

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1981)
Heft: 2

Artikel: Definitionsprinzipien für Operatoren Bergmansascher Art und einige Anwendungen
Autor: Kracht, Manfred
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35543>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 36

Heft 2

Seiten 25–48

Basel, 10. März 1981

Definitionsprinzipien für Operatoren Bergmanscher Art und einige Anwendungen

1. Einleitung und Motivierung

Die Theorie und die Anwendung der Bergman- und verwandter Integraloperatoren haben sich während der letzten beiden Jahrzehnte zu einem umfangreichen Sondergebiet der Theorie der partiellen Differentialgleichungen entwickelt – man vergleiche etwa Bergmans klassisches Buch [4] mit dem Bericht [17] über eine 1976 abgehaltene Spezialtagung. Diese «funktionentheoretische Methode» kann man folgendermassen motivieren:

Viele Eigenschaften komplexer analytischer Funktionen lassen sich sehr eingehend kennzeichnen; man denke etwa an die Fülle von Sätzen zum Koeffizientenproblem, zur Werteverteilung, über das Wachstum, die Lage und Art der Singularitäten u. a. m. Dagegen hat man, abgesehen von der zweidimensionalen Laplace-Gleichung, bei partiellen Differentialgleichungen zunächst nichts Vergleichbares. Man kann aber die komplexe Analysis hierfür fruchtbar machen, indem man Integraloperatoren definiert, die als *Übersetzungsprinzip* dienen, so dass man aus funktionentheoretischen Methoden und Sätzen nun Ergebnisse über Lösungen der genannten Gleichungen gewinnt, und zwar sowohl über Klassen von Lösungen ohne Bezug auf irgendwelche Nebenbedingungen wie auch im Zusammenhang mit Anfangs- oder Randwertaufgaben. Von grundlegender Bedeutung ist hierbei die Tatsache, dass es zu einer gegebenen Gleichung im allgemeinen verschiedenartige Integraloperatoren gibt. Um für den jeweiligen Zweck eine günstige Wahl zu treffen, muss man also die Grundprinzipien kennen, die zu brauchbaren Operatoren führen. Wir zeigen in der vorliegenden Arbeit, dass man einige solche Prinzipien in relativ einfacher Weise angeben und untersuchen kann.

2. Das Prinzip der Substitution eines Integrals

Wir erläutern dieses Prinzip für Gleichungen der Form

$$\Delta\psi + a(x, y)\psi_x + \beta(x, y)\psi_y + \gamma(x, y)\psi = 0. \quad (2.1)$$

Die Koeffizienten seien reell-analytisch in einem Gebiet, das den Nullpunkt enthält. Dann können wir diese als holomorphe Funktionen von $z_1 = x + iY$,

$z_2 = y + iY$ fortsetzen. Wir vereinfachen (2.1) noch, indem wir $z = z_1 + iz_2$, $z^* = z_1 - iz_2$ einführen und eine der beiden ersten partiellen Ableitungen in der üblichen Weise eliminieren. Dies ergibt

$$Lu = u_{zz^*} + b(z, z^*)u_{z^*} + c(z, z^*)u = 0 \quad (2.2)$$

mit in einem Gebiet $G \times G^* \subset \mathbb{C}^2$ holomorphen Koeffizienten. Hierbei liegt G in der z -Ebene, $0 \in G$, und G^* ist das gemäss obiger Transformation entsprechende Gebiet in der z^* -Ebene. Ein erstes Prinzip, einen Integraloperator $f \mapsto u = Tf$ zu definieren, besteht in dem Ansatz

$$(Tf)(z, z^*) = \int_{t_1}^{t_2} g(z, z^*, t) f(\varphi(z, t)) \tau(t) dt. \quad (2.3)$$

t ist reell. Durch die Hilfsfunktion $\varphi: G \times I \rightarrow G_0$ ($I = [t_1, t_2]$) erzwingen wir, dass f nur von *einer* Variablen abhängt; das ist wesentlich, weil man so die weitentwickelte Theorie der analytischen Funktionen einer einzelnen Variablen nutzbar machen kann. τ gibt Flexibilität hinsichtlich der Bedingungen für den Kern g . Unter den folgenden Bedingungen liefert (2.3) nun Lösungen von (2.2):

Satz 2.1. Die Funktion $\tilde{h} = \varphi_z / \varphi_t$ mit auf $G \times I$ holomorphem φ erfülle auf G die Bedingung $\tilde{h}(z, t_1) = 0$, $\tilde{h}(z, t_2) = 0$. Weiterhin sei $\tilde{g} = g\tau$ eine auf $G \times G^* \times I$ holomorphe Lösung von

$$(\tilde{g}_{z^*} \tilde{h})_t = L\tilde{g}, \quad (2.4)$$

für die $(\tilde{g}_{z^*} \tilde{h})_t$ stetig ist. Dann ist $u = Tf$ für jedes auf G_0 holomorphe f eine auf $G \times G^*$ holomorphe Lösung von (2.2).

Der Beweis ergibt sich durch Einsetzen von (2.3) in (2.2), wobei man partiell integriert und

$$(f \circ \varphi)_z = \frac{(f \circ \varphi)_t \varphi_z}{\varphi_t}$$

benutzt, um unter dem Integralzeichen einen gemeinsamen Faktor f zu erzeugen. Satz 2.1 liefert auch den von Bergman [4] eingeführten Operator, indem man

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 1, \quad \varphi(z, t) = \frac{1}{2} z(1-t^2), \quad \tau = (1-t^2)^{-1/2} \quad (2.5)$$

wählt und $g = \tilde{g}/\tau = (1-t^2)^{1/2} \tilde{g}$ holomorph auf $G \times G^* \times I$ voraussetzt, also die obigen (hinreichenden) Nebenbedingungen geringfügig abändert. Aus (2.4) folgt dann

$$Mg = (1-t^2)g_{z^*t} - t^{-1}g_{z^*} + 2ztLg = 0. \quad (2.6)$$

3. Diskussion und Folgerungen

Satz 2.1 zeigt, dass für eine gegebene Gleichung (2.2) tatsächlich beliebig viele Operatoren T existieren. Da T ein Übertragungsprinzip bewirken soll, kommt es auf Einfachheit an. Also ist die *günstige Wahl von Kernen ein zentrales Problem* in Theorie und Anwendung. Von z^* unabhängige Kerne schliessen wir aus, denn sie führen über (2.4) auf $c=0$, so dass (2.2) dann eine *gewöhnliche* Differentialgleichung für u_{z^*} würde, ein Trivialfall, der uninteressant ist. Wesentliche Hilfe bei der Vereinfachung von Kernen kann der folgende wichtige Satz leisten, dessen Beweis sich aus Satz 2.1 leicht durch direkte Rechnung ergibt:

Satz 3.1. *Ist g_1 ein Kern des durch (2.3) gegebenen Operators für eine vorgelegte Gleichung (2.2) und genügt g_2 der Gleichung*

$$g_2(z, z^*, t) = g_1(z, z^*, t) \lambda(\varphi(z, t))$$

($\lambda \neq 0$ beliebig, aber so, dass $\lambda \circ \varphi$ auf $G \times I$ holomorph ist), so ist auch g_2 ein Kern für die genannte Gleichung (2.2).

Diesen Satz kann man manchmal sogar benutzen, um *alle* Operatoren einer gewissen Klasse explizit anzugeben. Hierzu eine typische Anwendung:

Eine Gleichung (2.2) und ein zugehöriger Bergman-Operator T , für den (2.5) gilt, heissen von der Klasse E , wenn der Kern von T die Form

$$g = e^q, \quad q(z, z^*, t) = \sum_{\mu=0}^m q_{\mu}(z, z^*) t^{\mu} \quad (3.1)$$

hat. Diese Klasse ist dadurch bedeutsam, dass man ihre Lösungen mittels der Fuchs-Frobenius-Theorie für *gewöhnliche* Differentialgleichungen untersuchen kann; vgl. [15]. Die *Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad \text{also} \quad u_{zz^*} + \frac{1}{4} k^2 u = 0 \quad (k \text{ konstant}) \quad (3.2)$$

ist von der Klasse E . Aus (2.6) ergeben sich als einfachste Kerne

$$g_{\pm}(z, z^*, t) = \exp(\pm ik \sqrt{zz^*} t).$$

In Satz 3.1 wählen wir nun $\lambda = \exp p_m$, wobei p_m ein beliebiges Polynom vom Grade m in dem durch (2.5) definierten φ ist, und schliessen, dass es in der Klasse E für (3.2) unendlich viele Operatoren mit Kernen der Form

$$g = g_{\pm} \exp p_m$$

gibt.

Natürlich kann man von (2.6) durch Variablentransformationen vereinfachte Bedingungen für den Kern erreichen. Aber es ist oft besser, von vornherein (2.3) abzuändern, beispielsweise in

$$(\tilde{T}f)(z, z^*) = \int_{z_0}^z \tilde{g}(z, z^*, t) f(t) dt - f(z). \quad (3.3)$$

Dieser Operator von Eichler [7] bietet den Vorteil sehr einfacher Bedingungen für den Kern, nämlich, z. B. im Falle $b=0$,

$$L\tilde{g} = 0, \quad \tilde{g}_{z^*}(z, z^*, z) = c(z, z^*),$$

wie man leicht durch Nachrechnung bestätigt. Er hat wichtige Anwendungen, von denen wir eine im letzten Abschnitt betrachten werden.

4. Prinzip der Integration über einen Parameter

Während die Funktionen f in Abschnitt 3 *keine* Lösungen der gegebenen Gleichung sind, besteht ein zweites Prinzip, Integraloperatoren zu definieren, darin, dass man von vornherein *Lösungen* f bestimmt, die noch von komplexen Parametern abhängen, über die man integriert. Damit lässt sich dann ein weiteres funktionentheoretisches Werkzeug, die Residuenintegration, anwenden, d. h. Eigenschaften von Lösungen lassen sich aus Residuen ermitteln. Es ist bemerkenswert, dass man verschiedene ad hoc eingeführte spezielle Operatoren diesem Prinzip unterordnen kann. Wir erläutern dies für die n -dimensionale Laplace-Gleichung. Der wesentliche Grundgedanke ist die Benutzung einer Hilfsvariablen v , die von den n Ortsvariablen $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $n-2$ Integrationsvariablen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-2})$ abhängt und so beschaffen ist, dass f , als Funktion der x_j aufgefasst, die Gleichung $\Delta_n f = 0$ befriedigt. Grundlegend dazu ist

Satz 4.1. *Es sei f eine im Nullpunkt holomorphe Funktion von $v = a \cdot x$, die stetig von den Komponenten von ξ abhängt. Ist dann der Vektor $a = (a_1, \dots, a_n)$ isotrop (also $a^2 = 0$), so ist*

$$u(x) = (Af)(x) = \int_{|\xi_1|=1} \dots \int_{|\xi_{n-2}|=1} f(v(x, \xi), \xi) \frac{d\xi_{n-2}}{\xi_{n-2}} \dots \frac{d\xi_1}{\xi_1} \quad (4.1)$$

eine im Nullpunkt reguläre harmonische Funktion.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, indem man bedenkt, dass aus $a^2 = 0$ die Beziehung $\Delta_n f = 0$ folgt.

Für jedes n hat man beliebig viele solche Operatoren, die sich durch die Wahl des isotropen Vektors a unterscheiden. Die Dimensionen $n=3$ und $n=4$ sind bei

Anwendungen wichtig. Für $n=3$ erhalten wir aus Satz 4.1 u. a. den sog. *Bergman-Whittaker-Operator* A , definiert durch

$$(Af)(x) = \int_{|\xi_1|=1} f(v(x, \xi_1), \xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1} \quad (4.2)$$

mit $v = x_1 + (1/2)\xi_1(x_3 + ix_2) - (1/2)\xi_1^{-1}(x_3 - ix_2)$.

Der Fall $n=4$ umfasst die dreidimensionale Wellengleichung (man setze $x_4 = it$). Besonders einfach wird die Isotropiebedingung, wenn wir $v = a \cdot x = \tilde{a} \cdot \tilde{x}$ mit $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_4)$ und

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_1 + ix_2, x_1 - ix_2, x_3 + ix_4, -x_3 + ix_4)$$

eingeführen. Die Bedingung lautet dann $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 \tilde{a}_4$. Dies motiviert die Wahl

$$\tilde{a} = (1, \xi_1^{-1} \xi_2^{-1}, \xi_2^{-1}, \xi_1^{-1})$$

und einen zugehörigen Operator von der Form (4.1) mit zwei Integrationen, der übrigens mit einem von Gilbert [11] eingeführten Operator verwandt ist.

Folgendes ist für Anwendungen noch von Interesse. Diese und ähnliche Operatoren haben die Eigenschaft, dass man durch geschickte Wahl von f harmonische Funktionen erhält, die sich jeweils durch einzelne oder höchstens endlich viele bekannte spezielle Funktionen darstellen lassen (Legendre- bzw. Jacobi-Polynome im Falle der beiden vorstehenden Operatoren, wie man beweisen kann). Hierauf wurde in Sonderfällen in der Literatur gelegentlich hingewiesen, aber eine systematische Untersuchung dieses Zusammenhanges steht noch aus.

5. Prinzip der Integraldarstellung von Partikulärlösungen

Ein drittes Prinzip, Integraloperatoren der hier betrachteten Art zu gewinnen, basiert auf der Theorie spezieller Funktionen: Man separiert die Gleichung (2.2) in geeigneten Koordinaten, gewinnt dadurch eine linear unabhängige Folge von Partikulärlösungen, verwendet eine Integraldarstellung dieser Funktionen und bildet Reihen solcher Lösungen derart, dass man Integration und Summation vertauschen kann. So erhält man ein einzelnes Integral, durch das ein Integraloperator definiert wird.

Zum Beispiel führt die bekannte Integraldarstellung der Bessel-Funktion (siehe Watson [20], S. 25)

$$J_n(s) = 2^n n! [(2n)! \pi]^{-1} s^n \int_{-1}^1 e^{ist} (1-t^2)^{n-1/2} dt$$

im Falle der Helmholtz-Gleichung vermöge des Prinzips auf den obigen Operator

mit dem Kern g_{\pm} . Eine weitere Anwendung des Prinzips bietet die sog. *Gleichung des axialsymmetrischen Potentials*

$$\psi_{y_1 y_1} + \psi_{y_2 y_2} + \frac{n-2}{y_2} \psi_{y_2} = 0. \quad (5.1)$$

Man erhält diese aus der Laplace-Gleichung $\Delta_n \tilde{\psi} = 0$, indem man die Variablen $y_1 = x_1$, $y_2 = (x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ einführt; daher der Name. Mit $y_1 = r \cos \theta$, $y_2 = r \sin \theta$ folgt

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{n-2}{r^2} (\cot \theta) u_{\theta} = 0.$$

Wir separieren die Variablen und erhalten Lösungen $u = u_j$ der Form

$$u_j(r, \theta) = c_{j\nu} r^j C_j^{\nu}(\cos \theta), \quad \nu = \frac{n}{2} - 1, \quad j = 0, 1, \dots,$$

mit konstantem $c_{j\nu}$. Die C_j^{ν} sind Gegenbauer-Polynome. Diese haben für $\nu > 0$ die Integraldarstellung (vgl. [8], S. 177)

$$C_j^{\nu}(s) = k_{j\nu} \int_0^{\pi} (s + (s^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi)^j \sin^{2\nu-1} \varphi \, d\varphi$$

mit $k_{j\nu} = 2^{1-2\nu} \Gamma(j+2\nu) / j! \Gamma(\nu)^2$. Wir setzen nun

$$w = y_1 + iy_2 \cos \varphi = r \cos \theta + \frac{i}{2} r \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right) \sin \theta, \quad \xi = e^{i\varphi},$$

und wählen $c_{j\nu} = (2i)^{2\nu} / 2 k_{j\nu}$. Dann ergibt sich

$$u_j(r, \theta) = \frac{1}{2} (2i)^{2\nu} \int_0^{\pi} w^j \sin^{2\nu-1} \varphi \, d\varphi = \int_C w^j \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right)^{2\nu-1} \frac{d\xi}{\xi}.$$

C ist dabei die obere Hälfte des Einheitskreises von 1 nach -1 . So erhalten wir den gewünschten Integraloperator \tilde{A} für (5.1) in der Gestalt

$$u(r, \theta) = (\tilde{A}f)(r, \theta) = \int_C f(w) \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right)^{2\nu-1} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (5.2)$$

Hat also eine analytische Funktion f die Darstellung

$$(a) f(w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j w^j, \quad \text{so ist} \quad (b) u = \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j \quad (5.3)$$

mit $u_j = \tilde{A}(w^j)$ die entsprechende Darstellung der Lösung $u = \tilde{A}f$. Und man sieht unmittelbar, dass man aus (5.3 b) und funktionentheoretischen Koeffizientensätzen

nun Aussagen über Lage und Art von Singularitäten, Fortsetzbarkeit, Randverhalten und andere Eigenschaften von u gewinnen kann.

6. Prinzip der Differentialoperatoren

Hier handelt es sich darum, dass wir zuerst einen Differentialoperator definieren und daraus dann einen Integraloperator herleiten. Ausgangspunkt ist die klassische Idee von Laplace und Darboux [6], für gewisse lineare Differentialgleichungen die Lösungen durch Linearkombinationen einer beliebigen Funktion \tilde{f} und endlich vieler ihrer Ableitungen darzustellen. Die Koeffizienten der Kombinationen hängen dabei von denen der Gleichung ab, aber nicht von der Wahl von \tilde{f} . Diese Methode besitzt Bedeutung in der sphärischen Abbildung von Flächen im \mathbf{R}^3 . Die Methode wird gegenwärtig im Zusammenhang mit Differentialoperatoren benutzt, um für gewisse Gleichungen (2.2) eine Funktionentheorie der Lösungen zu entwickeln; vgl. z. B. Bauer und Peschl [3], Florian und Jank [9], Ruscheweyh [19]. Wir zeigen, dass sich diese Methode in unsere Überlegungen einfügt und ein weiteres Prinzip zur Gewinnung von Integraloperatoren liefert.

Über (2.2) setzen wir jetzt voraus, es gebe Funktionen p_1, \dots, p_m derart, dass der durch

$$(D\tilde{f})(z, z^*) = \sum_{\mu=0}^m p_{\mu}(z, z^*) \tilde{f}^{(\mu)}(z) \quad (6.1)$$

definierte Differentialoperator D für jedes im Nullpunkt holomorphe \tilde{f} eine Lösung $u = D\tilde{f}$ ergibt. (Dies gilt für viele praktisch wichtige Gleichungen; vgl. [13].) Aus (6.1) und der Cauchy-Formel erhalten wir

$$(D\tilde{f})(z, z^*) = \sum_{\mu=0}^m p_{\mu}(z, z^*) \frac{\mu!}{2\pi i} \int_C \frac{\tilde{f}(t)}{(t-z)^{\mu+1}} dt.$$

Damit ist schon ein Integraloperator T_1 gewonnen, nämlich

$$(T_1\tilde{f})(z, z^*) = \int_C g_1(z, z^*, t) \tilde{f}(t) dt$$

mit dem Kern

$$g_1(z, z^*, t) = \sum_{\mu=0}^m \frac{\mu! p_{\mu}(z, z^*)}{2\pi i (t-z)^{\mu+1}}.$$

Man beachte, dass C geschlossen ist, also Residuenintegration unmittelbar ermöglicht.

Einen anderen Operator ergibt das Prinzip, wenn wir statt (6.1)

$$u(z, z^*) = \sum_{\mu=0}^m q_{\mu}(z, z^*) f_{\mu}(z)$$

ansetzen und $f'_\mu = f_{\mu-1}$ fordern. Dieser Forderung genügen wir durch ein Liouville-Integral:

$$f_0(z) = \tilde{f}(z), \quad f_\mu(z) = \int_0^z \frac{(z-\xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \tilde{f}(\xi) d\xi, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Einsetzen ergibt den Integraloperator T_2 , definiert durch

$$u(z, z^*) = (T_2 \tilde{f})(z, z^*) = \int_0^z g_2(z, z^*, \xi) \tilde{f}(\xi) d\xi + q_0(z, z^*) \tilde{f}(z) \quad (6.2)$$

mit dem Kern

$$g_2(z, z^*, \xi) = \sum_{\mu=1}^m q_\mu(z, z^*) \frac{(z-\xi)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}.$$

Hierzu betrachten wir eine einfache *Anwendung*:

Die vorstehend erwähnte Arbeit [3] betrifft die oft untersuchte Gleichung

$$u_{zz^*} + \frac{k}{\omega^2} u = 0, \quad \omega = 1 + zz^*. \quad (6.3)$$

Diese hat dadurch Bedeutung, dass sie sich aus der Wellengleichung $\Delta_3 \psi = \psi_{tt}$ durch Separation in Kugelkoordinaten, also durch den Produktansatz

$$\psi = R(r) Y(\theta, \varphi) \exp(\pm ikt),$$

und anschließende stereographische Projektion

$$z = e^{i\varphi} \sin\theta / (1 - \cos\theta), \quad z^* = e^{-i\varphi} \sin\theta / (1 - \cos\theta)$$

in der Gleichung für Y ergibt; hierbei ist $u(z, z^*) = Y(\theta, \varphi)$. Ein Differentialoperator für (6.3) mit $k = m(m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, ist definiert durch

$$u(z, z^*) = (D\tilde{f})(z, z^*) = \sum_{\mu=0}^m \frac{(2m-\mu)!}{(m-\mu)! \mu!} \left(-\frac{z^*}{\omega}\right)^{m-\mu} \tilde{f}^{(\mu)}(z) \quad (6.4)$$

und lässt sich, wie oben angegeben, in einen Integraloperator überführen.

Abschliessend sei erwähnt, dass (6.4) mit $m=1$ auch in der Theorie der Minimalflächen angewendet werden kann, indem es die allgemeine Lösungsdarstellung

$$u(z, z^*) = \tilde{f}'(z) - \frac{2z^*}{1+zz^*} \tilde{f}(z)$$

von H.A. Schwarz ergibt, zu deren Beweis man sonst die Weierstrass-Darstellung für Minimalflächen heranzieht. Auf die geometrische Bedeutung dieses Ergebnisses können wir in der Kürze nicht eingehen, sondern verweisen auf [5], S. 423.

7. Anwendung auf aerodynamische Übergangsprobleme

Übergangsprobleme sind Strömungsprobleme, bei denen sowohl Unterschall- wie Überschallströmung herrscht. Ein derartiges Problem, an dem gegenwärtig gearbeitet wird, ergibt sich z. B. für Tragflügel beim Unterschallflug nahe der Schallgeschwindigkeit, weil dann damit zu rechnen ist, dass an der Oberseite des Tragflügels eine Überschallzone auftritt. Gesucht werden Profile, bei denen die (nichtviskose, kompressible) Strömung praktisch schockfrei wird. Brauchbare Rechenmethoden dazu kennt man erst seit etwa zehn Jahren. Einzelheiten über das Problem, seine Entwicklung und seinen gegenwärtigen Stand sowie über experimentelle Erfahrungen und einschlägige Literatur findet man in [1] und [10]. Andere Übergangsprobleme werden in [12] behandelt.

Übergangsprobleme sind deshalb besonders schwierig, weil sie auf Gleichungen gemischten Typs führen, die im Unterschallbereich elliptisch und im Überschallbereich hyperbolisch sind. Eine solche ist die *Tricomi-Gleichung*

$$\sigma\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0, \quad (7.1)$$

die für $\sigma > 0$ elliptisch und für $\sigma < 0$ hyperbolisch ist. Sie ist besonders wichtig und wird in den Anwendungen häufig benutzt.

Wir geben zuerst eine recht einfache Herleitung von (7.1) aus den Grundgleichungen an: Der Satz von der Erhaltung der Masse ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

t ist die Zeit, ρ die Dichte und v die Geschwindigkeit. Im stationären Fall wird $\rho_t = 0$. Die Strömung sei zweidimensional und wirbelfrei. Dann existiert ein Geschwindigkeitspotential ϕ . Mit $v = (v_1, v_2) = \operatorname{grad}\phi$ erhalten wir also

$$(\rho\phi_x)_x + (\rho\phi_y)_y = 0.$$

Dies ist die Integrabilitätsbedingung des Systems

$$\rho\phi_x = \psi_y, \quad \rho\phi_y = -\psi_x. \quad (7.2)$$

ψ ist die Stromfunktion; $\psi = \text{konst}$ sind die Stromlinien. Wirken keine äusseren Kräfte, so folgt aus dem 2. Newtonschen Gesetz, dass ρ eine Funktion von $q = |v|$ ist. (7.2) ist also nichtlinear, lässt sich aber linearisieren, indem man q und $\theta = \arctan(v_2/v_1)$ verwendet, also zu Polarkoordinaten in der Hodographenebene (der $v_1 v_2$ -Ebene) übergeht. (7.2) gewinnt dann die Gestalt

$$\phi_q = \frac{M^2 - 1}{\rho q} \psi_\theta, \quad \phi_\theta = \frac{q}{\rho} \psi_q. \quad (7.3)$$

$M = q/a$ ist hierbei die Machzahl, $a = \sqrt{dp/d\rho}$ die lokale Schallgeschwindigkeit und p der Druck. Von q gehen wir zu σ über, das wir durch $d\sigma/dq = -\rho/q$ definieren. Weiterhin eliminieren wir ϕ durch Differentiation. Dies ergibt die sog. *Chaplygin-Gleichung*

$$K\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0$$

mit $K = (1 - M^2)/\rho^2$. Für kleine $|\sigma|$, d.h. nahe der Schalllinie, ist $K \approx b\sigma$ mit konstantem b , also $K \approx \sigma$ nach einer geeigneten linearen Transformation der unabhängigen Variablen. Dies ergibt (7.1). Vermöge

$$z = \frac{2}{3} \sigma^{3/2} + i\theta, \quad z^* = \frac{2}{3} \sigma^{3/2} - i\theta, \quad u = \sigma^{1/4} \psi$$

formen wir (7.1) um in

$$Lu = u_{zz^*} + \frac{k}{(z + z^*)^2} u = 0, \quad k = \frac{5}{36} \quad (7.4)$$

und verwenden für die so transformierte Gleichung zur Lösungsdarstellung einen Eichler-Operator [siehe (3.3)]

$$u(z, z^*) = (\tilde{T}f)(z, z^*) = \int_{z_0}^z \tilde{g}(z, z^*, t) f(t) dt - f(z) \quad (7.5)$$

(vgl. hierzu auch die Untersuchungen von Lanckau [16]). Die obengenannten Bedingungen für den Kern \tilde{g} werden viel einfacher, indem wir

$$\tilde{g}(z, z^*, t) = \frac{2}{z + z^*} \frac{dP}{d\eta}, \quad \eta = \frac{2t - z + z^*}{z + z^*}$$

setzen. Sie lauten dann, dass $dP/d\eta$ der Legendre-Gleichung mit dem Parameter $\nu = -1/6$ (und $\mu = 0$) genügen muss und $dP/d\eta$ für $\eta = 1$ den Wert $-k/2$ hat. Führen wir η als Integrationsvariable ein und integrieren dann partiell, so erhalten wir bei entsprechender Wahl des Integrationsweges aus (7.5) einfach

$$u(z, z^*) = \int_1^\infty P_{-1/6}(\eta) \frac{d}{d\eta} f\left(\frac{1}{2}(z + z^*)\eta + \frac{1}{2}(z - z^*)\right) d\eta. \quad (7.6)$$

Dieses Resultat ist bedeutsam auf zweierlei Weisen. Erstens können wir durch Einsetzen verschiedener Funktionen f nun Partikulärlösungen erhalten, die von

Carrier, Chaplygin, Darboux, Ehlers, Guderley, Tamada und Tomotika betrachtet wurden. Diese ergeben sich nun alle aus der einheitlichen Darstellung (7.6) – übrigens durch die Wahl sehr einfacher Funktionen f (einzelner Potenzen, Exponential- sowie Logarithmusfunktionen). Zweitens kann man jetzt allgemeine Eigenschaften von Klassen von Lösungen untersuchen, die speziellen Klassen von Funktionen f entsprechen, etwa Polynomen, meromorphen Funktionen, algebraischen Funktionen usw. Diese Tatsache ist wichtig bei Anwendung der sog. *indirekten Methode*. Definitionsgemäss besteht diese darin, dass man erst grosse Klassen von Lösungen bestimmt und diese dann nach Lösungen durchforscht, die von technisch realisierbaren Profilen erzeugt werden können. Dieses Verfahren findet übrigens auch Anwendung in der Elastizitätstheorie, da dort der direkte Angriff auf Randwertprobleme ebenfalls oft zu schwierig ist. In der Aerodynamik kommt hinzu, dass die Probleme u. U. nicht sachgemäss (im Sinne von Hadamard) zu sein brauchen; vgl. [1, 18].

Verwandte und andere Anwendungen findet man in [4] zitiert, und einen Überblick über einige neuere Forschungen auf dem Gebiet der Integraloperatoren vermittelt [17].

Manfred Kracht, Universität Düsseldorf
Erwin Kreyszig, University of Windsor, Ontario
Gunnar Schröder, Universität Düsseldorf

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 F. Bauer, P. Garabedian und D. Korn: A Theory of Supercritical Wing Sections with Computer Programs and Examples. Berlin 1972.
- 2 K.W. Bauer: Über eine der Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} \pm n(n+1)w = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. Bonn. Math. Schr. 23, 98 p. (1965).
- 3 K.W. Bauer und E. Peschl: Eindeutige Lösungen einer partiellen Differentialgleichung mit mehrdeutigen Erzeugenden. Arch. Math. 18, 285–289 (1967).
- 4 S. Bergman: Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations, 3. Aufl. Berlin 1971.
- 5 L. Bianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Aufl. Leipzig 1910.
- 6 G. Darboux: Théorie générale des surfaces, Bd. II, 3. Aufl. New York 1972.
- 7 M. Eichler: Allgemeine Integration linearer partieller Differentialgleichungen von elliptischem Typ bei zwei Grundvariablen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 15, 179–210 (1942/47).
- 8 A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger und F.G. Tricomi (Hrsg.): Higher Transcendental Functions, Bd. II. New York 1953.
- 9 H. Florian und G. Jank: Polynomerzeugende bei einer Klasse von Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen. Monatsh. Math. 75, 31–37 (1971).
- 10 P. Garabedian und D. Korn: A Systematic Method for Computer Design of Supercritical Airfoils in Cascade. Commun. pure appl. Math. 29, 369–382 (1976).
- 11 R.P. Gilbert: Singularities of Solutions of the Wave Equation in Three Dimensions. J. reine angew. Math. 205, 75–81 (1960).
- 12 K.G. Guderley: Theorie schallnaher Strömungen. Berlin 1957.
- 13 M. Kracht und E. Kreyszig: Zur Konstruktion gewisser Integraloperatoren für partielle Differentialgleichungen, I, II. Manuscripta math. 17, 79–103, 171–186 (1975).
- 14 M. Kracht und G. Schröder: Bergmansche Polynom-Erzeugende erster Art. Manuscripta math. 9, 333–355 (1973).
- 15 E. Kreyszig: On Certain Partial Differential Equations and Their Singularities. J. rat. Mech. Analysis 5, 805–820 (1956).

- 16 E. Lanckau: Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung. *Z. angew. Math. Mech.* 42, 180–186 (1962).
- 17 V.E. Meister, N. Weck und W.L. Wendland (Hrsg.): *Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations*. Berlin 1976.
- 18 P.F. Neményi: Recent Developments in Inverse and Semi-inverse Methods in the Mechanics of Continua. *Adv. appl. Mech.* 2, 123–151 (1951).
- 19 S. Ruscheweyh: Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $(1 - z\bar{z})^2 w_{zz} - n(n+1)w = 0$. *J. reine angew. Math.* 270, 143–157 (1974).
- 20 G.N. Watson: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2. Aufl. Cambridge 1966.

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen über Zulässigkeitsmengen vollständig additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ heisst vollständig additiv, wenn für alle natürlichen Zahlen n und m $f(nm) = f(n) + f(m)$ gilt. Nach Kátaí [3] nennt man eine Menge A natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (E -Menge), wenn für jede vollständig additive Funktion $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ aus $f(A) = \{0\}$ die Gleichung $f(\mathbf{N}) = \{0\}$ folgt. Verschiedene Autoren [1–5] haben allgemeine Charakterisierungen und spezielle Beispiele für E -Mengen gegeben. Insbesondere hat die Menge P der Primzahlen diese Eigenschaft. Im allgemeinen können aber die Werte einer vollständig additiven Funktion f auf einer E -Menge nicht beliebig vorgeschrieben werden. Mengen, die dies zulassen, und solche, die zugleich auch E -Mengen sind, werden im folgenden charakterisiert.

Definition. Eine Menge B natürlicher Zahlen heisst zulässig oder Zulässigkeitsmenge (kurz Z -Menge), falls sich jede Funktion $f: B \rightarrow \mathbf{C}$ so auf \mathbf{N} fortsetzen lässt, dass die Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ vollständig additiv ist.

Satz 1. Eine Menge $B \subset \mathbf{N}$ ist genau dann Z -Menge, wenn sich die Zahl 1 «nicht» in der Form

$$1 = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k} \quad (1)$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k , b_i und r_i die Bedingungen $A: k \in \mathbf{N}$, $b_1, \dots, b_k \in B$; $b_i \neq 1$; $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ erfüllen.

Beweis:

1. Angenommen die Zahl 1 lässt sich in der Form (1) schreiben. Betrachte die Funktion $f: B \rightarrow \mathbf{C}$ zu

$$f(n) := \begin{cases} 1 & n = b_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$