Aufgaben

Aufgabe 844. Let (x_n) be a sequence of successive approximations of $\sqrt{3}$ obtained by applying Newtons method to the function $f(x)=x^2-3$. Take $x_0=2$. Then

$$x_n+2=4-\underline{1}\rfloor\overline{4}-\underline{1}\rfloor\overline{4}-\cdots-\underline{1}\rfloor\overline{4},$$

a continued fraction containing the number 4 exactly 2^n times. Prove this.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Solution: We prove the following slight generalisation. Let (x_n) be a sequence of successive approximations of $\sqrt{a}$ obtained by applying Newtons method to the function $f(x)=x^2-a$. Take $x_0=b$. Then

$$x_n+b=2b-\underline{c}\rfloor\overline{2b}-c\cdots-\underline{c}\rfloor\overline{2b}, \qquad \text{(where } c=b^2-a\text{)}$$

a continued fraction containing the number $2b$ exactly 2^n times.

Proof: The sequence (x_n) obeys the recurrence relation

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+a}{2x_n},$$

hence if $x_n=p_n/q_n$ then $p_{n+1}+q_{n+1}\sqrt{a}=(p_n+q_n\sqrt{a})^2$ and so we obtain by induction

$$p_n+q_n\sqrt{a}=(b+\sqrt{a})^{2^n}.$$

Define the sequence (y_n) by $y_1=2b$, $y_{n+1}=2b-c/y_n$. Then we have to prove $x_n+b=y_{2^n}$. If we put $y_n=b+r_n/s_n$ then $y_{n+1}=b+(br_n+as_n)/(r_n+bs_n)$. Therefore

$$r_{n+1}+s_{n+1}\sqrt{a}=(r_n+s_n\sqrt{a})(b+\sqrt{a})=(b+\sqrt{a})^{n+1}$$

which clearly implies

$$r_{2^n}+s_{2^n}\sqrt{a}=p_n+q_n\sqrt{a}.$$

Hence, if $\sqrt{a}$ is irrational we see immediately that $r_{2^n}=p_n$ and $s_{2^n}=q_n$.

O. P. Lossers, Eindhoven

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Leinfelden, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 845. Für nichtnegative $x_1,\dots,x_n$ mit $x_1+\cdots+x_n=s$ $(n\in\mathrm{N})$ beweise man

$$n-\frac{ns}{s+n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \leqslant n-\frac{s}{s+1}.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

W. Janous, Innsbruck, A

Solution: More generally

$$nF(s/n) \leq \sum_{i=1}^{n} F(x_i) \leq (n-1)F(0)+F(s)$$

where $F(x)$ is convex for $x \geq 0$. The left hand inequality follows immediately from Jensen's inequality for convex functions. The right hand inequality follows from the Majorization inequality (see D.S. Mitrinović, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Heidelberg 1970, p. 12, 112), i.e., the conditions $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \text{for} \quad k=1,2,\ldots,n-1, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_i \tag{1}$$

are necessary and sufficient in order that for every convex function F,

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} F(y_i).$$

Here for the y_i sequence, we take $y_1 = s$, $y_k = 0$ for $k > 0$. Then conditions (1) obviously hold.
There is equality on the left hand side inequality if $x_i = s/n$ for all i. There is equality on the right hand side inequality if one $x_i = s$ and the rest are zero. The proposed problem corresponds to the special case $F(x) = 1/(1+x)$.

M.S. Klamkin, Alberta, Canada

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), G. Bach (Leinfelden, BRD), K. Bickel (Freiburg, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Emmerich (Marburg, BRD), W. Freudenberg (Jena, DDR), S. Gabler (Mannheim, BRD), Z.A.L. Geöcze (Viçosa, Brasilien), P. Hajnal (Sceged, Ungarn), H. Harborth (Braunschweig, BRD), W. Janous (Innsbruck, A) (2. Lösung), H. Knoll (Disentis), A.R. Kräuter (Leoben, A), L. Kuipers (Mollens VS), H. Kummer (Burgdorf), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warschau, Polen), I. Paasche (München, BRD), R. Razen (Leoben, A), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 846. Es sei

$$n-1 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}, \qquad n,k \in \mathbf{N}.$$

Dann gibt es auf der x-Achse immer n Punkte $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, die genau k verschiedene Entfernungen $x_i - x_j$ $(i > j)$ bestimmen. Dies ist zu zeigen. P. Erdös

Lösung: Die Behauptung gilt offenbar für $n=2$ und $n=3$. Sei zunächst $n-1 \leqslant k \leqslant 2n-3$. Dann kommen zwischen den n Punkten $x_i=i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ und $x_n=k+1$ genau k verschiedene Abstände vor. Sei nunmehr $k \geqslant 2n-2$. Haben dann n-1 Punkte genau k_{n-1} verschiedene Abstände mit $n-2 \leqslant k_{n-1} \leqslant \binom{n-1}{2}$, so kommen genau $n-1$ neue Abstände hinzu, wenn x_n so gross gewählt wird, dass $x_n - x_{n-1} > x_{n-1} - x_1$ ist. Zusammen sind damit genau $k = k_{n-1} + n - 1$ Abstände induktiv auch für

$$n-2+n-1=2n-3<k=k_{n-1}+n-1 \leqslant \binom{n-1}{2}+n-1=\binom{n}{2}$$

garantiert.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Bemerkung des Aufgabenstellers: Die analoge Frage für die Ebene ist ungelöst und scheint schwierig zu sein. Insbesondere ist die Zahl $g(n)$ unbekannt, die im Fall der Geraden dem (trivialen) kleinsten Wert $n-1$ von k entspricht.

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, DK), J. Fehér (Pécs, Ungarn), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), R. Razen (Leoben, A).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1982* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68). Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 863. Es sei K ein nicht notwendig kommutativer Körper, und a: $\{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} \to K$ sei eine $(m \times n)$-Matrix über K. Ist r der Rechtsspaltenrang von a, so ist r bekanntlich auch der Linkszeilenrang von a (siehe etwa H. Lüneburg, Einführung in die Algebra, Satz V.3.7, S. 215). Sind dann $X \subseteq \{1,\ldots,m\}$ und $Y \subseteq \{1,\ldots,n\}$ Mengen der Länge r, so dass die Zeilen von a mit Indizes aus X linkslinear und die Spalten von a mit Indizes aus Y rechtslinear unabhängig sind, so gilt für die Einschränkung b von a auf $X \times Y$, dass ihr Rechtsspaltenrang gleich ihrem Linkszeilenrang gleich r ist. Ist K kommutativ, so ist also $\det(b) \neq 0$.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, BRD

Aufgabe 864. Im ebenen Dreieck ABC mit $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$ sowie $a<b$ seien die beiden durch A und B verlaufenden Winkelhalbierenden gleich lang.

1. Man zeige

$$(1.1)\ a<c<b, \qquad (1.2)\ \gamma = \sphericalangle BCA < 60^\circ.$$

2. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei $P=(a,b)$. Welche Punktmenge durchläuft der Punkt P bei festem c und variablem γ?

L. Kuipers, Mollens VS

Aufgabe 865. ABC sei ein ebenes Dreieck mit Umkreis k, Feuerbachkreis k_F und Höhenschnittpunkt H. Ein Durchmesser d von k schneide die Geraden BC, CA, AB bzw. in A', B', C', und k_a, k_b, k_c seien die über den Strecken $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ gezeichneten Kreise. Man zeige

1. $k_a \cap k_b \cap k_c = \{U, V\}$ mit $U \in k$, $V \in k_F$.
2. H, U, V sind kollinear.
3. Ist $k \cap UV = \{U, S\}$ und s die Simsongerade von S bez. ABC, so gilt: V ist Mittelpunkt von $\overline{HS}$, $V \in s$ und $s \perp d$.

J.T. Groenman, Groningen, NL
D.J. Smeenk, Zaltbommel, NL

Literaturüberschau

P.G. Moore: Principles of Statistical Techniques. 2. Auflage, VIII und 288 Seiten, £4.50. Cambridge University Press, 1979.
Das Buch stellt eine elementar gehaltene Einführung dar. Sein Schwergewicht liegt auf dem verständnisvollen Umgang mit den statistischen Techniken; zur Lektüre werden keine besonderen mathematischen Vorkenntnisse benötigt. Inhalt: Grundlagen aus der beschreibenden Statistik und aus der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung, Signifikanztests, Stichprobentechnik, Simulation, Zeitreihen, Regression und Korrelation.
R. Ineichen

J.S.R. Chisholm: Vectors in Three-Dimensional Space. XII und 293 Seiten, £4.95. Cambridge University Press, London, New York, Melbourne 1978.
In dieser Einführung in die Vektorrechnung und Vektoranalysis werden neue Begriffe zunächst anschaulich erklärt und motiviert und erst hinterher axiomatisch definiert; jedem Abschnitt sind auch Übungsaufgaben beigefügt. Das Buch richtet sich an Studienanfänger, welche an den Anwendungen der Vektorrechnung in den Naturwissenschaften interessiert sind.
H. Walser

M. Goto und F.D. Grosshans: Semisimple Lie Algebras. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Band 38, VII und 480 Seiten, Fr. 98.–. Dekker, New York, Basel 1978.
Ausgehend von der elementaren Theorie der Liealgebren wird die Theorie der halbeinfachen Liealgebren vertieft und ausgebaut. Dabei werden die wichtigsten Hilfsmittel eingeführt und ausführlich angewendet. Weitere Hauptabschnitte sind: Der Zusammenhang zu linearen Gruppen, irreduzible Darstellungen über **C** und **R**, die Klassifikation der reellen halbeinfachen Liealgebren.
Der Text ist klar strukturiert, was die Bewältigung des umfangreichen Stoffes erleichtert. Das Buch bietet einem Anfänger eine gute Einführung. Es beschränkt sich aber keineswegs nur auf die elementaren Aspekte. Von besonderem Interesse sind einige Themen wie die Cartan- und die Iwasawa-Zerlegung oder die Klassifikation der reellen halbeinfachen Liealgebren, die sonst in Lehrbüchern so explizit kaum zu finden sind.
Beim Bearbeiten dieses Buches kann der Leser den Anschluss an mannigfache Anwendungen sowie an die Spezialliteratur finden.
H. Schneebeli