

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 36 (1981)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Eine Bemerkung zur Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen  
**Autor:** Stein, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35554>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

rational und damit  $\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$  rational.

Der Beweis der Aussage (5) ist also erbracht, wenn gezeigt ist, dass

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\frac{m+n}{n}}$$

irrational ist.

Die  $m$ -te Wurzel aus dem Quotienten der beiden teilerfremden Zahlen  $m+n$  und  $n$  kann aber nur dann rational sein, wenn sowohl  $m+n$  als auch  $n$  eine  $m$ -te Potenz ist. Ist  $n = w^m$ , so gilt für die nächsthöhere  $m$ -te Potenz nach der Ungleichung von Bernoulli

$$(w+1)^m > w^m + mw \geq n + m.$$

$m+n$  kann also nicht gleichzeitig mit  $n$  eine  $m$ -te Potenz sein, womit (5) bewiesen ist.

Die in (4) aufgeführten Lösungspaare sind also die einzigen rationalen.

Da  $n+1$  und  $n$  teilerfremd sind, erhält man schliesslich für  $n=1$  die *einzige ganzzahlige Lösung* (2/4).

Peter Hohler, Olten  
Peter Gebauer, Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. Honsberger: Mathematical Morsels. Dolciani Math. Expos., USA 1978 (Problem 26).
- 2 D. Sato: Algebraic Solution of  $x^y = y^x$ . Proc. Am. Math. Soc. 31 (1972), 316.

#### Eine Bemerkung zur Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen

In der didaktischen Literatur findet man viele Axiomatisierungen der natürlichen Zahlen, die von den Peano-Axiomen abgeleitet sind oder die die Wohlordnungseigenschaft benutzen. Wir wollen hier ein Axiomensystem vorstellen, das im entscheidenden – zur Wohlordnung äquivalenten – Axiom von Mächtigkeitsbetrachtungen ausgeht und das dabei ein besonders einfaches Prinzip benutzt:

##### *Das Dirichletsche Schubfachprinzip.*

Wenn  $m$  Gegenstände auf  $n$  Schubfächer verteilt werden und dabei  $m > n$  ist, dann enthält ein Schubfach mehr als einen Gegenstand.

Bauhoff zeigt in [1], dass das Schubfachprinzip als Beweisprinzip sinnvoll verwendet werden kann. Engel und Sewerin stellen in [3] eine Fülle von Aufgaben und Problemen vor, die mittels des Schubfachprinzips zu lösen sind. Pinker schliesslich

vergleicht in [5] dieses Prinzip mit der vollständigen Induktion und der Wohlordnungseigenschaft bezüglich seiner intuitiven Akzeptierbarkeit.

Wir wollen hier zeigen, dass in einem geeigneten Axiomensystem die Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen durch das Dirichletsche Schubfachprinzip – bzw. eine äquivalente Formulierung – ersetzt werden kann. (Pinker [4] zeigt diese Äquivalenz ebenfalls. Beim Nachweis der entscheidenden Implikation – Schubfachprinzip  $\Rightarrow$  Wohlordnung – benutzt er jedoch in versteckter Weise ein der vollständigen Induktion gleichwertiges Prinzip. Auch fehlt ein axiomatischer Rahmen, innerhalb dessen ein exakter Beweis geführt werden kann.)

Für eine Axiomatisierung der natürlichen Zahlen mittels der Wohlordnungseigenschaft wählen wir folgende Axiome:

W1: Auf  $\mathbb{N}$  gibt es eine Relation  $<$  mit den folgenden Eigenschaften:

- a)  $<$  ist transitiv,
- b)  $n < m \Rightarrow n \neq m$ ,
- c)  $\bigwedge_{n, m \in \mathbb{N}} (n < m \vee n = m \vee m < n)$ .

W2:  $\mathbb{N}$  hat bezüglich  $<$  kein grösstes Element.

W3: Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gilt: ist  $M = \{x \mid x < m, x \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ , dann enthält  $M$  ein grösstes Element. (Wir nennen es den «unmittelbaren Vorgänger von  $m$ » und bezeichnen es als  $m - 1$ .)

W4: Jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}$  hat bezüglich  $<$  ein kleinstes Element (d. h.,  $\mathbb{N}$  ist bezüglich  $<$  wohlgeordnet).

In dieser Axiomatisierung soll die Wohlordnungseigenschaft durch das Schubfachprinzip ersetzt werden. Dazu müssen wir zunächst eine geeignete Formulierung wählen:

Als «Menge von  $k$  Gegenständen» wollen wir die natürlichen Zahlen von 0 bis  $k - 1$  verstehen; wir definieren also:

$$S_m := \{x \mid x < m, x \in \mathbb{N}\}.$$

Das Schubfachprinzip besagt jetzt:

Wenn  $m > n$  ist, dann ist  $S_n$  gleichmächtig einer echten Teilmenge von  $S_m$ .

Der einfacheren Formulierung wegen wählen wir die Kontraposition dieses Prinzips als Präzisierung des Schubfachprinzips:

$$D: S_m \sim S_n \rightarrow m = n.$$

Wir haben damit eine schwache Form des bei Bigalke [2] angegebenen Axioms H.3 erhalten, das in unserer Terminologie lauten würde: « $S_n$  ist eine endliche Menge».

Der Beweis der Äquivalenz von W4 und D soll nun geführt werden, ohne dass wir wie Bigalke andere äquivalente Axiomatisierungen von  $\mathbb{N}$  «dazwischenschalten».

**Satz.** Die Axiomensysteme  $W1-W4$  und  $W1-W3, D$  sind äquivalent.

Beweis:

1. Wir zeigen, dass aus der Wohlordnungseigenschaft das Schubfachprinzip folgt:

Annahme: Das Schubfachprinzip  $D$  gilt nicht. Dann gibt es  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $S_n \sim S_m$ ,  $n < m$ . Sei  $n_0$  das kleinste  $n \in \mathbb{N}$ , zu dem es ein solches  $m$  gibt.

$n_0$  ist ungleich 0, denn  $S_0 = \emptyset \sim S_m \neq \emptyset$ .

Ferner gilt auch  $n_0 > 1$  (wobei 1 die kleinste Zahl  $> 0$  ist), denn aus  $m > n_0 = 1$  folgt:

$$\{0, 1\} \subset S_m \sim S_1 = \{0\}.$$

Sei nun  $S_{n_0} \sim S_m$  mit  $m > n_0$ .

$f: S_{n_0} \rightarrow S_m$  sei eine bijektive Funktion, die wir o.B.d.A. so wählen können, dass  $f(n_0 - 1) = m - 1$  ( $n_0 - 1$  und  $m - 1$  sind definiert, da  $0 < n_0$ ).

Die Funktion  $g: S_{n_0-1} \rightarrow S_{m-1}$  sei definiert als Einschränkung von  $f$  auf  $S_{n_0-1}$ .  $g$  ist wohldefiniert, da  $S_{m-1} \neq \emptyset \neq S_{n_0-1}$  ( $n_0 \neq 1$ ), und nach Konstruktion bijektiv.

Damit ist  $S_{n_0-1} \sim S_{m-1}$ ,  $n_0 - 1 < n_0$ ,  $n_0 - 1 < m - 1$ , und wir erhalten einen Widerspruch zur Minimalität von  $n_0$ .

2. Wir zeigen, dass aus dem Schubfachprinzip die Wohlordnungseigenschaft folgt:

Annahme: Es gibt ein  $S$  mit  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{N}$ , das kein kleinstes Element besitzt. Sei  $n \in S, m := n - 1$ . Zu diesem  $n, m$  betrachten wir  $S_n, S_m$  und definieren wie folgt eine Funktion  $f: S_n \rightarrow S_m$ :

$$f(x) := \begin{cases} \xi, & \xi \text{ ist die grösste Zahl in } S_m, \text{ die kleiner als } x \text{ ist, wenn} \\ & S \text{ ein Element enthält, das kleiner als } x \text{ ist} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Beweis ist abgeschlossen, wenn wir gezeigt haben, dass  $f$  bijektiv ist, denn dann ist  $S_n \sim S_m$ , woraus mit dem Axiom  $D$  folgt, dass  $n = m$  gilt, was ein Widerspruch zur Definition von  $m$  ist.

I.  $f$  ist surjektiv

Sei  $z \in S_m$ .

1. Fall.  $S$  enthält ein Element, das kleiner als  $z + 1$  ist ( $z + 1$  ist die kleinste natürliche Zahl, die grösser als  $z$  ist).

Dann ist  $z + 1 \in S_n, f(z + 1) = z$ .

2. Fall.  $S$  enthält kein Element kleiner als  $z + 1$ . Dann ist  $f(z) = z$ .

Damit ist die Surjektivität von  $f$  nachgewiesen.

II.  $f$  ist injektiv

Sei  $x \neq y; x, y \in S_n$ . O.B.d.A. können wir annehmen:  $x < y$ . Wir wollen zeigen:  $f(x) \neq f(y)$ .

Wir müssen folgende Fälle unterscheiden:

1. Fall. Es gibt ein  $p \in S$ , das kleiner als  $x$  ist.

Dann ist  $f(x) < f(y)$ , woraus  $f(x) \neq f(y)$  folgt.

2. Fall. Es gibt kein  $p \in S$ , das kleiner als  $x$  ist.

Dann ist  $f(x) = x$ .

Wenn  $S$  nun auch keine kleinere Zahl als  $y$  enthält, ist  $f(y) = y \neq x = f(x)$ .

Wenn es ein  $p \in S$  mit  $p < y$  gibt, ist  $x < p$ .

(Aus  $p \leq x$  würde aus der Annahme über  $S$  folgen, dass es ein  $r \in S$  mit  $r < p \leq x$  gibt, im Widerspruch zur obigen Annahme.)

Aus  $x < p$  folgt aber  $f(x) = x < p \leq f(y)$ .

Damit ist die Injektivität von  $f$  nachgewiesen.

M. Stein, Münster

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 E.P. Bauhoff: Schlüsse nach dem Schubfachprinzip im Mathematikunterricht. In: R. Bodendiek (Hrsg.): Zwischenbilanz. Situation und Tendenz des Mathematikunterrichts heute. Herder-Verlag, Freiburg 1978.
- 2 H.-G. Bigalke: Zur Struktur der Menge der natürlichen Zahlen. MNU, Bd. 16, S.97–101 (1963).
- 3 A. Engel und H. Sewerin: Das Schubfachprinzip. MU, 25.Jg., Heft 1, S.23–37 (1979).
- 4 A. Pinker: The Equivalence of the Well-Ordering Principle and Dirichlet's Box Principle. The Two Year College Mathematics Journal, Bd. 5, Nr. 1, S.76–77 (1974).
- 5 A. Pinker: Induction and Well Ordering. School Science and Mathematics, Bd. 76, S.207–214 (1976).
- 6 P. Sorger und M. Stein: Logik in der Oberstufe. Erscheint in ZDM.

## Aufgaben

**Aufgabe 847.** Die beiden Zahlenfolgen  $(a_n), (b_n)$  mit

$$a_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor} \binom{n-kj}{j} s^j$$

und

$$b_n = \sum_{j=0}^n \binom{n+kj}{k+kj} s^j$$

( $n=0,1,2,\dots$ ;  $k$  eine feste natürliche,  $s$  eine feste reelle Zahl) sind durch einfache Rekursionsformeln zu charakterisieren.

(Für  $s=1$  sind  $a_n, b_n$  Transversalsummen, für  $s=-1$  alternierende Transversalsummen im Pascal-Dreieck.)

J. Binz, Bolligen

**Lösung:** Wir definieren die Folge  $(A_n(X))_{n=0,1,\dots}$  von Polynomen in einer Unbestimmten  $X$  durch

$$A_n(X) := 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq n \leq k, \quad A_{n+1}(X) := A_n(X) + X A_{n-k}(X) \quad \text{für} \quad n \geq k \quad (1)$$