

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 36 (1981)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Gitterwege  
**Autor:** Binz, J.C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35548>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Korollar 4.** Im Falle  $X = \mathbf{R}^2$  erfüllt  $g: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  genau dann die Bedingungen (i) bis (iv) von Satz 1, wenn es  $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$  gibt mit

$$g((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = \gamma(\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) + \delta(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$$

für alle  $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^2$ .

Beweis: Genau die Matrizen der Form  $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$  ( $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ ) kommutieren mit allen  $T$  aus  $SU(2, \mathbf{R})$ . Nun folgt die Behauptung aus Lemma 2 und Satz 1c.

**Bemerkung 3.** Nach Korollar 3 gelten für  $X = \mathbf{C}^2$  die Analoga zu Satz 1a, d. Nach Korollar 4 ist dies nicht der Fall für  $X = \mathbf{R}^2$ , und  $g$  ist nicht unbedingt symmetrisch oder schiefsymmetrisch. Verschärft man (i) jedoch zur Invarianz gegenüber allen Drehungen von  $\mathbf{R}^2$ , so folgt  $g((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = \gamma(\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2)$  für alle  $(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^2$ .

Jürg Rätz, Bern

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. Aczél: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 3, 309–316 (1952).
- 2 J. Aczél: Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press, New York, San Francisco, London 1966.
- 3 S.K. Berberian: Introduction to Hilbert Space. Oxford University Press, New York 1961.
- 4 P. Klein und W. Klingenberg: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Bd. 2. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1972.
- 5 G. Lumer: Semi-inner-product spaces. Trans. Am. Math. Soc. 100, 29–43 (1961).

## Elementarmathematik und Didaktik

### Gitterwege

1. Zahlreiche kombinatorische Aufgaben gestatten eine anschauliche Interpretation im ebenen Gitter. In der Regel geht es darum, die Anzahl der Gitterwege der Länge  $m+n$  von  $(0,0)$  nach  $(m,n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}_0$ ) unter Einhalten gewisser Nebenbedingungen zu bestimmen; gelegentlich findet man dabei kombinatorische Identitäten, deren Nachweis auf anderem Wege komplizierter ist.  
Bekannt sind die folgenden Ergebnisse ([1], S. 135–151, [2]):

a) Die Anzahl aller Wege beträgt

$$a(m, n) = \binom{m+n}{m}. \quad (1)$$

b) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade  $y = (1/k)x$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) nicht überschreiten, ist

$$b(m, n) = \binom{m+n}{m} - k \binom{m+n}{m+1} = \frac{m-kn+1}{m+1} \binom{m+n}{m}, \quad m \geq kn. \quad (2)$$

c) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade  $y=x+p$  ( $p \in \mathbb{N}_0$ ) nicht überschreiten, beträgt

$$c(m,n) = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+p+1}, \quad m \geq n-p. \quad (3)$$

In dieser Note werden zwei in der obigen Zusammenstellung noch fehlende Probleme elementar gelöst.

Es bedeuten  $d(m,n)$  die Anzahl aller Wege, welche die Gerade  $y=(1/k)x+p$  ( $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0$ ) nicht überschreiten, und  $e(m,n)$  die Anzahl aller Wege, welche die Gerade  $y=kx+p$  ( $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0$ ) nicht überschreiten. Es gelingt,  $d(m,n)$  und  $e(m,n)$  nur mit Hilfe von (1) und (2) zu berechnen.

2. Zur Bestimmung der  $d(m,n)$  unterteilen wir die Menge  $V$  der verbotenen Wege in disjunkte Teilmengen,  $V=V_1+V_2+\dots+V_{n-p}$ ;  $V_i$  ist die Menge der Wege, welche die Gerade  $g:ky-x-p=0$  letztmals im Punkt  $(ki, i+p)$  überschreiten.

Mit (1) und (2) erhalten wir unmittelbar

$$|V_i| = \binom{(k+1)i+p-1}{ki-1} \binom{m+n-p-(k+1)i}{m-ki} \frac{m+1-k(n-p)}{m+1-ki}$$

und damit

$$d(m,n) = \binom{m+n}{m} - \sum_{i=1}^{n-p} \frac{m+1-k(n-p)}{m+1-ki} \binom{(k+1)i+p-1}{i+p} \binom{m+n-p-(k+1)i}{n-(i+p)}, \\ m \geq k(n-p). \quad (4)$$

Der Vergleich zwischen (2) und (4) für  $p=0$  führt auf die Identität

$$\frac{kn}{m+1} \binom{m+n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{m+1-kn}{m+1-ki} \binom{(k+1)i+1}{i} \binom{m+n-(k+1)i}{n-i}, \\ m \geq kn, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

3. Auch zur Berechnung der  $e(m,n)$  unterteilen wir die Menge  $V$  der verbotenen Wege in disjunkte Teilmengen,

$$V=V_1+V_2+\dots+V_t, \quad t=\left[\frac{n-1-p}{k}\right];$$

diesmal ist aber  $V_i$  die Menge der Wege, welche die Gerade  $g:y=kx+p$  erstmals im Punkt  $(i, ki+p)$  überschreiten. Mit den Setzungen  $e(0,0)=1$  und  $e_i=e(i, ki+p)$  erhalten wir

$$|V_i| = e_i \binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}$$

und damit vorerst

$$e(m, n) = \binom{m+n}{m} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1-p}{k} \rfloor} e_i \binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}; \quad (6)$$

es bleiben nur noch die  $e_i$  zu berechnen.

$W$  sei die Menge der zulässigen Wege von  $(0,0)$  nach  $(i, ki+p)$ , also  $|W| = e_i$ . Daneben betrachten wir die Menge  $W'$  der Gitterwege der Länge  $(k+1)i+p$  von  $(0,0)$  nach  $(ki+p, i)$ , welche die Gerade  $g': y = (1/k)x$  nicht überschreiten. Nach (2) ist

$$|W'| = \frac{p+1}{ki+p+1} \binom{(k+1)i+p}{i}.$$

Zwischen  $W$  und  $W'$  stellen wir mit der Abbildung  $f(x, y) = (ki+p-y, i-x)$  eine Zuordnung her. Die Abbildung  $f$  ist offensichtlich bijektiv und gitterpunktstreu und führt horizontale (vertikale) Gitterstrecken in vertikale (horizontale) über; wegen  $y \leq kx+p$  wird  $i-x \leq (ki+p-y)/k$ , und schliesslich gelten  $f(0,0) = (ki+p, i)$  und  $f(i, ki+p) = (0,0)$ .

Somit ist  $e_i = |W'|$ , und wir haben das Ziel erreicht:

$$\begin{aligned} e(m, n) &= \binom{m+n}{m} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1-p}{k} \rfloor} \frac{p+1}{ki+p+1} \binom{(k+1)i+p}{i} \binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}, \\ km &\geq n-p. \end{aligned} \quad (7)$$

Der Vergleich zwischen (7) im Spezialfall  $k=1$  und (3) führt auf die Identität

$$\begin{aligned} \binom{m+n}{m+p+1} &= \sum_{i=0}^{n-1-p} \frac{p+1}{p+1+i} \binom{p+2i}{i} \binom{m+n-1-p-2i}{m-2i}, \\ m &\geq n-p \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Schliesslich vergleichen wir (8) für  $p=0$  und (5) für  $k=1$  und gewinnen die Identität

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+i} \binom{2i}{i} \binom{m+n-1-2i}{m-i} &= \sum_{i=1}^n \frac{m-n+1}{m-i+1} \binom{2i-1}{i} \binom{m+n-2i}{n-i}, \\ m &\geq n \geq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

J. C. Binz, Mathematisches Institut der Universität Bern

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Bd. 1. Stuttgart 1973.
- 2 J. Binz: Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen. El. Math. 32/3 (1977).