

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 36 (1981)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Geometrie und Kombinatorik  
**Autor:** Jeger, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35546>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

---

El. Math.

Band 36

Heft 4

Seiten 73–104

Basel, 10. Juli 1981

---

## Geometrie und Kombinatorik

*Meinem Freund und Redaktionskollegen Prof. Dr. E. Trost zum 70. Geburtstag gewidmet*

### 1. Einleitung

Innerhalb der modernen Kombinatorik – im angelsächsischen Sprachgebiet *Combinatorial Mathematics* genannt – hat sich in den letzten Jahrzehnten auch ein Zweig entwickelt, der sehr stark an der anschaulichen Geometrie motiviert und verankert ist. Es ist dies die *Theorie der endlichen Inzidenzstrukturen*, deren Bogen sich von den endlichen affinen und projektiven Ebenen bis hin zu den sogenannten Blockplänen spannt. Man begegnet darin einer Fortsetzung geometrischer Schlussweisen in den finiten Bereich.

Bemerkenswert sind die mannigfachen Beziehungen zwischen endlichen Inzidenzstrukturen und andern Gebieten der Mathematik. So ist z. B. die *Algebra* das Hauptwerkzeug in diesem Teil der Kombinatorik; andererseits findet man interessante Anwendungen etwa in der *Statistik* und in der *Codierungstheorie*.

Endliche Strukturen haben gegenüber transfiniten Strukturen immer den Vorteil, besser überschaubar zu sein. In endlichen Systemen ist daher stets auch ein gewisses didaktisches Potential verborgen; solche Systeme können dem Lernenden in der Mathematik eine effiziente Hilfe sein. So lassen sich unter anderem bestimmte Grundlagenprobleme oder einzelne schwierigere Begriffe in der Geometrie an endlichen Systemen oft viel besser darlegen und verständlich machen. Ich denke hier etwa an die Aufgabe, einem Anfänger in der Geometrie den Begriff der konformen oder der projektiven Ebene plausibel zu machen.

Die vorliegende Note möchte den Leser – mehr oder weniger exemplarisch – in das Grenzgebiet zwischen Geometrie und Kombinatorik einführen. Zugleich sollen damit einige neu erschlossene Zugänge zu bekannten Fakten präsentiert werden, die den didaktischen Aspekt des Gegenstandes etwas herausheben.

### 2. Orthogonale lateinische Quadrate

Als Aufhänger für diesen Ausflug an die Nahtstelle zwischen Geometrie und Kombinatorik diene das *Eulersche Offiziersproblem*. An der Petersburger Akademie wurde Euler das folgende Problem zugetragen:

Die Zarin – Katharina die Grosse – hatte zu einem Dienstrapport 36 Offiziere versammelt, und zwar aus 6 Regimentern je einen Leutnant, Oberleutnant, Hauptmann, Major, Oberstleutnant und Obersten. Sie soll dabei den Wunsch geäußert haben, dass sich die Herren so im Quadrat aufstellen, dass in jeder Reihe und in jeder Kolonne jedes Regiment und jeder Dienstgrad vertreten sind.

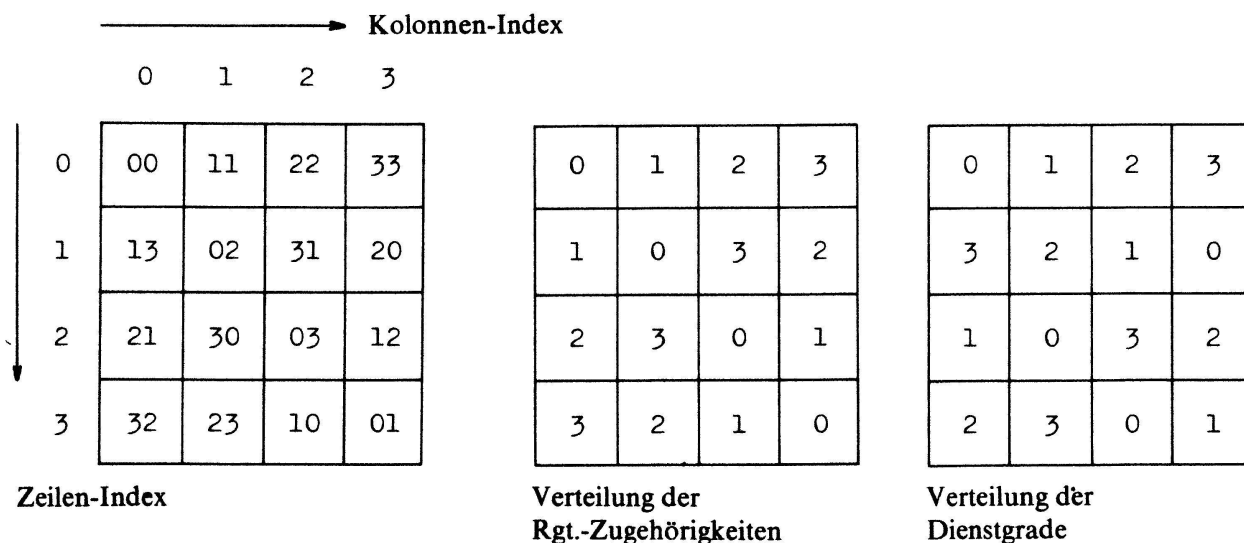
Euler war von dieser Fragestellung so fasziniert, dass er sich in der Folge sehr eingehend damit befasst hat. Mit seinen Untersuchungen über die damit in Verbindung stehenden lateinischen Verteilungen hat er eine für die Kombinatorik bedeutsame Entwicklung eingeleitet. Der Rapport der 36 Offiziere ist zwar ganz sicher ohne die geforderte Präsentier-Aufstellung zu Ende gegangen, denn inzwischen hat sich herausgestellt, dass diese kombinatorische Aufgabe keine Lösung hat<sup>1)</sup>.

Das Offiziersproblem war so, wie es erstmals gestellt wurde, mathematisch recht bösartig. Es ist nämlich nur für 6 Regimenter und 6 Dienstgrade nicht lösbar, sonst aber für alle andern charakteristischen Anzahlen  $n \geq 3$  lösbar. Wir wollen uns daher auf einen Wert des Parameters  $n$  festlegen, der eine Lösung zulässt: Am Rapport sollen nur 4 Regimenter und 4 Dienstgrade vertreten sein ( $n=4$ ).

Kennzeichnet man die Regimentszugehörigkeit und die Dienstgrade je mit den Zeichen 0 1 2 3, dann gehört zu jedem der 16 vorhandenen Offiziere eine der nachstehend genannten Figuren:

00 01 02 03 10 11 12 13 20 21 22 23 30 31 32 33.

Jeder Lösung des Offiziersproblems entspricht nun eine Verteilung dieser 16 Figuren auf die Felder eines  $4 \times 4$ -Schachbrettes derart, dass in jeder Zeile und in jeder Kolonne die Zeichen 0 1 2 3 genau einmal an erster und genau einmal an zweiter Stelle stehen. Die folgende Anordnung zeigt eine Lösung (Fig. 1):



Figur 1

1) Vgl. G. Tarry: Le problème des 36 Officiers. C.r. Ass. fr. Avanc. Sci. nat. 1900, 122-123; 1901, 170-203. Tarrys Unmöglichkeitbeweis beruht im wesentlichen auf systematischem Probieren. Man kennt heute elegantere Beweise.

Um die Verteilungen der Regimentszugehörigkeiten und der Dienstgrade noch deutlicher sichtbar zu machen, sind diese nebenan noch getrennt aufgeführt. Bei der Separation wird man auf zwei Verteilungen der Zeichen  $0\ 1\ 2\ 3$  auf die Felder des  $4 \times 4$ -Schachbrettes geführt, in denen jedes der 4 Zeichen in jeder Zeile und in jeder Kolonne genau einmal vorkommt. Euler hat bei seinen Untersuchungen über derartige Verteilungen von  $n$  Zeichen auf einem  $n \times n$ -Schachbrett durchwegs grosse lateinische Buchstaben verwendet. Seither spricht man von *lateinischen Verteilungen* oder etwas präziser von *lateinischen Quadraten*.

Mit einer Lösung des Offiziersproblems im Falle  $n=4$  sind also zwei lateinische Quadrate der Ordnung 4 verbunden. Dieses Modell erfasst aber die vorliegende kombinatorische Struktur noch nicht vollständig. Die beiden lateinischen Quadrate sind zugleich so miteinander gekoppelt, dass bei der Überlagerung jedes mögliche 2stellige Wort über dem Alphabet  $0\ 1\ 2\ 3$  genau einmal auftritt. Zwei lateinische Quadrate in dieser Relation heissen *orthogonal*<sup>2)</sup>. Zu einer Lösung gehört somit ein Paar von orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 4.

Fortan sollen lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  mit den Zahlen aus der Menge

$$\mathbf{N}_{n-1}^* = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

beschrieben werden. Charakterisiert man die einzelnen Felder eines  $n \times n$ -Schachbrettes durch den jeweiligen Zeilen- und Kolonnen-Index (Zahlen aus  $\mathbf{N}_{n-1}^*$ ), dann ist ein lateinisches Quadrat  $\Omega$  der Ordnung  $n$  gleichbedeutend mit einer Funktion  $f$  auf der Menge  $\mathbf{N}_{n-1}^* \times \mathbf{N}_{n-1}^*$  mit Werten aus  $\mathbf{N}_{n-1}^*$

$$(i, j) \mapsto f(i, j),$$

für die gilt

$$\begin{aligned} f(i, j) = f(h, j) &\Rightarrow i = h \\ f(i, j) = f(i, k) &\Rightarrow j = k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zwei lateinische Quadrate  $\Omega_1\ \Omega_2$  der Ordnung  $n$  sind genau dann orthogonal, wenn für die zugehörigen Funktionen  $f_1\ f_2$  die Implikation

$$\left. \begin{aligned} f_1(i, j) = f_1(h, k) \\ f_2(i, j) = f_2(h, k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow i = h \wedge j = k \tag{2.2}$$

besteht. Sie besagt, dass vorgegebene Funktionswerte für  $f_1$  und  $f_2$  jeweils ein Feld festlegen.

Zunächst haben sich nach Euler vorwiegend Statistiker mit Systemen von paarweise orthogonalen Quadraten befasst. Dies erklärt sich damit, dass solche Systeme bei der Planung von Versuchen Verwendung finden<sup>3)</sup>. Die Zusammenhänge mit der

2) Die Orthogonalität von lateinischen Quadraten hat nichts mit dem geometrischen Senkrechtstehen zu tun.

3) Vgl. [6] und [8].

Geometrie sind erst in den Jahren nach 1950 aufgedeckt worden. Hauptergebnis der diesbezüglichen Untersuchungen ist die Tatsache, dass in den sog. *Maximal-Systemen von paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten* konkrete Darstellungen für sämtliche endlichen affinen Ebenen vorliegen.

### 3. Endliche affine Ebenen

Richtet man das bekannte Hilbertsche Axiomen-System auf die ebene euklidische Geometrie aus, dann kommen darin folgende drei Axiome vor:

- (A<sub>1</sub>) Durch zwei Punkte  $A B$  geht genau eine Verbindungsgerade  $g$ .
- (A<sub>2</sub>) Zu einer Geraden  $g$  gibt es durch einen Punkt  $P$  ausserhalb von  $g$  genau eine Gerade  $p$ , die  $g$  nicht schneidet (Parallele).
- (A<sub>3</sub>) Es gibt drei nichtkollineare Punkte.

Wir wollen uns auf denselben Standpunkt stellen wie Hilbert; die Begriffe Punkt, Gerade und Inzidenz sollen ganz von der herkömmlichen Vorstellung befreit werden. Es werden zwei Mengen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{G}$  von irgendwelchen «Dingen» betrachtet; die Elemente von  $\mathbf{P}$  heissen Punkte, die Elemente von  $\mathbf{G}$  werden Geraden genannt. Ferner sei eine Inzidenzrelation  $I$  vorhanden, die gewisse Paare  $(P, g)$  mit  $P \in \mathbf{P}$  und  $g \in \mathbf{G}$  auszeichnet.

Die Theorie, die unter diesem Aspekt aus den Axiomen (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>) hervorgeht, heisst die *ebene affine Inzidenzgeometrie*. Jedes konkrete System  $[\mathbf{P}, \mathbf{G}; I]$ , das den drei Axiomen genügt, ist ein Modell zur ebenen affinen Inzidenzgeometrie und wird eine *affine Ebene* genannt. Ein solches Modell ist natürlich die Geometrie des 2dimensionalen Anschauungsraumes, denn darauf ist ja das Hilbertsche System zugeschnitten.

Das Axiomen-System (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>) ist ein bescheidener Ausschnitt aus einem Axiomen-System für die ebene euklidische Geometrie. Die ebene affine Inzidenzgeometrie ist daher ein *Vorfeld zur ebenen euklidischen Geometrie*. Das Hilbertsche System ist bekanntlich kategorisch, d. h. sämtliche Modelle dazu sind isomorph. Mit der vorliegenden Verkürzung der axiomatischen Basis wird die Theorie natürlich wesentlich ärmer, zugleich aber auch reicher an Modellen. Der Verzicht auf Stetigkeitsaussagen lässt insbesondere auch endliche Modelle zu. Ein Beispiel soll gleich die Existenz endlicher affiner Ebenen belegen.

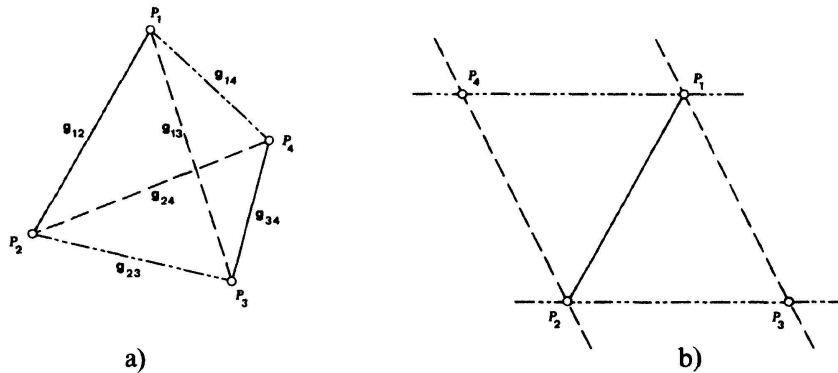
Ausgangsfigur ist ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten  $P_1 P_2 P_3 P_4$  und den Kanten  $g_{12} g_{13} g_{14} g_{23} g_{24} g_{34}$ . Das System  $[\mathbf{P}, \mathbf{G}; I]$  mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \\ \mathbf{G} &= \{g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}, g_{34}\} \end{aligned}$$

und

$$P_i I g_{jk} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} i=j \vee i=k$$

erfüllt offensichtlich die Axiome (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>), (A<sub>3</sub>).



Figur 2

Wir haben hier eine affine Ebene mit 4 Punkten und 6 Geraden vor uns. Die in der Figur 2a gleich ausgezogenen Kanten repräsentieren parallele Geraden.

Bereits an diesem einfachen Modell zur ebenen affinen Inzidenzgeometrie lassen sich verschiedene interessante Überlegungen anstellen. Permutationen auf der Menge  $\mathbf{P}$ , welche die kollineare Lage von Punkten erhalten, werden *Automorphismen der Inzidenzstruktur*  $[\mathbf{P}, \mathbf{G}; \mathbf{I}]$  genannt. Im vorliegenden Modell inzidiert jede Gerade nur mit zwei Punkten; daher ist jede Permutation auf  $\mathbf{P}$  ein Automorphismus, d.h. die Automorphismengruppe ist hier die auf  $\mathbf{P}$  operierende symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_4$ . Von den beiden Automorphismen

$$\tau = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_2 & P_1 & P_4 & P_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ P_1 & P_2 & P_4 & P_3 \end{pmatrix}$$

ist  $\tau$  eine *Translation* mit den Spurgeraden  $g_{12}$  und  $g_{34}$ ,  $\sigma$  eine *Scherung* mit der Fixpunkt-Geraden  $g_{12}$ .

Die Automorphismen sind übrigens gerade die durch die Symmetriegruppe des Tetraeders induzierten Permutationen auf der Menge  $\mathbf{P}$ .

Mit dem vorliegenden Modell können andererseits auch gewisse Grundlagenprobleme aufgezeigt werden. Sind etwa  $P_1 P_2 P_3$  die durch das Axiom  $(A_3)$  garantierten drei Punkte, dann erhält man über die Parallele zu  $g_{23}$  durch  $P_1$  und die Parallele zu  $g_{13}$  durch  $P_2$  einen weiteren Punkt in unserer affinen Ebene, nämlich  $P_4$ . Die anschauliche affine Ebene verleitet zum Schluss, dass auch die entsprechenden Konstruktionen über den Punkten  $P_1 P_2$  und  $P_1 P_3$  je einen neuen Punkt ergeben (Fig. 2b). Dass dem nicht so ist, zeigt nun das Tetraedermodell. Dieses Beispiel macht einerseits deutlich, dass man sich in der deduktiven Geometrie nicht zu stark auf die Anschauung berufen darf. Andererseits geht aus dem Tetraedermodell hervor, dass es offenbar nicht möglich ist, aus den Axiomen  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  die Existenz von mehr als 4 Punkten nachzuweisen.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts konnte auf dieselbe Weise eine viel gewichtigere Frage entschieden werden. Mit einem Modell zur absoluten Geometrie liess sich endlich die Frage nach der Unabhängigkeit des Parallelenpostulates im euklidischen System beantworten: In der hyperbolischen Geometrie wurde ein Modell zur absoluten Geometrie gefunden, in dem das Parallelenpostulat nicht gilt. Damit stand die Unabhängigkeit fest.

Bei unserem Vergleich stehen sich ein sehr einfaches und ein sehr gewichtiges Grundlagenproblem gegenüber. Er möchte darlegen, dass mit dem Tetraedermodell zur ebenen affinen Inzidenzgeometrie dem Lernenden der Zugang zu einem mathematikgeschichtlich äusserst bedeutsamen, zugleich aber auch viel komplexeren Grundlagenproblem erschlossen werden kann, das mit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie seine Lösung gefunden hat.

Mit der Bemerkung über Automorphismen und mit der Erörterung eines einfachen Grundlagenproblems am Tetraedermodell soll auf die Tatsache hingewiesen werden, dass schon die affine Inzidenzgeometrie eine recht bemerkenswerte didaktische Komponente aufweist<sup>4</sup>).

Eine bedeutende Klasse von endlichen affinen Ebenen kann aus gewissen Systemen von paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten konstruiert werden. Es gilt nämlich der folgende

**Satz 1.** *Jedes System von  $n-1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$*

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}$$

*beinhaltet eine affine Ebene mit  $n^2$  Punkten und  $n(n+1)$  Geraden, und zwar ist  $P$  die Menge der Felder des  $n \times n$ -Schachbrettes,*

*$G$  die Menge der anschliessend aufgezählten  $n$ -elementigen Teilmengen von  $P$ :*

- *Teilmengen der Felder, die der gleichen Zeile angehören,*
- *Teilmengen der Felder, die in der gleichen Kolonne enthalten sind,*
- *Teilmengen der Felder, die durch ein bestimmtes  $\Omega_j$  mit demselben Zeichen belegt sind.*

Zum Beweis ist zu zeigen, dass die vorliegende Inzidenzstruktur den Axiomen  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  genügt. Wir gehen dabei exemplarisch vor und formulieren die wesentlichen Überlegungen so, dass ohne weiteres eine Übertragung auf eine beliebige Ordnung  $n$  möglich ist. Als Beispiel ziehen wir das System von 3 paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 4 in der Figur 3 heran.

000	111	222	333
123	032	301	210
231	320	013	102
312	203	130	021

	A jjj	kkk	
		B q <sub>1</sub> q <sub>2</sub> q <sub>3</sub>	

Figur 3

**Axiom  $(A_1)$ :** Existenz der Verbindungsgeraden zweier Punkte  $A B$ .

4) Vgl. [10].

Falls  $AB$  Felder in derselben Zeile oder in derselben Kolonne sind, ist die Verbindungsgerade trivialerweise gewährleistet. Sind  $AB$  nicht in dieser Lage, dann lässt sich der Nachweis mit der folgenden kombinatorischen Überlegung erbringen.

Wir betrachten vorerst ein Feld  $A$  in der ersten Zeile und ein Feld  $B$  in einer beliebigen andern Zeile. Im Feld  $A$  implizieren die drei lateinischen Quadrate  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  eine Figur von der Form  $jjj$ ; im Feld  $B$  möge etwa die Figur  $q_1 q_2 q_3$  stehen. Liegt nun  $B$  in der Kolonne, deren oberstes Feld mit  $kkk$  belegt ist ( $k \neq j$ ), dann ist

$$k \neq q_1, q_2, q_3.$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  lateinische Quadrate sind. Weiter ist

$$q_i \neq q_h \quad \text{für} \quad i \neq h,$$

denn  $\Omega_i$  und  $\Omega_h$  sind orthogonal.  $q_1 q_2 q_3$  sind also drei verschiedene Zahlen aus der Menge  $\mathbb{N}_3^* = \{0, 1, 2, 3\}$ , die von  $k \in \mathbb{N}_3^*$  verschieden sind. Eine unter ihnen muss daher mit  $j$  übereinstimmen. Es gibt also unter  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  ein Quadrat, das den Feldern  $A$  und  $B$  dasselbe Zeichen aufprägt, und dies ist gleichbedeutend mit der Verbindbarkeit von  $A$  und  $B$ .

Ist  $A$  ein Feld, das nicht der ersten Zeile angehört, dann kann man die Zeichen in jedem einzelnen  $\Omega_i$  so permutieren, dass die Zeile von  $A$  wiederum mit den Figuren

$$000, \quad 111, \quad 222, \quad 333$$

belegt ist. Eine solche Permutation belässt sowohl die lateinischen Verteilungen wie auch die Orthogonalität dieser Verteilungen. Man kann jetzt gleich weiterschliessen wie im vorweggenommenen Spezialfall.

Der eben dargelegte Beweis für die generelle Verbindbarkeit zweier Punkte lässt sich ohne weiteres auf Systeme von  $n-1$  orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  übertragen.

*Axiom ( $A_2$ ):* Existenz einer Parallelen durch einen vorgegebenen Punkt  $P$ .

Die Parallelenbüschel werden in den vorliegenden Modellen beschrieben durch die Zeilen und die Kolonnen sowie durch die einzelnen lateinischen Quadrate. Durch jeden Punkt  $P$  gibt es in jedem Parallelenbüschel genau eine Gerade.

*Axiom ( $A_3$ ):* Jedes Modell enthält Punktetripel in nichtkollinearer Lage. So sind z. B. drei Eckfelder sicher nicht kollinear.

Aus  $n-1$  orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  geht tatsächlich stets eine affine Ebene mit  $n^2$  Punkten und  $n(n+1)$  Geraden hervor, denn es gibt  $(n-1)+2 = n+1$  Parallelenfelder, und jedes umfasst  $n$  Geraden.

Im Anschluss an Satz 1 stellt sich die Frage, wie man Systeme von  $n-1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  erhalten kann. Für Ordnungen  $n$ , die von der Form  $n=p^a$  ( $p$  Primzahl) sind, ist die Konstruktion

eines solchen Systems sehr einfach. Bekanntlich gibt es zu jeder Primzahlpotenz  $n=p^a$  einen endlichen Körper (*Galois-Feld*). Hat nun der Körper  $GF(n)$  die Elemente

$$0, 1, \dots, n-1,$$

wobei  $0$  das *Null-Element* und  $1$  das *Eins-Element* bezeichnen, dann liefert die sogenannte Rysersche Formel<sup>5)</sup>

$$a_{ij}^{(t)} = ti + j \quad \begin{cases} t = 1, 2, \dots, n-1 \\ i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$n-1$  verschiedene  $n \times n$ -Matrizen, die ein System von  $n-1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  beinhalten. Aus (2.3) folgt nämlich aufgrund der Körpergesetze

$$a_{ij}^{(t)} = a_{hj}^{(t)} \Rightarrow i = h; \quad a_{ij}^{(t)} = a_{ik}^{(t)} \Rightarrow j = k$$

und für  $s \neq t$

$$\left. \begin{array}{l} a_{ij}^{(s)} = a_{hk}^{(s)} \\ a_{ij}^{(t)} = a_{hk}^{(t)} \end{array} \right\} \Rightarrow i = h \wedge j = k.$$

**Beispiel:**  $GF(4) = [\mathbb{N}_3^*; +, \cdot]$ .

Dieser Körper lässt sich etwa mit den folgenden Verknüpfungstabellen umschreiben.

+	0	1	2	3	·	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	0	3	2	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	3	1
3	3	2	1	0	3	0	3	1	2

Mit der Ryserschen Formel erhält man hieraus

$$a_{ij}^{(1)} = i + j; \quad a_{ij}^{(2)} = 2i + j; \quad a_{ij}^{(3)} = 3i + j. \quad (2.4)$$

Dies führt auf die Matrizen

$$(a_{ij}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a_{ij}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (a_{ij}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\Omega_1$ 
 $\Omega_2$ 
 $\Omega_3$

5) Vgl. [9], S. 81.

aus denen man die drei orthogonalen lateinischen Quadrate der Ordnung 4 in der Figur 3 herauslesen kann.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass wegen  $a_{ij}^{(1)} = i + j$  das lateinische Quadrat  $\Omega_1$  eine Kopie der Additionstafel ist. Weiter schliesst man aus (2.4), dass die Quadrate  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  aus denselben Zeilen bestehen.

Aufgrund der Ryserschen Konstruktion sind für alle Ordnungen von der Form  $n = p^a$  endliche affine Ebenen garantiert. Es gibt also unendlich viele nichtisomorphe endliche affine Ebenen. Daneben existieren nun aber auch Systeme von  $n - 1$  orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$ , die nicht aus einem Galois-Feld hervorgehen. Interessanterweise sind aber bis heute keine Systeme gefunden worden, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist.

Der Zusammenhang zwischen den endlichen affinen Ebenen und Orthogonal-Systemen von lateinischen Quadraten wird mit dem Satz 1 nur unvollständig erfasst. Es gilt auch die folgende Umkehrung, die man nicht ohne weiteres erwartet:

**Satz 2.** *In einer endlichen affinen Ebene ist jede Gerade mit gleich vielen Punkten inzident. Hat diese charakteristische Zahl den Wert  $n$ , dann gibt es stets ein System von  $n - 1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  derart, dass die daraus abgeleitete affine Ebene zur gegebenen Ebene isomorph ist.*

Dies ist der sog. *Darstellungssatz für endliche affine Ebenen*.  $n$  heisst die Ordnung der betreffenden affinen Ebene.

Der Satz 2 lässt sich ebenfalls ganz elementar beweisen. Man benötigt dazu einige Hilfssätze aus der affinen Inzidenzgeometrie, was die Beweisführung etwas aufwendiger macht. Der interessierte Leser kann den Beweis in [8] nachlesen.

Die mit den endlichen affinen Ebenen verbundenen Systeme von paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten sind übrigens durchwegs *Maximal-Systeme*. Dies geht aus dem folgenden Satz 3 hervor.

**Satz 3.** *Ist*

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$$

*ein System von  $m$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n \geq 3$ , dann ist  $m \leq n - 1$ .*

Der Beweis von Satz 3 beruht wieder auf einfachen kombinatorischen Überlegungen, die den Rahmen eines Übersichtsartikels nicht sprengen. Er sei daher kurz dargelegt. Man geht von der Annahme aus, dass ein System von  $n$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$$

vorhanden ist. Zur Beschreibung der  $\Omega_i$  verwenden wir wie bis anhin die Zeichen

$$0, 1, \dots, n - 1.$$

Durch eine geeignete Permutation der Zeichen innerhalb der einzelnen  $\Omega_i$  kann man stets erreichen, dass die erste Zeile durchwegs gleich lautet; insbesondere kann man etwa eine Normierung gemäss Figur 4 vornehmen.

0	1	2		n-1
/				

Figur 4

### Die neuen Quadrate

$$\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_n$$

sind wiederum lateinisch und orthogonal. Wir betrachten nun in sämtlichen Quadraten das erste Feld in der zweiten Zeile. Darin kann wegen der vorgenommenen Normierung nur eines der Zeichen

$$1, 2, \dots, n-1$$

stehen. Da  $n$  Quadrate vorhanden sind, muss in mindestens zwei unter ihnen das schraffierte Feld mit demselben Zeichen  $t$  belegt sein. Die betreffenden Quadrate  $\Omega'_i$  und  $\Omega'_j$  sind dann aber nicht orthogonal, denn die Kombination  $tt$  kommt ja bereits in einem Feld der ersten Zeile vor. Damit ist gezeigt, dass stets  $m \leq n-1$  ist.

Aufgrund der vorgestellten Sätze kann man sagen, dass bis auf Isomorphien die aus Maximal-Systemen orthogonaler lateinischer Quadrate hervorgehenden endlichen affinen Ebenen die einzig möglichen sind. Die Theorie der endlichen affinen Ebenen erweist sich als identisch mit der Theorie einer bemerkenswerten Klasse von kombinatorischen Strukturen. Gewisse Existenzfragen über affine Ebenen lassen sich damit von der Theorie der lateinischen Verteilungen her klären. So steht bereits fest, dass keine affine Ebene der Ordnung 6 vorhanden ist. Das

Eulersche Offiziersproblem hat ja für  $n=6$  keine Lösung; es gibt kein Paar von orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 6 und damit erst recht kein Maximal-System der Ordnung 6.

#### 4. Affine Ebenen der Ordnung 9

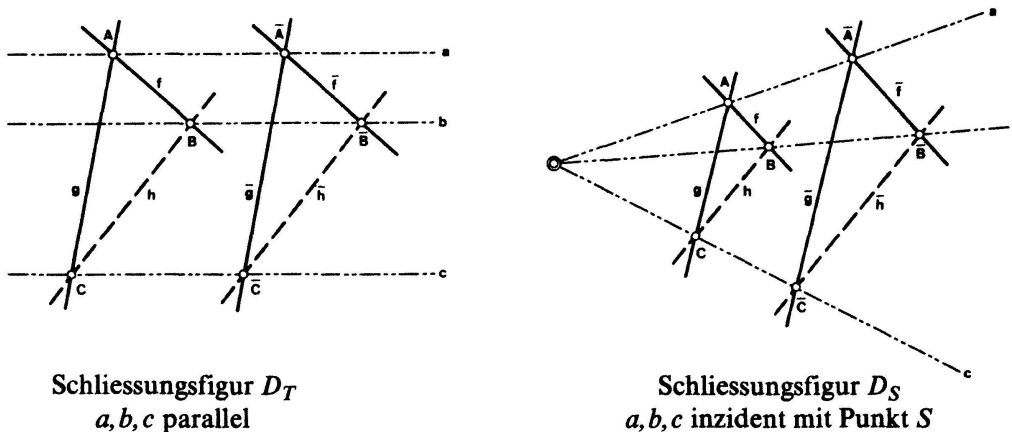
Eine affine Ebene der Ordnung  $n$  wird fortan mit  $\mathfrak{A}_n$  bezeichnet.

Eingehende Abklärungen haben gezeigt, dass für die Ordnungen  $n=2, 3, 4, 5, 7, 8$  bis auf Isomorphien nur je eine affine Ebene existiert, nämlich die Ebene, die vermöge der Formel von Ryser aus dem betreffenden Galois-Feld hervorgeht. Die kleinste Ordnung bei der nichtisomorphe affine Ebenen vorhanden sind, ist  $n=9$ . Anschliessend sollen drei nichtisomorphe affine Ebenen  $\mathfrak{A}'_9, \mathfrak{A}''_9$  und  $\mathfrak{A}'''_9$  vorgestellt werden, verbunden mit der Absicht, dem Leser die Kombinatorik in geometrischem Gewande etwas näherzubringen.

Die Nichtisomorphie zweier Ebenen  $\mathfrak{A}'_n$  und  $\mathfrak{A}''_n$  aufzuzeigen, die durch Systeme von  $n-1$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung dargestellt sind, ist keineswegs trivial. Jede Beschreibung einer affinen Ebene der Ordnung  $n$  mit lateinischen Quadraten macht nämlich die Auszeichnung von 2 der  $n+1$  vorhandenen Parallelenfelder erforderlich; es sind dies die beiden Parallelenfelder, die in die Zeilen und in die Kolonnen des  $n \times n$ -Schachbrettes eingehen. Um nicht auch noch einer Willkür in der Zeichenverteilung bei den einzelnen lateinischen Quadraten  $\Omega_i$  ausgesetzt zu sein, kann man diese so normieren, dass die ersten Zeilen durchgehend gleich lauten, z.B. so wie in der Figur 4. Die Asymmetrie in bezug auf die Parallelenfelder lässt sich aber nicht aus der Darstellung heraus-

halten, d.h. es gibt für eine bestimmte Ebene  $\mathfrak{A}_n \binom{n}{2}$  völlig gleichberechtigte Beschreibungen mit lateinischen Quadraten. Ebenen mit gleicher Ordnung sind daher auf dieser Basis nicht ohne weiteres vergleichbar.

Aus der Geometrie des Anschauungsraumes ist eine Reihe von sog. *Schliessungsfiguren* bekannt, die mit bestimmten einfachen Transformationen in Verbindung stehen. Wir greifen zwei dieser Schliessungsfiguren heraus (Fig. 5):



Figur 5

In beiden Fällen kann die Schliessung mit derselben Implikation beschrieben werden:

$$\bar{f} \parallel f \text{ und } \bar{g} \parallel g \Rightarrow \bar{h} \parallel h.$$

Die Schliessungsfigur  $D_T$  steht den Translationen nahe. Insbesondere zeichnet sich in  $D_T$  ab, dass zu zwei Punkten  $A$  und  $\bar{A}$  eine Translation  $\tau$  existiert, bei der  $\bar{A} = (A)\tau$  ist. Sind nämlich  $A$  und  $\bar{A}$  zugeordnete Punkte bei einer Translation  $\tau$ , dann lässt sich das Bild eines Punktes  $B$  über die Parallelen  $f \bar{f}$  und die Spurgerade  $b$  konstruieren. In gleicher Weise erhält man  $\bar{C} = (C)\tau$  über  $g$  und die Spurgerade  $c$ . Die Konstruktion von  $\bar{C}$  kann nun aber auch am Punktepaar  $(B, \bar{B})$  angehängt werden. Man erhält nur dann denselben Bildpunkt  $\bar{C}$ , wenn die Schliessungsfigur  $D_T$  vorhanden ist;  $D_T$  garantiert die Kompatibilität der beiden Konstruktionen für den Punkt  $\bar{C}$ .

Die Schliessungsfigur  $D_S$  garantiert in gleicher Weise zu drei kollinearen Punkten  $SA\bar{A}$  ( $S \neq A, \bar{A}$ ) die Existenz einer Streckung  $\sigma$  mit dem Fixpunkt  $S$ , bei der  $A$  in  $\bar{A}$  übergeht.

$D_T$  und  $D_S$  sind affine Sonderfälle der sog. *Desargues-Schliessungsfigur*.

Die Schliessungsfiguren  $D_T$  und  $D_S$  sind auch in allen affinen Ebenen durchgehend vorhanden, die aufgrund der Formel von Ryser aus einem Galois-Feld hervorgehen. Zur Illustration dieses Sachverhaltes betrachten wir zunächst eine *Einzelfigur*  $D_T$  in der Ebene  $\mathfrak{A}_4$ . Wir stützen uns dabei auf die Darstellung von  $\mathfrak{A}_4$  mit den drei lateinischen Quadraten  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , die durch die Formeln (2.4) definiert sind:

0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
1 0 3 2	2 3 0 1	3 2 1 0
2 3 0 1	3 2 1 0	1 0 3 2
3 2 1 0	1 0 3 2	2 3 0 1
$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$

Das Feld (Punkt) in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Kolonne bezeichnen wir jetzt mit  $P_{ij}$ . Ferner sei  $\Omega_i^{(k)}$  die Gerade, die durch das Zeichen  $k$  in  $\Omega_i$  gekennzeichnet ist. Mit

$$\Omega_4^{(0)}, \Omega_4^{(1)}, \Omega_4^{(2)}, \Omega_4^{(3)}$$

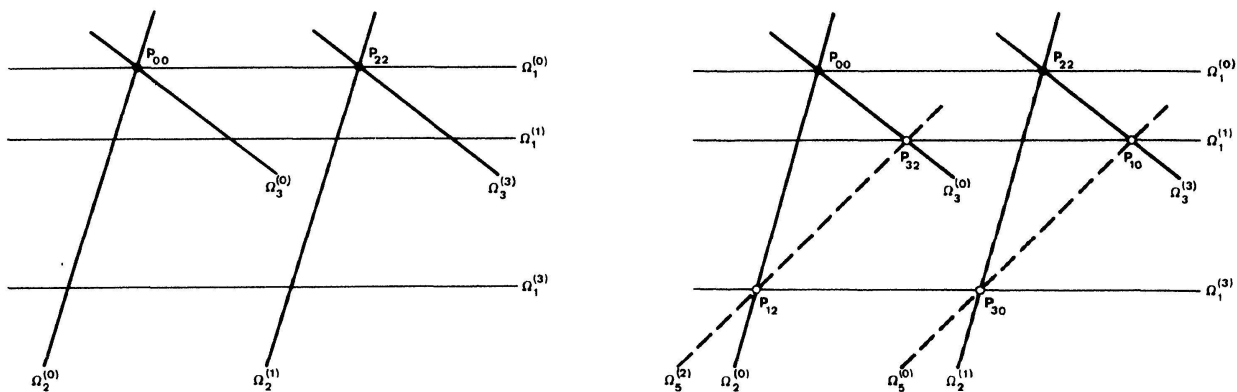
bezeichnen wir schliesslich noch die 4 Geraden, die mit den Punkten in einer bestimmten Zeile, mit

$$\Omega_5^{(0)}, \Omega_5^{(1)}, \Omega_5^{(2)}, \Omega_5^{(3)}$$

die 4 Geraden, die mit den Punkten in einer bestimmten Kolonne inzident sind. Man kann dies als Adjunktion zweier *pseudolateinischer Quadrate*

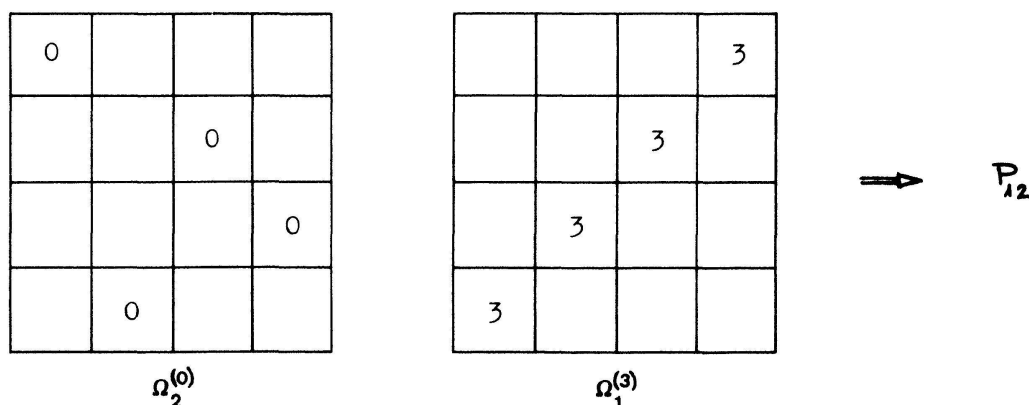
0 0 0 0	0 1 2 3
1 1 1 1	0 1 2 3
2 2 2 2	0 1 2 3
3 3 3 3	0 1 2 3
$\Omega_4$	$\Omega_5$

interpretieren.



Figur 6

Die Figur 6 zeigt das Inzidenzschema einer  $D_T$ -Schliessungsfigur. Sie ist aufgebaut auf den drei Parallelen  $\Omega_1^{(0)}, \Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(3)}$  und den beiden Punkten  $P_{00}$  und  $P_{22}$  auf  $\Omega_1^{(0)}$ . Zeichnet man zusätzlich die Parallelenfelder  $\Omega_2$  und  $\Omega_3$  aus, dann erhält man durch  $P_{00}$  die Geraden  $\Omega_2^{(0)}$  und  $\Omega_3^{(0)}$ , durch  $P_{22}$  die Geraden  $\Omega_2^{(1)}$  und  $\Omega_3^{(1)}$ . Die Geraden aus dem Feld  $\Omega_2$  sollen nun mit  $\Omega_1^{(3)}$ , jene aus dem Parallelenfeld  $\Omega_3$  mit  $\Omega_1^{(1)}$  geschnitten werden. Der Schnittpunkt von  $\Omega_2^{(0)}$  und  $\Omega_1^{(3)}$  ist das Feld, das von  $\Omega_2$  her mit 0 und von  $\Omega_1$  her mit 3 belegt ist.



Figur 7

Mit der gleichen kombinatorischen Überlegung findet man die weitem erforderlichen Schnittpunkte:

- $\Omega_2^{(1)}/\Omega_1^{(3)} \Rightarrow$  Punkt  $P_{30}$ ,
- $\Omega_3^{(0)}/\Omega_1^{(1)} \Rightarrow$  Punkt  $P_{32}$ ,
- $\Omega_3^{(3)}/\Omega_1^{(1)} \Rightarrow$  Punkt  $P_{10}$ .

Die Abschlussgeraden sind die Verbindungsgeraden

- $P_{12}/P_{32} \Rightarrow$  Gerade  $\Omega_3^{(2)}$ ,
- $P_{30}/P_{10} \Rightarrow$  Gerade  $\Omega_3^{(0)}$ .

Sie sind tatsächlich parallel. Die affine Ebene  $\mathfrak{A}_4$  umfasst 5 Parallelenbüschel; jede  $D_T$ -Figur beansprucht 4 davon.

Der generelle Nachweis der Schliessungsfiguren  $D_T$  und  $D_S$  in der affinen Ebene  $\mathfrak{A}_n$ , die vermöge der Ryserschen Formel aus dem Galois-Feld  $GF(n)$  hervorgeht, ist durch Übergang zur isomorphen *Koordinaten-Ebene*  $\mathfrak{A}_n$  möglich. Man gelangt dazu mit den folgenden Ersetzungen:

	Ebene $\mathfrak{A}_n$	$\longmapsto$	Ebene $\mathfrak{A}_n$	
Punkt	$P_{xy}$	$\longmapsto$	$(x, y)$	
Gerade	$\Omega_h^{(c)}$	$\longmapsto$	$(h, 1, c)$	$h = 1, 2, \dots, n-1$
Gerade	$\Omega_n^{(c)}$	$\longmapsto$	$(1, 0, c)$	
Gerade	$\Omega_{n+1}^{(c)}$	$\longmapsto$	$(0, 1, c)$	

$\Omega_n$  und  $\Omega_{n+1}$  sind jetzt die pseudolateinischen Quadrate der Ordnung  $n$ .

Der Punkt  $(x, y)$  ist genau dann mit der Geraden  $(a, b, c)$  inzident, wenn  $ax + by = c$  ist.

In der Koordinaten-Ebene  $\mathfrak{A}_n$  wird eine Translation beschrieben durch

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + p \\ \bar{y} &= y + q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

und eine Streckung mit dem Fixpunkt  $(x_0, y_0)$  hat die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x} - x_0 &= a(x - x_0) \\ \bar{y} - y_0 &= a(y - y_0) \end{aligned} \quad \text{mit } a \neq 0. \tag{4.2}$$

Aufgrund der Körper-Eigenschaften kann man nun schliessen, dass zu zwei beliebigen Punkten stets eine Translation vorhanden ist, die den einen in den andern überführt. Ferner kann man zeigen, dass zu drei verschiedenen kollinearen Punkten stets eine Streckung existiert, die den ersten unter ihnen zum Fixpunkt hat und einen der beiden andern in den dritten transformiert. Damit sind aber  $D_T$  und  $D_S$  durchgehend gewährleistet.

Mit den Schliessungsfiguren  $D_T$  und  $D_S$  lassen sich nun kombinatorische Unterschiede in affinen Ebenen gleicher Ordnung nachweisen. Dieser Gedanke kommt bei der anschliessenden Vorstellung von drei nichtisomorphen affinen Ebenen der Ordnung 9 zum Tragen.

Als erstes Beispiel bietet sich die mit der Formel von Ryser aus  $GF(9)$  konstruierbare affine Ebene  $\mathfrak{A}_9$  an. Darin sind – wie eben gezeigt – die Schliessungsfiguren  $D_T$  und  $D_S$  uneingeschränkt vorhanden. Ein Satz aus der affinen Inzidenzgeometrie besagt übrigens, dass  $D_S$  die Figur  $D_T$  impliziert: Wenn  $D_S$  in einer affinen Ebene durchgehend vorliegt, dann gilt dies auch für  $D_T$ <sup>6)</sup>.

6) Vgl. [5], S. 16.

Stützt man sich für  $GF(9) = [\mathbb{N}_8^*; +, \cdot]$  auf die Verknüpfungstabellen

+	0 1 2 3 4 5 6 7 8	·	0 1 2 3 4 5 6 7 8
0	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
1	1 2 0 4 5 3 7 8 6	1	0 1 2 3 4 5 6 7 8
2	2 0 1 5 3 4 8 6 7	2	0 2 1 6 8 7 3 5 4
3	3 4 5 6 7 8 0 1 2	3	0 3 6 2 5 8 1 4 7
4	4 5 3 7 8 6 1 2 0	4	0 4 8 5 6 1 7 2 3
5	5 3 4 8 6 7 2 0 1	5	0 5 7 8 1 3 4 6 2
6	6 7 8 0 1 2 3 4 5	6	0 6 3 1 7 4 2 8 5
7	7 8 6 1 2 0 4 5 3	7	0 7 5 4 2 6 8 3 1
8	8 6 7 2 0 1 5 3 4	8	0 8 4 7 3 2 5 1 6

$[\mathbb{N}_8^*; +]$ 
 $[\mathbb{N}_8^*; \cdot]$

dann wird man auf das folgende System von 8 paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 9 geführt:

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
① 2 0 4 5 3 7 8 6	② 0 1 5 3 4 8 6 7	③ 4 5 6 7 8 0 1 2	④ 5 3 7 8 6 1 2 0
2 0 1 5 3 4 8 6 7	1 2 0 4 5 3 7 8 6	6 7 8 0 1 2 3 4 5	8 6 7 2 0 1 5 3 4
3 4 5 6 7 8 0 1 2	6 7 8 0 1 2 3 4 5	2 0 1 5 3 4 8 6 7	5 3 4 8 6 7 2 0 1
4 5 3 7 8 6 1 2 0	8 6 7 2 0 1 5 3 4	5 3 4 8 6 7 2 0 1	6 7 8 0 1 2 3 4 5
5 3 4 8 6 7 2 0 1	7 8 6 1 2 0 4 5 3	8 6 7 2 0 1 5 3 4	1 2 0 4 5 3 7 8 6
6 7 8 0 1 2 3 4 5	3 4 5 6 7 8 0 1 2	1 2 0 4 5 3 7 8 6	7 8 6 1 2 0 4 5 3
7 8 6 1 2 0 4 5 3	5 3 4 8 6 7 2 0 1	4 5 3 7 8 6 1 2 0	2 0 1 5 3 4 8 6 7
8 6 7 2 0 1 5 3 4	4 5 3 7 8 6 1 2 0	7 8 6 1 2 0 4 5 3	3 4 5 6 7 8 0 1 2
$\Omega_5$	$\Omega_6$	$\Omega_7$	$\Omega_8$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
⑤ 3 4 8 6 7 2 0 1	⑥ 7 8 0 1 2 3 4 5	⑦ 8 6 1 2 0 4 5 3	⑧ 6 7 2 0 1 5 3 4
7 8 6 1 2 0 4 5 3	3 4 5 6 7 8 0 1 2	5 3 4 8 6 7 2 0 1	4 5 3 7 8 6 1 2 0
8 6 7 2 0 1 5 3 4	1 2 0 4 5 3 7 8 6	4 5 3 7 8 6 1 2 0	7 8 6 1 2 0 4 5 3
1 2 0 4 5 3 7 8 6	7 8 6 1 2 0 4 5 3	2 0 1 5 3 4 8 6 7	3 4 5 6 7 8 0 1 2
3 4 5 6 7 8 0 1 2	4 5 3 7 8 6 1 2 0	6 7 8 0 1 2 3 4 5	2 0 1 5 3 4 8 6 7
4 5 3 7 8 6 1 2 0	2 0 1 5 3 4 8 6 7	8 6 7 2 0 1 5 3 4	5 3 4 8 6 7 2 0 1
6 7 8 0 1 2 3 4 5	8 6 7 2 0 1 5 3 4	3 4 5 6 7 8 0 1 2	1 2 0 4 5 3 7 8 6
2 0 1 5 3 4 8 6 7	5 3 4 8 6 7 2 0 1	1 2 0 4 5 3 7 8 6	6 7 8 0 1 2 3 4 5

Wegen

$$a_{jk}^{(h)} = h \cdot j + k$$

reproduzieren sich in den Zeilen der  $\Omega_h$  die Zeilen der Additionstafel. Das vorliegende Maximal-System ist also aus 9 verschiedenen Zeilen aufgebaut. Da speziell

$$a_{jk}^{(1)} = j + k$$

ist, erscheint in  $\Omega_1$  eine Kopie der Additionstafel. Ferner entnimmt man aus

$$a_{j0}^{(h)} = h \cdot j,$$

dass die vorderste Kolonne von  $\Omega_h$  mit der  $h$ -ten Zeile der Multiplikationstafel übereinstimmt. Für die beiden in  $GF(9)$  steckenden Gruppen besagt die Theorie der endlichen Körper, dass

$$[N_8^*; +] \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \quad \text{und} \quad [N_8; \cdot] \simeq \mathfrak{S}_8^7).$$

Das letztere lässt sich leicht bestätigen anhand der Tatsache, dass 4 in der multiplikativen Gruppe ein Element der Ordnung 8 ist.

Dem zweiten Beispiel wird das folgende Maximal-System von orthogonalen lateinischen Quadraten zugrunde gelegt, das von Statistikern aufgestellt worden ist<sup>8)</sup>.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
① 2 0 4 5 3 7 8 6	② 0 1 5 3 4 8 6 7	③ 4 5 6 7 8 0 1 2	④ 5 3 7 8 6 1 2 0
2 0 1 5 3 4 8 6 7	1 2 0 4 5 3 7 8 6	6 7 8 0 1 2 3 4 5	8 6 7 2 0 1 5 3 4
3 4 5 6 7 8 0 1 2	6 7 8 0 1 2 3 4 5	2 0 1 5 3 4 8 6 7	7 8 6 1 2 0 4 5 3
4 5 3 7 8 6 1 2 0	8 6 7 2 0 1 5 3 4	5 3 4 8 6 7 2 0 1	2 0 1 5 3 4 8 6 7
5 3 4 8 6 7 2 0 1	7 8 6 1 2 0 4 5 3	8 6 7 2 0 1 5 3 4	3 4 5 6 7 8 0 1 2
6 7 8 0 1 2 3 4 5	3 4 5 6 7 8 0 1 2	1 2 0 4 5 3 7 8 6	5 3 4 8 6 7 2 0 1
7 8 6 1 2 0 4 5 3	5 3 4 8 6 7 2 0 1	4 5 3 7 8 6 1 2 0	6 7 8 0 1 2 3 4 5
8 6 7 2 0 1 5 3 4	4 5 3 7 8 6 1 2 0	7 8 6 1 2 0 4 5 3	1 2 0 4 5 3 7 8 6
$\Omega_5$	$\Omega_6$	$\Omega_7$	$\Omega_8$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
⑤ 3 4 8 6 7 2 0 1	⑥ 7 8 0 1 2 3 4 5	⑦ 8 6 1 2 0 4 5 3	⑧ 6 7 2 0 1 5 3 4
7 8 6 1 2 0 4 5 3	3 4 5 6 7 8 0 1 2	5 3 4 8 6 7 2 0 1	4 5 3 7 8 6 1 2 0
4 5 3 7 8 6 1 2 0	1 2 0 4 5 3 7 8 6	8 6 7 2 0 1 5 3 4	5 3 4 8 6 7 2 0 1
6 7 8 0 1 2 3 4 5	7 8 6 1 2 0 4 5 3	3 4 5 6 7 8 0 1 2	1 2 0 4 5 3 7 8 6
2 0 1 5 3 4 8 6 7	4 5 3 7 8 6 1 2 0	1 2 0 4 5 3 7 8 6	6 7 8 0 1 2 3 4 5
8 6 7 2 0 1 5 3 4	2 0 1 5 3 4 8 6 7	4 5 3 7 8 6 1 2 0	7 8 6 1 2 0 4 5 3
1 2 0 4 5 3 7 8 6	8 6 7 2 0 1 5 3 4	2 0 1 5 3 4 8 6 7	3 4 5 6 7 8 0 1 2
3 4 5 6 7 8 0 1 2	5 3 4 8 6 7 2 0 1	6 7 8 0 1 2 3 4 5	2 0 1 5 3 4 8 6 7

Die lateinischen Quadrate  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  und  $\Omega_6$  stimmen mit den entsprechenden Quadraten in der Darstellung der affinen Ebene  $\mathfrak{A}'_9$  überein. Der Zusammenhang mit dem früheren Maximal-System geht aber noch tiefer; auch das neue Maximal-System besteht wieder aus denselben 9 Zeilen. Dies legt nun nahe, dasselbe Konstruktionsgesetz zu unterlegen, mit dem aus  $GF(9)$  die Ebene  $\mathfrak{A}'_9$  gewonnen wurde und von diesem jetzt rückwärts auf ein Verknüpfungsgebilde  $[N_8^*, \oplus, \odot]$  zu schließen. Mit dem Ansatz

$$a_{jk}^{(h)} = h \odot j \oplus k \quad h = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

kann man zunächst aus  $\Omega_1$  die Additionstafel erhalten. Ferner liest man aus den

7)  $\mathfrak{S}_n$  bezeichnet die abstrakte zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .

8) Vgl. R.A. Fisher und F. Yates: Statistical Tables, S.63. London 1948. Für unsere Belange wurde bloss die Reihenfolge der Quadrate umgestellt, und zwar so, dass in  $\Omega_h$  das mit einem Kreislein markierte Feld mit dem Zeichen  $h$  belegt ist.

vordern Kolonnen von  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_8$  die 8 wesentlichen Zeilen der Multiplikationstafel heraus. Postuliert man noch

$$0 \odot a = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{N}_8^*,$$

dann steht auch die erste Zeile der Multiplikationstafel fest.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	0	8	5	4	7	6	3	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	2	0	1	6	8	7	3	5	4	2	0	2	1	6	8	7	3	5	4	
3	3	4	8	0	1	6	5	2	7	3	0	3	6	2	5	8	1	4	7	
4	4	7	5	2	0	3	8	1	6	4	0	4	8	7	2	3	5	6	1	
5	5	8	4	7	6	0	2	3	1	5	0	5	7	4	6	2	8	1	3	
6	6	5	7	4	3	1	0	8	2	6	0	6	3	1	7	4	2	8	5	
7	7	3	6	1	2	8	4	0	5	7	0	7	5	8	3	1	4	2	6	
8	8	6	3	5	7	2	1	4	0	8	0	8	4	5	1	6	7	3	2	

Wegen der Übereinstimmung von  $\Omega_1$  mit dem entsprechenden Quadrat in der Darstellung von  $\mathfrak{A}'_9$  ist

$$[\mathbb{N}_8^*; \oplus] \simeq [\mathbb{N}_8^*; +] \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3.$$

Auch das Verknüpfungsgebilde  $[\mathbb{N}_8; \odot]$  ist immer noch eine Gruppe, die jetzt allerdings nicht mehr abelsch ist. Die vorliegende Multiplikationstafel lässt auf 6 Elemente der Ordnung 4 und ein Element der Ordnung 2 schliessen. Unter den 5 existierenden abstrakten Gruppen der Ordnung 8 weist nur die Quaternionengruppe  $\Omega$  diese Ordnungen auf<sup>9)</sup>; es ist daher

$$[\mathbb{N}_8; \odot] \simeq \Omega.$$

Die Verknüpfungstafel für  $[\mathbb{N}_8; \odot]$  hat folgende, nicht sofort erkennbare Eigenschaft: Bildet man die Summe zweier Kolonnen, dann erhält man stets wieder eine Tafelkolonne. So ist etwa

- $0 \oplus 0 = 0$
- $3 \oplus 5 = 8$
- $6 \oplus 7 = 4$
- $2 \oplus 8 = 7$
- $7 \oplus 3 = 1$
- $4 \oplus 2 = 3$
- $1 \oplus 4 = 5$
- $8 \oplus 1 = 6$
- $5 \oplus 6 = 2$

Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend mit

9) Vgl. etwa W. Ledermann: Einführung in die Gruppentheorie, S.39. Braunschweig 1977.



Zu jedem Punktepaar  $(p_1, p_2), (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$  gibt es offensichtlich eine Translation, womit die Schliessungsfigur  $D_T$  durchgehend garantiert ist. Wegen der Kommutativität der Addition sind übrigens zwei Translationen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  stets vertauschbar.

Die Schliessungsfigur  $D_S$  ist hingegen in der Ebene  $\mathfrak{A}_9''$  nicht durchgehend vorhanden. Dies geht aus dem Beispiel in der Figur 8 hervor, das mit den gleichen kombinatorischen Überlegungen gewonnen wurde, mit denen wir in der Ebene  $\mathfrak{A}_4$  eine einzelne  $D_T$ -Figur nachgewiesen haben. Die beiden abschliessenden Geraden  $\Omega_{10}^{(5)}$  und  $\Omega_6^{(8)}$  sind nicht parallel. Damit steht fest, dass die affinen Ebenen  $\mathfrak{A}_9$  und  $\mathfrak{A}_9''$  nicht isomorph sind.

Eine dritte affine Ebene  $\mathfrak{A}_9'''$  geht aus dem folgenden Maximal-System hervor, das vermutlich ebenfalls Statistikern zu verdanken ist<sup>11)</sup>. Die Anordnung der 8 lateinischen Quadrate wurde wiederum so gewählt, dass in  $\Omega_h$  an der mit einem Kreislein bezeichneten Stelle das Zeichen  $h$  steht.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
① 2 0 4 5 3 7 8 6	② 0 1 5 3 4 8 6 7	③ 4 5 6 7 8 0 1 2	④ 5 3 7 8 6 1 2 0
2 0 1 5 3 4 8 6 7	1 2 0 4 5 3 7 8 6	6 7 8 0 1 2 3 4 5	8 6 7 2 0 1 5 3 4
3 4 5 6 7 8 0 1 2	6 7 8 0 1 2 3 4 5	2 0 1 7 8 6 4 5 3	7 8 6 4 5 3 2 0 1
4 5 3 7 8 6 1 2 0	8 6 7 2 0 1 5 3 4	5 3 4 1 2 0 7 8 6	2 0 1 8 6 7 3 4 5
5 3 4 8 6 7 2 0 1	7 8 6 1 2 0 4 5 3	8 6 7 4 5 3 1 2 0	3 4 5 0 1 2 7 8 6
6 7 8 0 1 2 3 4 5	3 4 5 6 7 8 0 1 2	1 2 0 8 6 7 5 3 4	5 3 4 1 2 0 8 6 7
7 8 6 1 2 0 4 5 3	5 3 4 8 6 7 2 0 1	4 5 3 2 0 1 8 6 7	6 7 8 5 3 4 0 1 2
8 6 7 2 0 1 5 3 4	4 5 3 7 8 6 1 2 0	7 8 6 5 3 4 2 0 1	1 2 0 6 7 8 4 5 3

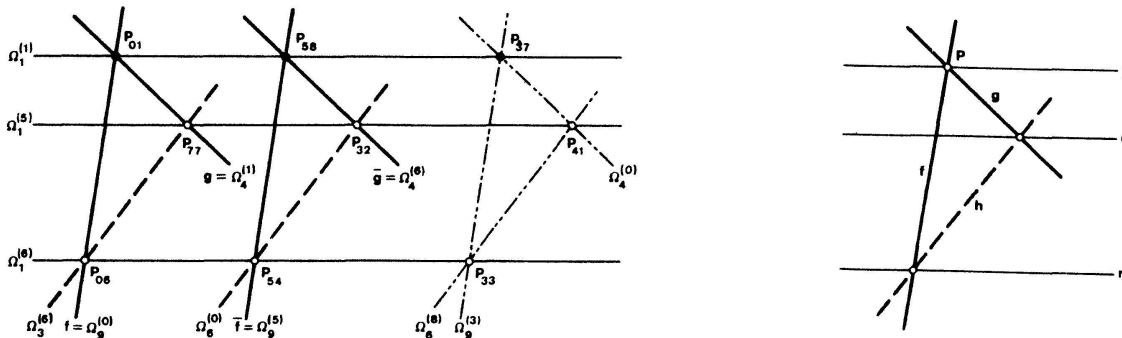
$\Omega_5$	$\Omega_6$	$\Omega_7$	$\Omega_8$
0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7 8
⑤ 3 4 8 6 7 2 0 1	⑥ 7 8 0 1 2 3 4 5	⑦ 8 6 1 2 0 4 5 3	⑧ 6 7 2 0 1 5 3 4
7 8 6 1 2 0 4 5 3	3 4 5 6 7 8 0 1 2	5 3 4 8 6 7 2 0 1	4 5 <span style="border: 1px solid black;">3</span> 7 8 6 <span style="border: 1px solid black;">1</span> 2 0
4 5 3 2 0 1 7 8 6	1 2 0 8 6 7 5 3 4	8 6 7 5 3 4 1 2 0	5 3 4 1 2 0 8 6 7
6 7 8 4 5 3 0 1 2	7 8 6 5 3 4 2 0 1	3 4 5 0 1 2 8 6 7	1 2 0 6 7 8 4 5 3
2 0 1 6 7 8 5 3 4	4 5 3 2 0 1 8 6 7	1 2 0 7 8 6 3 4 5	6 7 8 5 3 4 0 1 2
8 6 7 5 3 4 1 2 0	2 0 1 7 8 6 4 5 3	4 5 3 2 0 1 7 8 6	7 8 6 4 5 3 2 0 1
1 2 0 7 8 6 3 4 5	8 6 7 4 5 3 1 2 0	2 0 1 6 7 8 5 3 4	3 4 5 0 1 2 7 8 6
3 4 5 0 1 2 8 6 7	5 3 4 1 2 0 7 8 6	6 7 8 4 5 3 0 1 2	2 0 <span style="border: 1px solid black;">1</span> 8 6 7 <span style="border: 1px solid black;">3</span> 4 5

$\Omega_1$  und  $\Omega_2$  stimmen überein mit den entsprechenden lateinischen Quadraten in den Darstellungen von  $\mathfrak{A}_9$  und  $\mathfrak{A}_9''$ . Die 8 Quadrate sind jetzt aber nicht mehr aus nur 9 Zeilen aufgebaut. Es ist daher nicht mehr möglich, der affinen Ebene die Rysersche Formel zu unterlegen und auf diesem Wege zu einer algebraischen Struktur mit zwei 2stelligen Verknüpfungen zu gelangen.

In der neuen affinen Ebene  $\mathfrak{A}_9'''$  ist die Schliessungsfigur  $D_T$  auf sämtlichen Parallelenfeldern nur noch isoliert vorhanden, was sich leicht an geeigneten Beispielen zeigen lässt. Die Figur 9 illustriert diesen Sachverhalt für das Parallelenfeld, das zum Quadrat  $\Omega_1$  gehört.

Mit  $f \bar{f}$  aus dem Parallelenfeld in  $\Omega_9$  und  $g \bar{g}$  aus dem Parallelenfeld in  $\Omega_4$  erhält man die beiden abschliessenden Geraden  $\Omega_3^{(6)}$  und  $\Omega_6^{(0)}$ , die offensichtlich nicht

11) Vgl. R.C. Bose und K.R. Nair: On complete sets of latin squares. Ind. J. Statist. 5 (1940/41). Auf dieses Maximal-System wird auch in [7] hingewiesen (S.293).



Figur 9

parallel sind. Die Ergänzung mit dem Ausgangspunkt  $P_{37}$  zeigt aber zugleich, dass isolierte  $D_T$ -Figuren vorhanden sind; die Geraden  $\Omega_6^{(0)}$  und  $\Omega_6^{(8)}$  sind nämlich parallel.

Machen wir jetzt kurz eine Bestandesaufnahme: In der Ebene  $\mathfrak{A}'_9$  sind  $D_S$  und  $D_T$  generell vorhanden, in der Ebene  $\mathfrak{A}''_9$  gilt dies nur noch für die  $D_T$ -Figur, und in  $\mathfrak{A}'''_9$  ist keine der beiden Schliessungsfiguren durchgehend. Die drei affinen Ebenen  $\mathfrak{A}'_9, \mathfrak{A}''_9$  und  $\mathfrak{A}'''_9$  sind daher nicht isomorph.  $\mathfrak{A}'_9$  ist ein Beispiel für eine sogenannte *Desargues-Ebene*,  $\mathfrak{A}''_9$  ist ein Beispiel für eine sogenannte *Translations-Ebene* (es gibt darin zu jedem Punktepaar eine Translation), und  $\mathfrak{A}'''_9$  ist eine affine Ebene, die in bezug auf die Schliessungsfiguren  $D_S$  und  $D_T$  auf der untersten Stufe steht. Es gibt übrigens auch noch eine affine Ebene der Ordnung 9, in der die Schliessungsfigur  $D_T$  auf genau einem Parallelenfeld durchgehend vorhanden ist [4], die also zwischen  $\mathfrak{A}'_9$  und  $\mathfrak{A}'''_9$  einzuordnen wäre.

Dass in  $\mathfrak{A}'''_9$  eine isolierte  $D_T$ -Figur nachgewiesen werden konnte, ist kein Zufall. Es gilt nämlich der

**Satz 4.** *In jeder endlichen affinen Ebene  $\mathfrak{A}_n$  gibt es auf drei beliebigen Parallelen  $p, q, r$  immer eine  $D_T$ -Figur.*

Dies ist ein Satz von T.G. Ostrom<sup>12)</sup>. Der Beweis ist sehr einfach; er stützt sich auf eine typisch kombinatorische Überlegung. Man kann sogar die beiden Parallelenbüschel  $\mathbf{B}_f$  und  $\mathbf{B}_g$  vorgeben, dem die  $f$ -Geraden und die  $g$ -Geraden angehören sollen (Fig. 9). Denkt man sich in allen Punkten  $P$  der Geraden  $p$  die Figur  $\{f, g, h\}$  mit  $f \in \mathbf{B}_f$  und  $g \in \mathbf{B}_g$  konstruiert, dann stehen für die Schlussgerade  $h$  noch  $(n+1) - 3 = n - 2$  Parallelenbüschel offen. Es muss daher zwei Punkte  $P_1, P_2$  auf  $p$  geben, die parallele Schlussgeraden  $h_1, h_2$  aufweisen. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Existenz einer  $D_T$ -Figur im Parallelenbüschel der drei Geraden  $p, q$  und  $r$ .

Mit einer ähnlichen Überlegung kann in jeder endlichen affinen Ebene auf drei beliebigen kopunktalen Geraden  $p, q, r$  eine  $D_S$ -Figur nachgewiesen werden.

Die drei vorgestellten affinen Ebenen der Ordnung 9 lassen erkennen, dass die Schliessungsfiguren  $D_S$  und  $D_T$  nicht Folgerungen aus den Axiomen  $(A_1), (A_2)$  und  $(A_3)$  sein können. Damit ist ein weiteres Unabhängigkeitsproblem im Rahmen der

12) T.G. Ostrom: Transitivity in Projective Plans. Can. J. Math. 9 (1951).

affinen Inzidenzgeometrie angesprochen, das ebenfalls anhand eines geeigneten Modells vollständig geklärt werden kann. Transfinite affine Ebenen, in denen der Satz von Desargues nicht gilt, sind zwar schon seit der Jahrhundertwende bekannt (Moulton-Ebenen). Bemerkenswert ist nun aber, dass grundlagentheoretische Fragen aus der Geometrie gelegentlich mit kombinatorischen Überlegungen beantwortet werden können. Dazu sei noch ein weiteres Beispiel angeführt. Von der Geometrie des Anschauungsraumes her ist man sich gewöhnt, dass sich die Diagonalen eines Parallelogrammes in einem Punkt schneiden. Auch dieser Sachverhalt gehört nicht zur ebenen affinen Inzidenzgeometrie, was das Modell  $\mathfrak{A}_8''$  belegt. In der affinen Ebene  $\mathfrak{A}_8''$  gibt es nämlich vereinzelt Parallelogramme mit parallelen Diagonalen. Ein solches Beispiel ist das Parallelogramm mit den vier in  $\Omega_8$  ausgezeichneten Feldern als Eckpunkten. Aus  $\Omega_8$  entnimmt man die beiden Diagonalen  $\Omega_8^{(1)}$  und  $\Omega_8^{(3)}$ ; dies sind offensichtlich parallele Geraden. Der Leser wird in der Darstellung der affinen Ebene  $\mathfrak{A}_8''$  leicht weitere derartige Ausnahmeparallelogramme erkennen. Daneben gibt es aber in der Ebene  $\mathfrak{A}_8''$  auch ganz normale Parallelogramme.

Es gibt nun affine Ebenen, in denen nur normale Parallelogramme auftreten. Man nennt sie *Fano-Ebenen*<sup>13)</sup>. Dazu gehören alle endlichen Ebenen, die aus einem Galois-Feld mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik hervorgehen. Der Beweis kann mit Methoden der analytischen Geometrie erbracht werden. Hat der zugrundeliegende Körper hingegen die Charakteristik 2, dann haben sämtliche Parallelogramme parallele Diagonalen. Man spricht dann von einer *Anti-Fano-Ebene*. Beispiele hierfür sind die affinen Ebenen  $\mathfrak{A}_2$  (Tetraedermodell) und  $\mathfrak{A}_4$ , denen wir früher begegnet sind.

M. Jeger, Mathematisches Seminar, ETH Zürich

Die Reinzeichnungen der Figuren hat mein Assistent A. Frei ausgeführt, wofür ihm an dieser Stelle herzlich gedankt sei.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 P. Dembowski: Finite Geometries. Ergebnisse der Mathematik, Bd. 44. Berlin, Heidelberg, New York 1968.
- 2 J. Denes und A.D. Keedwell: Latin Squares and their Applications. Budapest, New York 1974.
- 3 H.R. Halder und W. Heise: Einführung in die Kombinatorik. München, Wien 1976.
- 4 R. Kamber: Untersuchungen über affine Ebenen der Ordnung 9. Diss. ETH Zürich, 1976.
- 5 R. Lingenberg: Grundlagen der Geometrie. Mannheim 1978.
- 6 B.H. Mann: Analyse and Design of Experiments. New York 1949.
- 7 G. Pickert: Projektive Ebenen. Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 80. Berlin, Heidelberg, New York 1975.
- 8 G. Pickert: Ebene Inzidenzgeometrie. Frankfurt, Hamburg 1958.
- 9 H.J. Ryser: Combinatorial Mathematics. The Carus Math. Monographs, Nr. 14, 1965.
- 10 H. Zeitler: Inzidenzgeometrie. München 1973.

13) Vgl. [5].