

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 36 (1981)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Franciscus Vieta und die Eulersche Identität (Quaternionen)  
**Autor:** Volk, Otto  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35550>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LITERATURHINWEISE

- 1 T. Bonnesen und W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.
- 2 H.G. Eggleston: Convexity. Cambridge 1963.
- 3 L. Euler: Opera omnia, Series I, vol. 28, S. 298–321 (Acta acad. scient. Petropolitanae, 1778).
- 4 P.C. Hammer: Convex curves of constant Minkowski breadth. Proc. Symp. Pure Math. VII, 291–304 (1963).
- 5 I.M. Jaglom und W.G. Boltjanski: Konvexe Figuren. Berlin 1956.

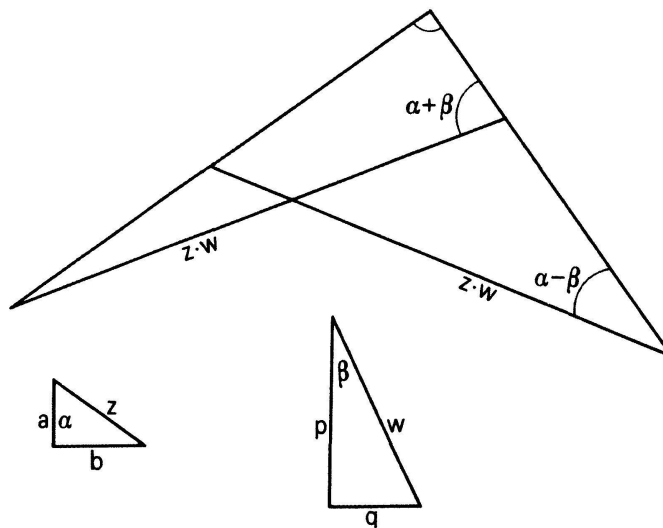
## Franciscus Vieta und die Eulersche Identität (Quaternionen)

1. *F. Vieta* (1540–1603) hat in seiner «Genesis triangulorum» [Ad logisticen speciosam notae priores (um 1591?), Paris 1631, Opera mathematica Leiden 1646, S.62–71], Propositio XLVI, die Aufgabe gestellt:

Gegeben sind zwei rechtwinklige Dreiecke:  $a, b, z; p, q, w$  mit den Winkeln  $\alpha, \beta$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{q}{p}, \quad bp > aq, \quad ap > bq, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha + \beta < 90^\circ.$$

In der Figur ist  $a = 1,5, b = 2, z = 2,5; p = 4,8, q = 2, w = 5,2$ .



Gesucht sind rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse gleich dem Produkt  $z \cdot w$  ist.

Als Lösung gibt er die Dreiecke mit den Katheten  $x, y$ :

$$x = ap \mp bq, \quad y = bp \pm aq \tag{1}$$

und mit den Winkeln  $\alpha \pm \beta$  an.

Da Vieta sich erfolgreich mit den goniometrischen Formeln beschäftigt hat, darf man wohl annehmen, dass er aus den Additionsformeln für  $\cos$  und  $\sin$  (1) gewonnen hat.

Anmerkung:

$$\begin{aligned} (ap \mp bq)/zw, & \quad (bp \pm aq)/zw \\ (\mp bp - aq)/zw, & \quad (\pm ap - bq)/zw \end{aligned} \quad (2)$$

sind die Koeffizienten der orthogonalen Transformation für  $n=2$ . Setzt man  $a=p$ ,  $b=q$ , so erhält man die Transformation:

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq; \quad (3)$$

das ist die Levi-Civitasche Transformation  $x + iy = (p + iq)^2$ , die im ebenen Planetenproblem ( $p = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u}{2}$ ,  $q = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u}{2}$ ,  $u$  die exzentrische Anomalie der Ellipse) eine wichtige Rolle spielt. Es ist nicht auszuschliessen, dass Vieta mit dieser Transformation (3),  $p = \cos a$ ,  $q = \sin a$  gesetzt, durch Induktion die Moivreschen Formeln gefunden hat:

$$\begin{aligned} \cos 2a &= p^2 - q^2, & \sin 2a &= 2pq, \\ \cos 3a &= p(p^2 - q^2) - q \cdot 2pq = p^3 - 3pq^2; \\ \sin 3a &= 2pq \cdot p + (p^2 - q^2)q = 3p^2q - q^3 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Schliesslich kommt Vieta aus (1) auf die Identitäten:

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)(p^2 + q^2), \quad (4)$$

die schon Diophant kannte; Vieta dürfte sie aber selbständig gefunden haben.

Siehe dazu I. G. Bašmakova und E. I. Slavutin:

a) «Genesis Triangulorum de François Viète et ses recherches dans l'analyse indéterminée», Archives for History of Exact Sciences 16, (1977), 289–306.

b) «Die Dreiecksrechnungen von F. Viète und Untersuchungen diophantischer Gleichungen», Istoriko-mat. Issledovanija, 21, (1878), 78–101, (russisch). Referiert im Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete. Mathematics Abstracts 392, (1979), 01009: Geometrische Deutung als Multiplikation und Division von komplexen Zahlen.

2. Durch wiederholte Anwendung der Vietaschen Identitäten (4) lässt sich die Eulersche Identität

$$\begin{aligned} I &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 \\ A_1 &= ap + bq + cr + ds, & A_2 &= aq - bp - cs + dr \\ A_3 &= ar + bs - cp - dq, & A_4 &= as - br + cq - dp \end{aligned} \quad (5)$$

leicht gewinnen.

Man erhält zunächst:

$$\begin{aligned} I &= (ap \pm bq)^2 + (aq \mp bp)^2 + (ar \pm bs)^2 + (as \mp br)^2 \\ &\quad + (cp \pm dq)^2 + (cq \mp dp)^2 + (cr \pm ds)^2 + (cs \mp dr)^2. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= ap + bq, & u_5 &= cp + dq, & v_1 &= ap - bq, & v_5 &= cp - dq, \\
 u_2 &= aq - bp, & u_6 &= cq - dp, & v_2 &= aq + bp, & v_6 &= cq + dp, \\
 u_3 &= ar + bs, & u_7 &= cr + ds, & v_3 &= ar - bs, & v_7 &= cr - ds, \\
 u_4 &= as - br, & u_8 &= cs - dr, & v_4 &= as + br, & v_8 &= cs + dr,
 \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
 I &= (u_1 + u_7)^2 + (u_2 + u_8)^2 + (v_3 - v_5)^2 + (v_4 - v_6)^2 \\
 &= (u_2 - u_8)^2 + (-u_1 + u_7)^2 + (v_4 + v_6)^2 + (v_3 + v_5)^2 \\
 &= (u_3 - u_5)^2 + (u_4 - u_6)^2 + (v_1 + v_7)^2 + (v_2 + v_8)^2 \\
 &= (u_4 + u_6)^2 + (u_3 + u_5)^2 + (v_2 - v_8)^2 + (-v_1 + v_7)^2.
 \end{aligned}$$

Die Grössen, je dividiert mit  $\sqrt{I}$ :

$$\begin{array}{cccc}
 u_1 + u_7 & u_2 + u_8 & v_3 - v_5 & v_4 - v_6, \\
 u_2 - u_8 & -u_1 + u_7 & -v_4 - v_6 & v_3 + v_5, \\
 u_3 - u_5 & u_4 - u_6 & -v_1 - v_7 & -v_2 - v_8, \\
 u_4 + u_6 & -u_3 - u_5 & v_2 - v_8 & -v_1 + v_7,
 \end{array} \tag{6}$$

sind die Koeffizienten der orthogonalen Transformation für  $n=4$ .

Beispiel:

$$105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$$

a) 

+9	-2	-4	-2
-2	-7	-4	+6
-4	-4	-3	-8
+2	-6	+8	-1

 $\begin{cases} a=1, & b=1, & c=1, & d=0, \\ p=5, & q=3, & r=1, & s=0. \\ p=4, & q=3, & r=3, & s=1. \end{cases}$

+10	0	-2	+1
-2	-4	-7	+6
0	-5	-4	-8
+1	-8	+6	+2

b) 

+10	0	+2	+1
0	-10	-1	+2
+2	-1	-6	-8
-1	-2	+8	-6

 $\begin{cases} a=2, & b=1, & c=0, & d=0, \\ p=4, & q=2, & r=1, & s=0. \end{cases}$

c) 

+10	+1	0	-2
+1	-6	-8	+2
-2	+2	-4	-9
0	-8	+5	-4

 $\begin{cases} a=2, & b=1, & c=1, & d=1, \\ p=3, & q=2, & r=1, & s=1. \end{cases}$

Damit erhält man *alle* Zerlegungen von 105 in Summen von höchstens vier Quadraten, wie man sich leicht direkt überzeugt:

$$105 = 10^2 + 2^2 + 1^2 = 9^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 = 8^2 + 6^2 + 2^2 + 1^2 = 8^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 \\ = 7^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 .$$

Als weiteres Beispiel sei empfohlen:

$$1980 = 44 \cdot 45 = 44^2 + 6^2 + 2^2 + 2^2 = \dots$$

Es mag bemerkt werden, dass man die Eulerschen  $A_i$  in (5) bzw. die 16 Glieder in (6) erhalten kann durch lineare Kombination der  $u_i, u_k; v_i, v_k$ , wenn man zuerst ansetzt:

$$A_1 = ap + bq + cr + ds = u_1 + u_7, \\ A_2 = aq - bp - cs + dr = u_2 - u_8$$

und in  $A_3, A_4$  sukzessive die einzelnen Glieder so ansetzt, dass die Produkte sich aufheben:

$$A_3 = ar + bs - cp - dq = u_3 - u_5, \\ A_4 = as - br + cq - dp = u_4 + u_6 .$$

Durch die Vertauschungen

$$\begin{array}{llll} p \rightarrow q, & q \rightarrow -p, & r \rightarrow s, & s \rightarrow -r; \\ p \rightarrow r, & q \rightarrow -s, & r \rightarrow -p, & s \rightarrow q \text{ bzw.} \\ p \rightarrow s, & q \rightarrow r, & r \rightarrow -q, & s \rightarrow -p \end{array}$$

erhält man die 16 Glieder von (6).

3. Euler hat (5) zuerst in einem Brief an Christian Goldbach (1690–1764) vom 23. April/4. Mai 1748 (siehe «Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729–1764», Berlin 1965, Nr. 127, S. 289, mit Anm. 3, S. 291) mitgeteilt. Die Formeln (6) finden sich in: «Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile», Nov. Comm. Acad. Sci. Imp. Petr. 15, (1770) 1771, 75–106, Summarium ibidem, p. 13–15, Leonhardi Euleri, Opera omnia I, 6, S. 287–315.

Im Summarium bzw. in § 36 heisst es, dass er «nonnisi divinando» bzw. «quasi divinando» diese Formeln gefunden habe [1]. Im § 33 bringt er den Sonderfall  $a = p, b = -q, c = -r$  und  $d = s$ , der auf die Transformation

$$x = p^2 - q^2 - r^2 + s^2, \quad y = 2(pq + rs), \quad z = 2(pr - qs)$$

führt, die von P. Kustaanheimo und E. Stiefel in die Himmelsmechanik als *KS-Transformation* eingeführt worden ist und die den dreidimensionalen Raum  $x, y, z$  in den vierdimensionalen  $p, q, r, s$  mit  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$  überführt [2].

Damit hat Euler die Theorie der Quaternionenalgebra inauguriert, die fast

100 Jahre später W.R. Hamilton (1805–1865), A. Cayley (1821–1895) und ihre Schüler aufgebaut haben, die Eulers Erfindung wohl nicht kannten, wie das auch heute vielleicht bei vielen der Fall ist. Siehe dazu W. Blaschke: Euler und die Kinematik. Beitrag zum Gedenkband «Leonhard Euler 1707–1957», Berlin 1959, S.35, und die Anmerkungen von P. Stäckel, in: Opera omnia I, 6, S.309, 311 und 312. Vergleiche dazu auch B.L. van der Waerden: Hamiltons Entdeckung der Quaternionen, 14 S., Göttingen 1973. S. 8: «Der Sprung in die vierte Dimension».

4. 1727, im Alter von 20 Jahren, kam Euler als Adjunkt an die Petersburger Akademie. Vorher hatte er sich um eine Lehrstelle an der Basler Universität beworben; seine Bewerbung wurde aber nicht berücksichtigt. Sein Vater gab ihm daher den Rat, sich auswärts umzusehen, da Basel für ihn zu klein und zu eng sei und ihn nicht zur vollen Entfaltung seiner Kräfte kommen lasse.

In Petersburg kam Euler in den Kreis der Basler Mathematiker Daniel Bernoulli (1700–1782), Jakob Hermann (1678–1733) und des aus Kirchheim unter der Teck (Württemberg) stammenden Mathematikers Friedrich Christoph Mayer (1697–1729). Auch lernte er den federführenden «Manager» der Petersburger Akademie, Christian Goldbach, kennen.

Goldbach (geboren in Königsberg, ebenfalls, wie Euler, Sohn eines Pastors) hatte daselbst neben Jura auch Mathematik studiert. Nach Abschluss seines Studiums ging er auf Reisen, die ihn durch Deutschland, Frankreich, England, Österreich, Holland, Italien und Schweden führten. Überall suchte er Gelehrte von Namen auf; er machte sich Notizen über das, was er von ihnen gehört hatte; durch entsprechendes Studium dazu, insbesondere auch in der Mathematik, bildete er sich weiter. Er wurde ein umfassend gebildeter Gelehrter und gehört zu den bedeutendsten Polyhistoren der damaligen Zeit. Auf seinen Reisen war er auch in Beziehung mit den Bernoullis gekommen. Es entwickelte sich ein reger Briefverkehr mit ihnen. Offenbar durch diese ermutigt, bemühte er sich um eine Berufung an die Petersburger Akademie. Er erhielt einen Vertrag als erster ständiger Sekretär der Akademie zunächst auf 5 Jahre; als solcher hat er bei der Einrichtung und Organisation der Petersburger Akademie entscheidend mitgewirkt.

Euler und Goldbach befreundeten sich sehr rasch. «Dank seinen weltmännischen Umgangsformen, seinem grossen Einfühlungsvermögen und seiner ausgezeichneten Kenntnis vieler Sprachen erwarb sich Goldbach die Sympathien in höchsten Kreisen.» Er wurde zum Erzieher des zukünftigen Zaren (Peter II.) ausersehen und übersiedelte mit demselben nach Moskau. Jetzt begann ein Briefverkehr zwischen Goldbach und Euler, der von epochaler Bedeutung ist. Dieser ist 1965 zum zweiten Male von dem Moskauer Mathematiker A. P. Juškevič und dem Berliner Historiker E. Winter herausgegeben worden. In diesem «Briefwechsel», der 196 Briefe enthält, findet man vielseitige Auskunft über die damaligen Verhältnisse in Ost und West – Euler war von 1741 bis 1766 an der Akademie in Berlin –, insbesondere über das Werden und Schaffen Eulers. Die Einleitung (S. 1–16) gibt über Goldbach, Euler und andere zeitgenössische Gelehrte sowie auch über den Inhalt des Briefwechsels selbst Aufschluss; die fachlichen Anmerkungen, die von den sowjetischen Mathematikern A. A. Kiselev und J. G. Mel'nikov stammen, machen das Opus für jeden Mathematiker lehrreich. Den Abschluss bildet ein Personenregister mit orientierenden Angaben.

Als Euler nach Petersburg kam, war er, wohl angeregt durch seinen Lehrer Johann I. Bernoulli (1667–1748), besonders an mechanischen Problemen (Isochrone, Tautochrone, Brachystochrone) interessiert. In seiner ersten gedruckten Arbeit beschäftigte er sich z.B. mit den Isochronen im widerstehenden Mittel (Acta Eruditorum, Leipzig 1726, S. 361–363, Opera omnia II, 6). Durch Goldbach, der sich insbesondere mit zahlentheoretischen Problemen beschäftigte, wird Euler im ersten Brief aus Moskau vom 1. Dezember 1729 («Briefwechsel», Nr. 2, S. 24) auf P. de Fermat (1601–1665) hingewiesen in folgender Weise [3]:

«P.S. Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros hujus formulae  $2^{2^{x-1}} + 1$ , nempe 3, 5, 17 etc. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.» Diese Bemerkung veranlasste Euler, die gestellte Frage zu behandeln und insbesondere die gesammelten Werke von Fermat (Varia opera mathematica D. P. de Fermat, Tolosae 1679) zu studieren. Im Brief vom 1. Juni 1730 an Goldbach («Briefwechsel», Nr. 5, S. 31) schreibt er: «Incidi nuper, Opera Fermatii legens, in aliud quoddam non inelegans theorema: Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, seu semper inveniri posse quatuor numeros quadratos, quorum summa aequalis sit numero dato, ut  $7 = 1 + 1 + 1 + 4$ . Sed tria quadrata nunquam inveniuntur, quorum summa sit 7. Ad hoc theorema demonstrandum requiritur, ut generaliter quatuor quadrata inveniuntur  $z^2, y^2, x^2, v^2$ , quorum summa aequalis sit summae quinque datorum  $1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ », womit er also nun in das Problem der Zerlegung einer beliebigen ganzen positiven Zahl in vier Quadrate einsteigt, das ihn fast bis zum Ende seines Lebens beschäftigt.

Euler bezeichnet diesen Satz als Fermatschen Satz [4]. Seine fundamentale Veröffentlichung dazu trägt den Titel «Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum», Nov. Comm. Acad. Sci. Imp. Petr. (1760) 5, 13–58. (Opera omnia I, 2). Darin behandelt Euler die algebraischen Hilfsmittel für die vollständige Lösung des verallgemeinerten Vier-Quadrate-Satzes: Jede positive rationale Zahl ist Summe von vier Quadraten rationaler Zahlen. Auf diesen Ergebnissen hat Lagrange 1770 den vollständigen Beweis dieses Satzes aufgebaut (siehe dazu «Briefwechsel», S. 35–36, Anm. 3).

In ähnlicher Weise kann man zeigen:

$$\sum_{i=1}^8 a_i^2 \sum_{k=1}^8 b_k^2 = \sum_{l=1}^8 A_l^2,$$

wo die  $A_l$  die gleiche Form haben wie die  $A_i$  in (5), was C.F. Degen gezeigt hat [Mém. Acad. SPb. VIII (1817/18), 1822, S. 207]. Weitere solche Identitäten gibt es neben  $n=2, 4, 8$  nicht [A. Hurwitz, 1898: Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1898 und Math. Annalen 88, (1923), 1–25].

Otto Volk, Universität Würzburg

## ANMERKUNGEN

- 1 In § 36 (S.312) schreibt er: «Solutio haec eo maiorem attentionem meretur, quod ad eam nulla certa methodo, sed potius quasi divinando sum perductus; et quoniam ea adeo octo numeros arbitrarios implicat, qui quidem facta reductione ad unitatem ad septem rediguntur, vix dubitare licet, quin ista solutio sit universalis et omnes prorsus solutiones possibles in se complectatur. Si quis ergo viam directam ad hanc solutionem manucentem investigaverit, insignia certe subsidia Analysis attulisse erit censendus. Utrum autem similes solutiones pro amplioribus quadratis, quae numeris 25, 36 et maioribus constant, expectare liceat, vix affirmare ausim. Non solum autem hinc Algebra communis, sed etiam Methodus Diophantea maxima incrementa adeptura videtur.» Siehe dazu auch O. Volk: *Miscellanea from the History of Celestial Mechanics 14*, (1976), 365–382, Anmerkung 7, S.378–379.
- 2 Perturbation Theory of Kepler Motion based on Spinor Regularization. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 218*, (1965), 204–219.
- 3 Der Briefverkehr findet grösstenteils in lateinischer Sprache statt. Beide, Goldbach wie auch Euler, verfügten über einen guten lateinischen Stil. (Dies trifft nur auf *die etwa 30 ersten Briefe* zu. Der Hauptteil der ganzen Korrespondenz ist deutsch geschrieben [E.A.F.] )
- 4 Der Satz von der «Quadratzerlegung» findet sich zum ersten Male bei C.G. Bachet de Méziriac (1581–1638) im Kommentar zur Ausgabe «Diophanti Alexandrini Arithmeticonum libri sex et de numeris multangulis liber unus», S.241–242. Paris 1621. Siehe dazu die Anmerkung 6 des «Briefwechsels», S.32.

## On the upward motion of a double cone on an inclined plane

1. In some older ‘physical cabinets’ the following apparatus may be found. Its main part are two rails,  $s_1$  and  $s_2$ , both starting at a point  $O$ , going upward and having the same inclination with the horizontal plane through  $O$  (fig. 1; where the cone  $K_1$  and the line  $s_1$  are given by their horizontal and vertical orthogonal projection). (As a rule these ‘rails’ are the upper rims of two vertical triangular wooden partitions.) The space between the rails is open.

The bisector plane  $U$  of the angle between  $s_1$  and  $s_2$  is a plane of symmetry of the apparatus. The rails determine an inclined plane  $V$  with inclination  $a$ . A rigid homogeneous body  $B$  consists of two congruent right circular cones,  $K_1$ ,  $K_2$ , with the same basic circle  $C$  (centre  $M$ , radius  $R$ ) and height  $h$ ; the vertex of  $K_i$  is  $T_i$ ,  $i=1,2$ .

This double cone is placed in a symmetric way (that is with  $C$  in the plane  $U$ ) on the rails,  $K_1$  on  $s_1$ ,  $K_2$  on  $s_2$ , the tangent points being  $A_1$  and  $A_2$ , respectively. The surprising result is that  $B$ , under gravity, *moves upward along the rails*. The explanation is of course that if  $A_1$  and  $A_2$  move upward more material of  $B$  is pushed into the space between the rails with the effect that  $M$ , the mass-centre of  $B$ , moves downward as it should be.

This device, a simple and ingenious example of *physique amusante*, seems almost forgotten. It is mentioned for instance by Sutton [1] and discussed at some length in such books as Violle [2], Auerbach [3] and Müller-Pouillet [4], but these restrict themselves to a description and some general remarks; no further references are given. The apparatus is determined by three essential parameters;