) - \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) \quad (1.3)$$

angehören.

2. In dem von Goldberg betrachteten Sonderfall $a=b=c$, $d=e=f$ vereinfachen sich die Verhältnisse, weil aus Symmetriegründen zwei Lösungen $x=y=z$ existieren, die gemäss (1.2) durch

$$2x^2 - 2ax + (2a^2 - d^2) = 0 \quad (2.1)$$

bestimmt sind. Ist die Diskriminante $\Delta = 2d^2 - 3a^2$ dieser quadratischen Gleichung positiv, also $a\sqrt{3/2} < d < a\sqrt{2}$, so hat die Gleichung zwei positive Lösungen, und man hat ein *Kipp-Ikosaeder* mit zwei reellen Positionen. Ist jedoch $\Delta = 0$, also $d/a = 1,225$, so liegt das durch $x=a/2$ gekennzeichnete *Wackelikosaeder* Goldbergs vor [2]¹⁾.

3. Zwecks Behandlung des allgemeinen Falles empfiehlt sich die Verschiebung des Koordinatensprungs O in den Mittelpunkt M der Kugel Σ (1.3). Mit der entsprechenden Koordinatentransformation

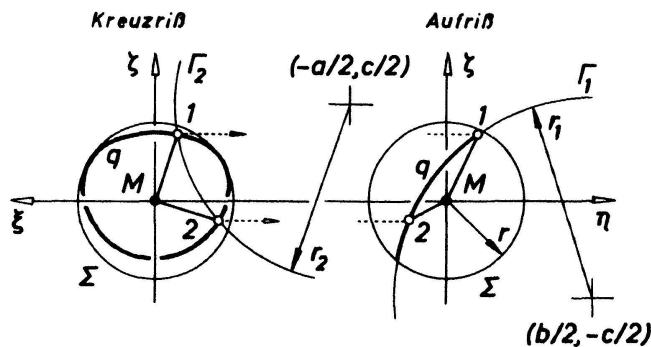
$$x = \xi + \frac{a}{2}, \quad y = \eta + \frac{b}{2}, \quad z = \zeta + \frac{c}{2} \quad (3.1)$$

gehen die Gleichungen (1.2) und (1.3) über in

$$\left(\eta - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{c}{2}\right)^2 = r_1^2 = d^2 - a^2, \quad \left(\xi + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c}{2}\right)^2 = r_2^2 = e^2 - b^2, \quad (3.2)$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2.$$

Am besten ist es nun, zunächst graphisch die Schnittkurve q des Drehzylinders Γ_1 mit der Kugel Σ (3.2, erste bzw. dritte Gleichung) zu ermitteln (Fig.1).



Figur 1. Graphische Auflösung des Gleichungssystems (3.2).

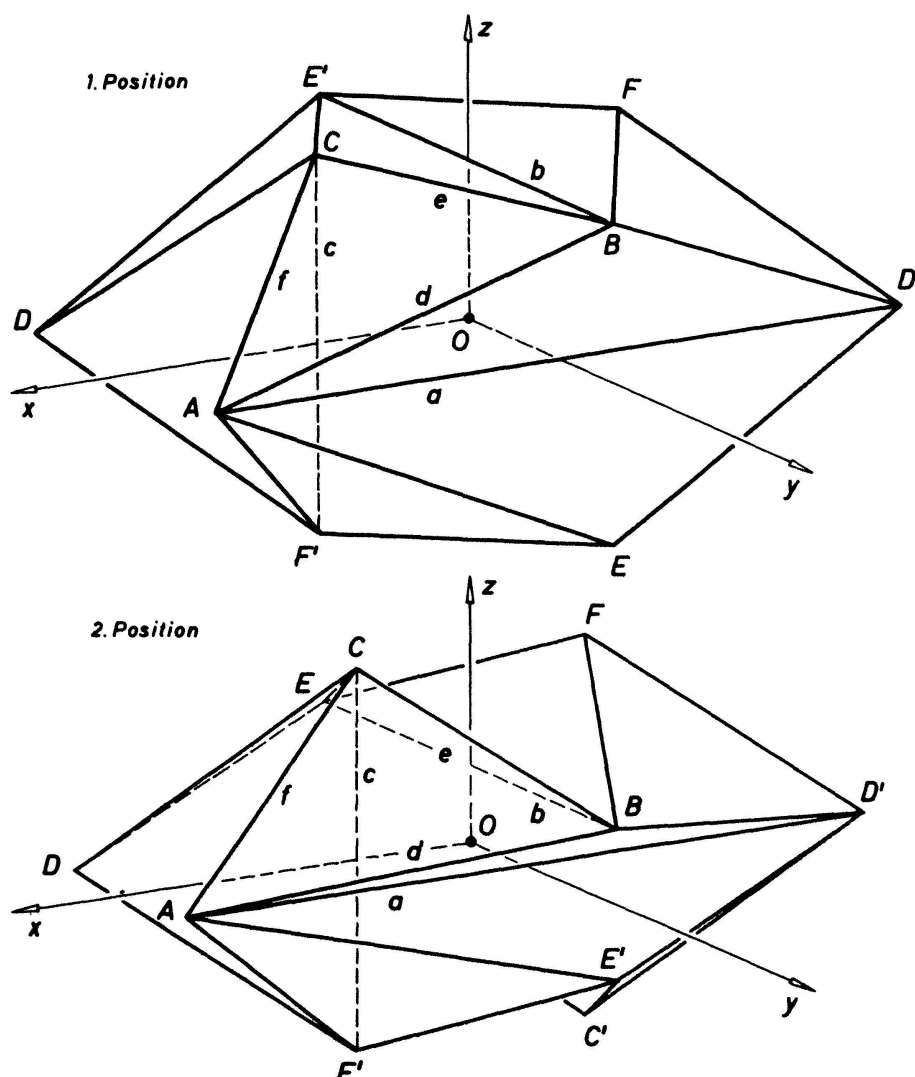
1) Die übrigen sechs Positionen dieses Ikosaeders sind imaginär und lassen sich nach Auflösung einer quadratischen Gleichung für $u = (x+y+z)/a$ (die $u = 3 \pm 2i\sqrt{6}$ liefert) auf eine kubische Gleichung in x zurückführen.

Diese Raumquartik q erscheint im Aufriss als doppelt überdeckter Kreisbogen, und ihr Kreuzriss ist nach geläufigen Regeln der darstellenden Geometrie leicht hinzuzufügen. Die so gewonnene (symmetrische) Bildkurve 4. Ordnung ist dann mit dem Bildkreis des Zylinders Γ_2 (3.2, zweite Gleichung) zu schneiden. Nach Zurückführung der Schnittpunkte $1, 2, \dots$ in den Aufriss können dann die Koordinaten ξ, η, ζ abgelesen werden. – Zur numerischen Auswertung berechnet man zu den so gefundenen (reellen) Näherungswerten für ζ aus den ersten beiden Gleichungen (3.2) die zugehörigen Werte η und ξ , um anschliessend durch fortgesetzte Verbesserung (regula falsi) auch die dritte Gleichung (3.2) zu befriedigen. Mit einem Taschencomputer geht dies ziemlich rasch.

Auf diese Weise wurden für die der Abbildung zugrundeliegende Annahme $a=8, b=6, c=4, d=9, e=f=7$ die Lösungswerte

$$\begin{array}{lll} x_1=3,5513, & y_1=3,6344, & z_1=3,3770; \\ x_2=2,6941, & y_2=2,2016, & z_2=1,6037 \end{array} \quad (3.3)$$

ermittelt. Figur 2 zeigt die beiden Positionen des gut funktionierenden Modells.



Figur 2. Kipp-Ikosaeder mit drei orthogonalen Symmetrieebenen.

4. Im Falle eines *Wackelikosaeders* der vorliegenden Art wird die Raumkurve q vom Zylinder Γ_2 berührt. Hier dürfen differentielle Änderungen der Positionsparameter x, y, z die Bedingungen (1.2) nicht beeinträchtigen. Damit die entsprechenden Gleichungen

$$(y-b)dy + z dz = 0, \quad x dx + (z-c) dz = 0, \quad (x-a)dx + y dy = 0 \quad (4.1)$$

für die Inkremente eine nichttriviale Lösung besitzen, muss die Koeffizientendeterminante verschwinden. Dies liefert die *Wackelbedingung*

$$xyz + (x-a)(y-b)(z-c) = 0. \quad (4.2)$$

Sie wird erfüllt durch

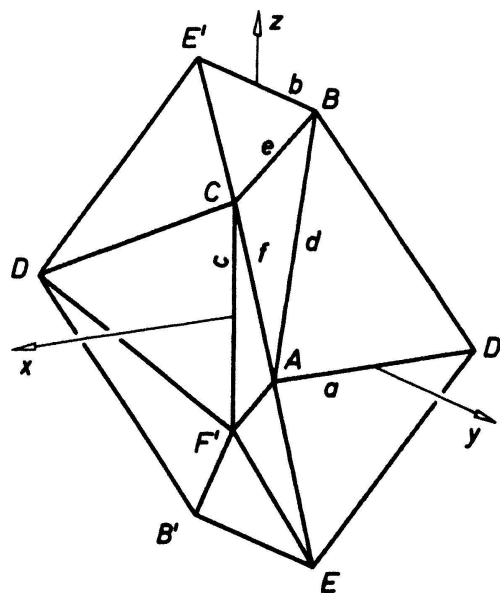
$$x = \frac{a}{1+\lambda}, \quad y = \frac{b}{1+\mu}, \quad z = \frac{c}{1+\nu} \quad \text{mit} \quad \lambda\mu\nu = 1. \quad (4.3)$$

Hierzu gehören gemäss (4.1) die Wackelkomponenten

$$dx:dy:dz = \frac{1+\lambda}{a} : \lambda \frac{1+\mu}{b} : \frac{1+\nu}{\nu c}. \quad (4.4)$$

Mit $\lambda=\mu=\nu=1$ erhält man Wackelikosaeder, die zum Goldbergischen affin sind [2, 5]; für sie gilt $x=a/2, y=b/2, z=c/2$ und $dx:dy:dz=1/a:1/b:1/c$. Die Kugel Σ (1.3) ist hier mit $r=0$ auf einen Punkt zusammengeschrumpft.

Mit anderen Werten gelangt man jedoch zu einer *neuen Familie von Wackelikosaedern*, die zu den orthogonalen Ikosaedern von Jessen [3] nicht mehr affin sind. So zeigt Figur 3 das zur Annahme $a=b=c=1$ und $\lambda=4, \mu=\nu=-1/2$ gehörige Ikosaeder mit $x=1/5, y=z=2$ ($d=\sqrt{6}, e=\sqrt{51}/5, f=\sqrt{141}/5$), das



Figur 3. Neuartiges Wackelikosaeder.

zehn Hohlkanten aufweist²⁾). Dieses Ikosaeder besitzt übrigens neben der Wackelstellung zwei weitere reelle, jedoch überschlagene Positionen; nach dem in Abschnitt 3 dargelegten Verfahren findet man nämlich noch

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,9834, & y_1 &= -0,8403, & z_1 &= 1,2701; \\ x_2 &= -0,7827, & y_2 &= -1,2091, & z_2 &= 0,3463. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ein Umspringen des schwierig zu bauenden Stabmodells zwischen diesen beiden Positionen findet trotz der verwirrenden Struktur des Stabwerks bei richtiger Anordnung der Stäbe tatsächlich statt. Der Übergang zur Wackelform ist allerdings, abgesehen von der übermässigen Beanspruchung des Materials, schon aus topologischen Gründen nicht möglich.

W. Wunderlich, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. Connelly: An immersed polyhedral surface which flexes. *Indiana Univ. Math. J.* 25, 965–972 (1976).
- 2 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. *Math. Mag.* 51, 165–170 (1978).
- 3 B. Jessen: Orthogonal icosahedra. *Nordisk Mat. Tidsskr.* 15, 90–96 (1967).
- 4 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfläche. *El Math.* 20, 25–32 (1965).
- 5 W. Wunderlich: Wackelikosaeder. *Geometriae dedicata*. Im Druck.

Die Methode der finiten Elemente zur Lösung von elliptischen Randwertaufgaben

1. Zur Problemstellung

In einem früheren Beitrag [5] wurde die historische Entwicklung der Methode der finiten Elemente aus der Sicht der ingenieurmässigen Anwendungen skizziert, wobei aber schon darauf hingewiesen wurde, dass das Verfahren unter diesem Namen später auch zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen herangezogen wurde. Im folgenden wollen wir uns nur mit einem konkreten Fall befassen und daran den Grundgedanken und die wesentlichen Teilschritte bis zur Lösung der Aufgabe darstellen. Wir betrachten lineare elliptische Randwertaufgaben mit Laplaceschem Differentialoperator, welche in einem weitgehend beliebigen Grundgebiet und unter recht allgemeinen Randbedingungen zu lösen sind. Mit dieser

2) Mit den bei μ und ν zugelassenen negativen Vorzeichen werden die Ungleichungen in (1.1) ausser Kraft gesetzt.