Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1981)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

16 E. Lanckau: Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung. Z. angew. Math. Mech. *42*, 180–186 (1962).
17 V.E. Meister, N. Weck und W.L. Wendland (Hrsg.): Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations. Berlin 1976.
18 P.F. Neményi: Recent Developments in Inverse and Semi-inverse Methods in the Mechanics of Continua. Adv. appl. Mech. *2*, 123–151 (1951).
19 S. Ruscheweyh: Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $(1-z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} - n(n+1)w = 0$. J. reine angew. Math. *270*, 143–157 (1974).
20 G.N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2. Aufl. Cambridge 1966.

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen über Zulässigkeitsmengen vollständig additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ heisst vollständig additiv, wenn für alle natürlichen Zahlen n und m $f(nm) = f(n) + f(m)$ gilt. Nach Kátai [3] nennt man eine Menge A natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (E-Menge), wenn für jede vollständig additive Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ aus $f(A) = \{0\}$ die Gleichung $f(\mathbf{N}) = \{0\}$ folgt. Verschiedene Autoren [1–5] haben allgemeine Charakterisierungen und spezielle Beispiele für E-Mengen gegeben. Insbesondere hat die Menge P der Primzahlen diese Eigenschaft. Im allgemeinen können aber die Werte einer vollständig additiven Funktion f auf einer E-Menge nicht beliebig vorgeschrieben werden. Mengen, die dies zulassen, und solche, die zugleich auch E-Mengen sind, werden im folgenden charakterisiert.

Definition. *Eine Menge B natürlicher Zahlen heisst zulässig oder Zulässigkeitsmenge (kurz Z-Menge), falls sich jede Funktion $f: B \to \mathbf{C}$ so auf $\mathbf{N}$ fortsetzen lässt, dass die Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ vollständig additiv ist.*

Satz 1. *Eine Menge $B \subset \mathbf{N}$ ist genau dann Z-Menge, wenn sich die Zahl 1 «nicht» in der Form*

$$1 = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k} \tag{1}$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A: $k \in \mathbf{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in B$; $b_i \neq 1$; $r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ erfüllen.

Beweis:
1. Angenommen die Zahl 1 lässt sich in der Form (1) schreiben. Betrachte die Funktion $f: B \to \mathbf{C}$ zu

$$f(n) := \begin{cases} 1 & n = b_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f lässt sich nicht vollständig additiv fortsetzen, denn für die Fortsetzung $\tilde{f}$ müsste gelten:

$$\tilde{f}(1)=\tilde{f}(b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k})=r_1\tilde{f}(b_1)+\cdots+r_k\tilde{f}(b_k)$$
$$=r_1\cdot 1+0+\cdots+0=r_1\neq 0.$$

Im Widerspruch zur Tatsache, dass für jede vollständig additive Funktion f stets $f(1)=0$ gilt.

2. Sei B eine Teilmenge von $\mathbf{N}$, durch die 1 nicht in der Form (1) geschrieben werden kann. Sei ferner $f: B\to\mathbf{C}$ eine Funktion. Dann ist zu zeigen, dass zu f eine vollständig additive Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N}\to\mathbf{C}$ existiert.

Betrachte den Vektorraum V, der von den Zahlen $\log p$ mit $p\in P$ über dem Körper der rationalen Zahlen aufgespannt wird. Da die Zahl 1 sich nicht in der Form (1) schreiben lässt, sind in V die Vektoren $\log b$ mit $b\in B$ linear unabhängig. Nach entsprechenden Sätzen aus der linearen Algebra lässt sich also die Menge $C'=\{\log b\mid b\in B\}$, falls sie nicht schon Basis von V ist, durch Hinzunahme einer Menge C'' geeigneter, linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis C von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis ist nun jeder Vektor $\log x\in V$ eindeutig darstellbar:

$$\log x=r_1\log c_1+\cdots+r_s\log c_s.$$

Sei nun $\varphi: V\to\mathbf{C}$ die lineare Abbildung zu

$$\varphi(\log c)=\begin{cases} f(c) & \log c\in C' \\ 0 & \log c\in C'' \end{cases}$$

Dann lässt sich die Funktion $f: B\to\mathbf{C}$, wie folgt, zu einer vollständig additiven Funktion $f: \mathbf{N}\to\mathbf{C}$ ergänzen:

$$f(n):=\varphi(\log n).$$

Denn dann gilt:

1. $f(nm)=\varphi(\log nm)$,
$=\varphi(\log n+\log m)$,
$=\varphi(\log n)+\varphi(\log m)$,
$=\tilde{f}(n)+\tilde{f}(m)$.
2. Für $b\in B$, also $\log b\in C'$: $\tilde{f}(b)=\varphi(\log b)=f(b)$ q.e.d.

Satz 2. *Eine Menge $B\subset\mathbf{N}$ ist genau dann Z-Menge, wenn sich jede natürliche Zahl n auf höchstens eine Weise in der Form*

$$n=b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k} \tag{2}$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A': $k\in\mathbf{N}$; $b_1,\ldots,b_k\in B$; $1<b_1<\cdots<b_k$; $r_1,\ldots,r_k\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ erfüllen.

Beweis: Lässt sich die Zahl 1 in der Form (1) schreiben, dann gibt es für jedes $b \in B$ zwei Darstellungen der Form (2), nämlich

$$b = b \quad \text{und} \quad b = b \cdot 1 = b \cdot b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k}.$$

Lässt sich umgekehrt irgendein $n \in \mathbf{N}$ auf zwei Weisen in der Form (2) schreiben, also

$$n = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k} \quad \text{und} \quad n = c_1^{s_1} \cdot \cdots \cdot c_l^{s_l} \qquad (k \leq l),$$

dann hat die Zahl 1 - nach dem Zusammenfassen möglicherweise gleicher b_i und c_j $(1 \leq i, j \leq k)$ - die Darstellung

$$1 = n \cdot n^{-1} = d_1^{t_1} \cdot \cdots \cdot d_l^{t_l},$$

wobei mindestens einer der Faktoren $d_i^{t_i}$ von 1 verschieden ist. Mit Satz 1 folgt die Behauptung von Satz 2 sofort.

Satz 3. *Eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ ist genau dann E-Menge (s.o.!) und Z-Menge (kurz EZ-Menge), wenn für jedes $\mathbf{N} \setminus \{1\}$ genau eine Darstellung in der folgenden Form existiert:*

$$n = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_b^{r_k},$$

wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' erfüllen.

Beweis: Satz von Wolke [5] und Satz 2.

Satz 3'. *Eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ ist genau EZ-Menge, wenn für jedes $p \in P$ mindestens eine Darstellung der Form (*) existiert und dies für die Zahl 1 nicht gilt:*

$$p = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k}, \qquad (*)$$

wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' erfüllen.

Beweis: Aus dem Satz von Wolke [5] folgt unmittelbar, dass eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ genau dann E-Menge ist, wenn sich jedes $p \in P$ in der Form (*) darstellen lässt. Dies und Satz 1 ergeben die Behauptung.

Beispiele für EZ-Mengen

[Zugleich Beispiele für Basen von V (siehe Beweis von Satz 1), bei denen die Basisvektoren die Gestalt $\log x$ mit $x \in \mathbf{N}$ haben.]

1. $A = \{p_1^{a_1}; p_2^{a_2}; p_3^{a_3}; \ldots\}$ mit $a_i \in \mathbf{N}$,
2. $A = \{p_1^{a_1}; p_1^{a_2} p_2^{a_3}; p_3^{a_4}; p_4^{a_5}; \ldots\}$ mit $a_i \in \mathbf{N}$,

3. $A=\{p_1^{a_1};p_1^{a_2}p_2^{a_3};p_1^{a_4}p_2^{a_5}p_3^{a_6};p_1^{a_7}p_2^{a_8}p_3^{a_9}p_4^{a_{10}};\ldots\}$, mit $a_j\in\mathbf{N}$,
4. $A=\{p_1^{a_1}p_2^{a_2};p_2^{a_3}p_3^{a_4};p_1^{a_5}p_3^{a_6};p_4^{a_7};p_5^{a_8};\ldots\}$, mit $a_j\in\mathbf{N}$.

EZ-Menge der Form 1 sind in gewissem Sinn einzig, siehe Satz 5, doch zuerst ein Hilfssatz:

Satz 4. *Ist B eine EZ-Menge. Dann existiert zu jedem $b\in B$ mindestens eine Primzahl p, in deren Darstellung $p=b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3′ b auftritt, d.h. $b=b_i$ für ein i mit $1\leq i\leq k$ gilt.*

Beweis: Angenommen die Behauptung sei falsch, b sei die Zahl, zu der es keine Primzahl mit der behaupteten Eigenschaft gibt. Dann hat b zwei Darstellungen bezüglich B, nämlich 1. $b=b$ und 2. die durch die Primzahldarstellung von $b=p_1^{n_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{n_k}$ vermittelte, die b nicht enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass B Z-Menge ist (siehe Satz 2!).

Satz 5. *Mengen der Form*

$$A=\{p_1^{a_1};p_2^{a_2};p_3^{a_3};\ldots\}\qquad(a_i\in\mathbf{N})$$

sind die einzigen EZ-Mengen, deren Elemente paarweise teilerfremd sind.

Beweis: Sei B eine EZ-Menge, deren Elemente teilerfremd sind, sei $b\in B$ und p eine der nach Satz 4 existierenden Primzahlen, in deren Darstellung $p=b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3 b auftritt. Nach Voraussetzung gilt für $i\neq j$ $(b_i,b_j)=1$, also folgt: $p=b^r$ mit $r\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}\Rightarrow b=p^m$ mit $m\in\mathbf{N}$, da $b\in B$ und $B\subset\mathbf{N}$ gilt.

Thomas Jahnke, Gesamthochschule Siegen, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 P.D.T.A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. *26*, 11-20 (1974).
2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. *146*, 285-290 (1976).
3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. *13*, 315-320 (1968).
4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. *16*, 1-4 (1968).
5 D. Wolke: Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen. El. Math. *33*/1 (1978).

Aufgaben

Aufgabe 837. Es seien G_1,G_2 zwei Graphen mit je n Ecken x_i bzw. $y_i\,(i=1,\ldots,n)$ und e_n Kanten. Für die Grade (Valenzen) $\rho(x_i)$ bzw. $\rho(y_i)$ der Ecken gelte $\rho(x_i)\neq\rho(y_j)$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$. Man bestimme $\max e_n$. P. Erdös

Solution: By considering the complement of the graphs $G_i, i=1,2$, one gets the equivalent problem of determining the minimum value of e_n.