Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 35 (1980)
Heft: 6

Artikel: Die Schmiegkegelschnitte einer Klothoide
Autor: Paukowitsch, H.P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34686

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 35 Heft 6 Seiten 129-160 Basel, 10. November 1980

Die Schmiegkegelschnitte einer Klothoide

Als fahrdynamisch günstiger Übergangsbogen zwischen geradliniger und kreisförmiger Mittenlinie einer Strasse wurde 1937 von L. Oerley der Klothoidenbogen in den Strassenbau eingeführt. Die Koordinaten der Punkte sowohl der Klothoide als auch ihrer Evolute kann man mit hinreichender Genauigkeit Tabellenwerken entnehmen. Trotzdem sind Verfahren von Interesse, welche Klothoidenbögen sowohl beim Entwurf als auch bei der Bauausführung im Gelände approximieren. Als Beispiele führen wir an: Näherungsformeln unter Benützung kubischer Parabeln, näherungsweise Bestimmung einer Klothoide aus gegebenen Punkten oder Tangenten, auf Sehnen bzw. Tangenten bzw. Sekanten basierende Absteckverfahren, Zweiachtelmethode zur Punkteverdichtung (vgl. etwa [5]); weiters sei auf die Zusammensetzung von Klothoidenbögen im Zusammenhang mit Bremskurven [2] hingewiesen. In ([5], S. 115) wird eine von Nádeník [6] stammende aufwendige Konstruktion einzelner Punkte des eine Klothoide von maximaler Ordnung berührenden Schmiegkegelschnittes angegeben, der für eine Annäherung höherer Ordnung einer Klothoide wertvolle Dienste leistet. Die vorliegende Mitteilung bringt eine einfache direkte Achsen- und Scheitelkonstruktion des Schmiegkegelschnittes zu einem Klothoidenpunkt P unter Benützung des Krümmungskreises der Klothoide in P.

1. Schmiegkegelschnitte einer ebenen Kurve

Nach ([1], Bd. II, S. 27) gibt es in jedem *Nichtwendepunkt* $c(u_0)$ einer regulären ebenen C^4-Kurve $c(I), u_0 \in I$ genau einen von *vierter Ordnung berührenden Schmiegkegelschnitt* S. Dieser wird in dem durch die *Frenet-Basis*[1]) $(c_1(u_0), c_2(u_0))$ von $c(I)$ in $c(u_0)$ bestimmten kartesischen Koordinatensystem $(c(u_0); x, y)$ durch eine Funktion $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ der Gestalt

$$F(x,y) := ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + y, \qquad a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

1) Denken wir die gegebene Kurve durch einen *normierten Weg* $c: I \to \mathbf{R}^2$ beschrieben, also $\|\dot{c}\| = 1$ in I, so gelten für die Vektoren $c_1(u_0) := \dot{c}(u_0)$, $c_2(u_0) =: \|\ddot{c}(u_0)\|^{-1} \ddot{c}(u_0)$ der Frenet-Basis von $c(I)$ im Nichtwendepunkt $c(u_0)$ die *Ableitungsgleichungen* $\dot{c}_1(u_0) = \varkappa(u_0) c_2(u_0)$, $\dot{c}_2(u_0) = -\varkappa(u_0) \dot{c}_1(u_0)$ mit $\varkappa(u_0) = \|\ddot{c}(u_0)\| \neq 0$.

festgelegt. Nach ([1], Bd.I, S.32) *berühren*[2]) einander die Kurven $c(I)$ und S im gemeinsamen Punkt $c(u_0)=:P$ genau dann *von k-ter Ordnung* ($k=1,2,\ldots$), wenn die ersten k Ableitungen der zusammengesetzten Funktion $F\circ c: I\to\mathbf{R}$ an der Stelle $u_0\in I$ verschwinden. Ist die *Krümmung* $\varkappa(u_0)=:\varkappa_0$ von $c(I)$ im Punkt P ungleich Null, so berühren einander die beiden Kurven $c(I)$ und S in P genau für

$$\alpha=-\frac{\varkappa_0}{2},\qquad \beta=-\frac{\dot\varkappa_0}{6\varkappa_0},\qquad \gamma=-\frac{1}{18\varkappa_0^3}(9\varkappa_0^4-4\dot\varkappa_0^2+3\varkappa_0\ddot\varkappa_0) \tag{2}$$

von vierter Ordnung, wie kurze Rechnung unter Benützung der Ableitungsgleichungen eines normierten Weges c aus Fussnote 1 zeigt. Genau für zusätzlich

$$36\varkappa_0^4\dot\varkappa_0-45\varkappa_0\dot\varkappa_0\ddot\varkappa_0+40\dot\varkappa_0^3+9\varkappa_0^2\dddot\varkappa_0=0 \tag{3}$$

liegt Berührung fünfter Ordnung (oder *sechspunktige* Berührung) im dann *sextaktisch* genannten Punkt P vor. Weiters gibt es genau eine $c(I)$ im Nichtwendepunkt P hyperoskulierende Parabel, die sich für Koeffizienten α',β' und γ' mit

$$\alpha'=\alpha,\qquad \beta'=\beta,\qquad \gamma'=\frac{\beta^2}{\alpha}=-\frac{\dot\varkappa_0^2}{18\varkappa_0^3} \tag{4}$$

in (1) einstellt. Die Mittelpunkte aller $c(I)$ in P hyperoskulierenden Kegelschnitte liegen auf der *Affinnormale* genannten Geraden

$$x=\lambda y,\quad \lambda=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\dot\varkappa_0}{3\varkappa_0^2} \tag{5}$$

durch P, welche parallel zur Achse der hyperoskulierenden Parabel ist.

2. Schmiegkegelschnitte einer Klothoide

Für eine durch die *natürliche Gleichung* $\varkappa: u\in\mathbf{R}\mapsto\varkappa(u):=u$ festgelegte *Einheitsklothoide*[3]) $c(\mathbf{R})=:C$ bestimmen sich die Koeffizienten in der Gleichung (1) des Schmiegkegelschnittes der Kurve im Punkt $c(u_0)=:P(u_0\neq 0)$ nach (2) zu

$$\alpha=-\frac{u_0}{2},\qquad \beta=\frac{1}{12\alpha}=-\frac{1}{6u_0},\qquad \gamma=\alpha-\frac{1}{36\alpha^3}=-\frac{1}{18u_0^3}(9u_0^4-4). \tag{6}$$

Dabei ist $|u_0|$ die *Bogenlänge* $\overset{\frown}{WP}$ vom Wendepunkt $c(0)=:W$ der Einheits-

2) Statt Berührung erster bzw. zweiter bzw. dritter Ordnung sprechen wir auch von *Berührung* bzw. *Oskulation* bzw. *Hyperoskulation*.

3) Misst man die Ebene mit einem Längenmaßstab zur Einheitsstrecke $e'=ke$ statt e aus, $k\in\mathbf{R}^+$, so verändert sich die Krümmung einer ebenen Kurve von $\varkappa(u)$ zu $\varkappa'(u)=k^{-2}\varkappa(u)$. Nach geeigneter Wahl des Maßstabes lässt sich daher eine *Klothoide* mit der natürlichen Gleichung $\varkappa: u\mapsto k^{-2}u$ als Einheitsklothoide auffassen.

klothoide C zum Kurvenpunkt P. Wegen der *zentrischen Symmetrie* von C bezüglich W (vgl. [5], S.38) setzen wir im folgenden $u_0>0$ voraus. Genau für $\beta^2-\alpha\gamma=0$, also für $u_1=(5/9)^{1/4}$ ist der Schmiegkegelschnitt zum Punkt $c(u_1)=:Q$ von C eine Parabel[4]), für P zwischen W und Q eine Hyperbel und ausserhalb dieses Bogens eine Ellipse. Diese Ellipsen werden mit wachsender Bogenlänge u_0 immer kreisförmiger, wie Diskussion von (1) zusammen mit (6) lehrt. Die Klothoide C ist wegen (3) frei von sextaktischen Punkten. Nach ([3], S.52) ist daher der Durchschnitt je zwei ihrer Schmiegkegelschnitte leer, falls die Berührpunkte dem Kurvenbogen $c(\mathbf{R}^+)$ oder $c(\mathbf{R}^-)$ angehören. Insbesondere liegen die nicht hyperbelförmigen Schmiegkegelschnitte ganz in der den betreffenden Klothoidenbogen enthaltenden Halbebene bezüglich der Wendetangente, welche Grenzlage der Schmiegkegelschnitte für $u_0\to 0$ ist.

3. Krümmungskreis in einem Kegelschnittpunkt

Unser Ziel ist eine direkte Achsen- und Scheitelkonstruktion des Schmiegkegelschnittes S zu einem Klothoidenpunkt P unter Benützung des Krümmungskreises S_1 der Klothoide in P, der natürlich auch den Krümmungskreis von S in P abgibt. Wir diskutieren deshalb zunächst den Zusammenhang zwischen einem Kegelschnitt und dem Krümmungskreis in einem seiner Punkte.
Ein Kegelschnitt L der Gestalt (1) besitzt im Koordinatenursprung $P=(0,0)$ den *oskulierenden Krümmungskreis* L_1

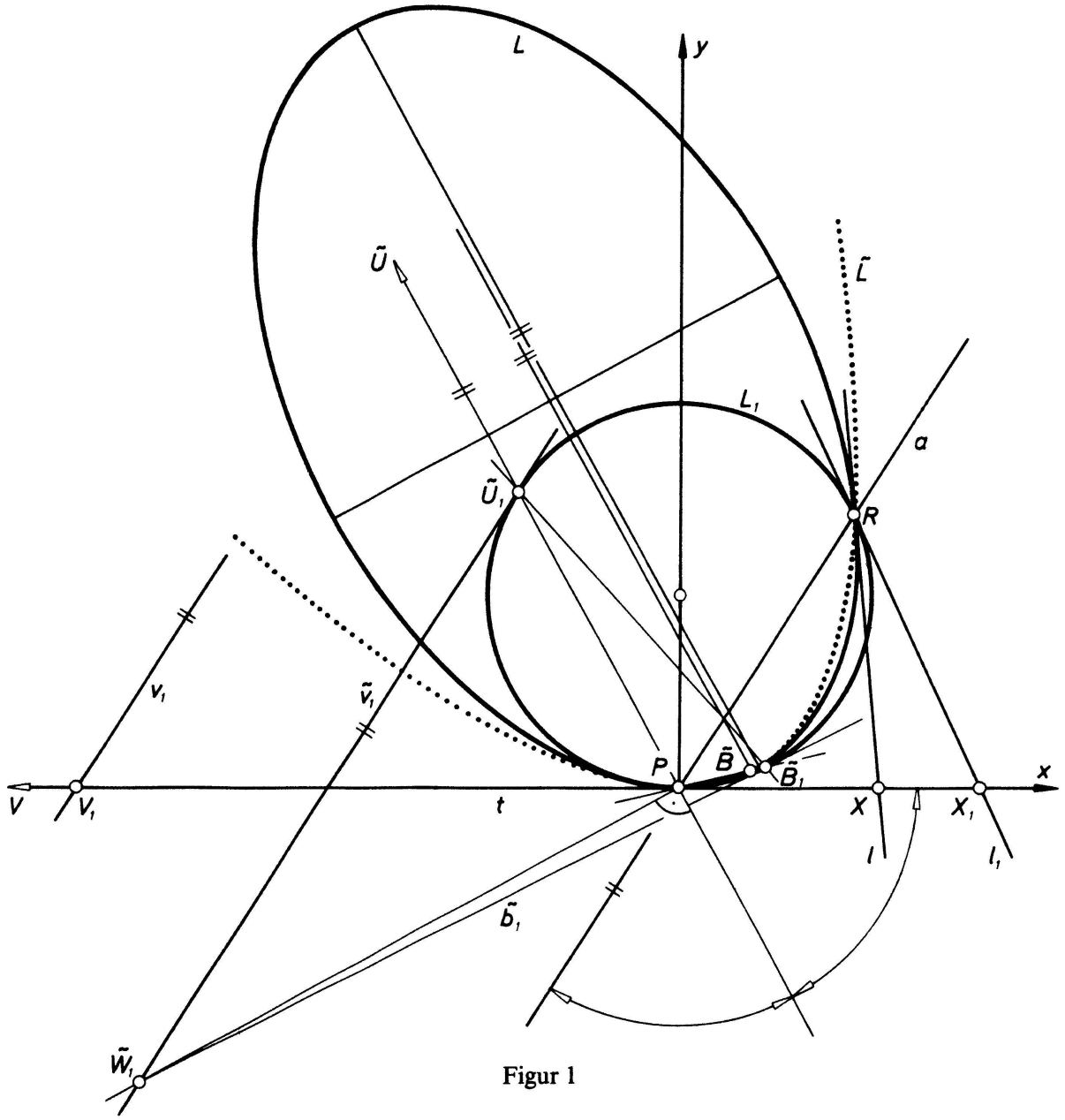
$$x^2+y^2+\frac{y}{a}=0. \tag{7}$$

Bekanntlich gibt es genau eine *(P,a)-Elation* φ mit dem *Oskulationspunkt* P als *Zentrum* und einer *Achse* a durch P, die $\varphi(L_1)=L$ leistet; die durch die in P oskulierenden Kegelschnitte L_1 und L eindeutig bestimmte Achse a dieser *perspektiven Kollineation* φ fällt genau dann in die gemeinsame Tangente $t(y=0)$ von L_1 und L in P, wenn L_1 und L in P hyperoskulieren, also P ein *Scheitel* von L ist (vgl. etwa [4], S.65). In (1) ist $P=(0,0)$ genau für $\beta=0$ ein Scheitel; für $\beta\neq 0$ wird die Elationsachse a durch

$$x=\mu y, \qquad \mu=\frac{\alpha-\gamma}{2\beta} \tag{8}$$

beschrieben, wie Elimination von x und y aus (1), (7) und dem Ansatz $x=\mu y$, $\mu\in\mathbf{R}$ für a erkennen lässt. Da ein Klothoidenpunkt nie Scheitel des betreffenden

4) Für die Koordinaten (x_Q,y_Q) des schon in [6] erwähnten Punktes Q der Einheitsklothoide mit parabelförmigem Schmiegkegelschnitt im auf den Wendepunkt als Ursprung und auf die Wendetangente als x-Achse gestützten kartesischen Koordinatensystem ergibt die Auswertung der Integrale in ([5], S.40): $x_Q=0{,}851426289\ldots$, $y_Q=0{,}106189997\ldots$ Die Tangente in Q schliesst mit der Wendetangente den Winkel $\delta_Q=21°21'10{,}35\ldots''$ ein. Die Bogenlänge $\overset{\frown}{WQ}$ errechnet sich zu $\overset{\frown}{WQ}=(5/9)^{1/4}=0{,}863340021\ldots$ und der *Krümmungsradius* in Q zu $(\overset{\frown}{WQ})^{-1}=1{,}158292185\ldots$



Figur 1

Schmiegkegelschnittes ist (vgl. (6)), genügt es, den Punkt P als Nichtscheitel von L vorauszusetzen. Insbesondere schneiden einander dann L_1 und L in zwei Punkten P und R auf der von t verschiedenen Elationsachse a (vgl. Fig. 1). Diskussion des durch (1) festgelegten Kegelschnittes L im Falle einer Ellipse bzw. Hyperbel ($\beta^2-a\gamma<0$ bzw. >0) liefert zusammen mit (8) das bekannte Ergebnis, dass die Winkelsymmetralen der Elationsachse a und der gemeinsamen Tangente t von L_1 und L im Oskulationspunkt P die Achsenrichtungen von L sind. Im Falle einer Parabel L entsteht a durch Spiegelung von t an dem *Parabeldurchmesser* durch P (vgl. Fig. 1).

Die L_1 in L abbildende Elation φ zum Zentrum P lässt sich konstruktiv verfolgen, wenn neben der Achse $a(\neq t)$ der Bildpunkt $\varphi(X_1)=:X$ eines Punktes $X_1(\notin a)$ bekannt ist. Ein solches Punktepaar bestimmen die Schnittpunkte des Kollineationsstrahles t mit den Tangenten l_1 bzw. l von L_1 bzw. L im von P verschiedenen, gemeinsamen Punkt $R\in a$ der beiden Kegelschnitte. Bei der folgenden Anwendung

auf die Klothoide besteht dieses zweckmässige Punktepaar stets aus *eigentlichen* Punkten, so dass wir in

$$X_1=\left(-\frac{1}{2\mu a},0\right),\quad \varphi(X_1)=X=\left(-\frac{1}{2(\mu a+\beta)},0\right),\qquad \mu=\frac{\alpha-\gamma}{2\beta} \tag{9}$$

parallele Lage von l_1 bzw. l zur *Oskulationstangente* t nicht berücksichtigen müssen; damit sind alle in (9) auftretenden Nenner ungleich Null. Für die konstruktive Durchführung der Elation φ ist die *Verschwindungsgerade* v_1 von Interesse: Diese zur Elationsachse a parallele Gerade trifft die Oskulationstangente t im Punkt[5]) V_1 mit

$$V_1=\left(\frac{1}{2\beta},0\right), \tag{10}$$

der unter φ in den Fernpunkt V von t abgebildet wird.
Ist (P,t) ein *Linienelement* eines Kreises L_1 und a eine von t verschiedene Gerade durch P, so gibt es zwei (P,a)-Elationen, die L_1 jeweils in eine im Punkt P oskulierende Parabel überführen; die zu a parallelen Kreistangenten geben die Verschwindungsgeraden jener Elationen ab. Der Figur 1 kann man eine direkte Scheitelkonstruktion des (punktiert eingezeichneten) parabelförmigen Bildes $\tilde{\varphi}(L_1)=\tilde{L}$ von L_1 bei einer Elation $\tilde{\varphi}$ dieser Art (die Verschwindungsgerade $\tilde{v}_1$ berührt L_1 im Punkt $\tilde{U}_1$) entnehmen: Das Lot aus P auf den Parabeldurchmesser $P\tilde{U}_1$ trifft $\tilde{v}_1$ im Punkt $\tilde{W}_1$; die von $\tilde{v}_1$ verschiedene Kreistangente $\tilde{b}_1$ durch $\tilde{W}_1$ berührt L_1 im Urbild $\tilde{B}_1$ des Parabelscheitels $\tilde{B}$, der sich dann als Lösung der *Vervollständigungsaufgabe* der Elation $\tilde{\varphi}$ (Achse a, Verschwindungsgerade $\tilde{v}_1$) ergibt.

4. Konstruktive Festlegung einer Elation, die den Krümmungskreis zu einem Klothoidenpunkt in den Schmiegkegelschnitt überführt

Es sei $(c(u_0),t)$ ein Linienelement der Einheitsklothoide[6]) $c(\mathbf{R})=C$ und S_1 der Krümmungskreis von C in $c(u_0)=P$ vom Radius $\rho_0=(\varkappa(u_0))^{-1}=u_0^{-1}$. Wir benützen wie bisher P bzw. t als Ursprung bzw. x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Durch Einsetzen von (6) in (9) erhalten wir

$$X_1=(-3a,0)=\left(\frac{3u_0}{2},0\right),\qquad \varphi(X_1)=X=(-2a,0)=(u_0,0),\qquad u_0=\overset{\frown}{WP}, \tag{11}$$

5) Die (P,a)-Elation φ induziert auf t eine *parabolische Projektivität* π mit $Z_1=(z_1,0)\mapsto Z=(z,0)$ und $z=z_1(-2\beta z_1+1)^{-1}$, wie ein unbestimmter Ansatz $z=(\delta_1 z_1+\delta_2)(\delta_3 z_1+\delta_4)^{-1},\delta_i\in\mathbf{R},\delta_1\delta_4-\delta_2\delta_3\neq 0$ für π mit $\pi(P)=P=(0,0)$ und $\pi(X_1)=X$ gemäss (9) lehrt. Genau für $z_1=(2\beta)^{-1}$ ist daher $\pi(Z_1)=\pi(V_1)$ der Fernpunkt V von t.
6) In Abhängigkeit von der Bogenlänge $u_0=\overset{\frown}{WP}$ vom Wendepunkt W zum Kurvenpunkt P der Einheitsklothoide C können wir die Koordinaten von P und den Anstieg der Tangente in P im auf Wendepunkt und Wendetangente gestützten kartesischen Koordinatensystem etwa [5] entnehmen.

was die in ([5], S. 115) und [6] nicht berücksichtigte Beziehung

$$\overline{PX}:\overline{PX}_1=2:3 \tag{12}$$

erkennen lässt. Abtragen der Strecke $3u_0/2$ bzw. $u_0=\overset{\frown}{WP}$ auf der Tangente t ausgehend von P in Richtung wachsender Bogenlänge u auf der Klothoide C ergibt den Punkt X_1 bzw. X auf t; ein Kreisbogen um X_1 durch P trifft den Kreis S_1 im von P verschiedenen Schnittpunkt R mit der Elationsachse a, da die Kreistangente s_1 in R dann durch X_1 verläuft (vgl. Abschnitt 3). Die Elation φ zum Zentrum P, welche den Krümmungskreis S_1 der Klothoide C auf den Schmiegkegelschnitt S abbildet, kann daher unter Benützung der Achse[7]) $a=PR$ und $X_1\mapsto X$ konstruktiv bequem verfolgt werden. Wir formulieren den einige Ergebnisse zusammenfassenden

Satz 1. *Der Schmiegkegelschnitt S in einem vom Wendepunkt W verschiedenen Punkt P der Einheitsklothoide C ist genau für $0<\overset{\frown}{WP}<(5/9)^{1/4}$ eine Hyperbel, für $\overset{\frown}{WP}=(5/9)^{1/4}$ eine Parabel und sonst eine Ellipse. Der Punkt X_1 bzw. X der im Sinne wachsender Bogenlänge $\overset{\frown}{WP}$ positiven Halbgeraden bezüglich P auf der Klothoidentangente t in P mit $\overline{PX}_1=3/2\ \overset{\frown}{WP}$ bzw. $\overline{PX}=\overset{\frown}{WP}$ ist Urpunkt bzw. Bildpunkt in jener Elation φ zum Zentrum P, die den Krümmungskreis S_1 von C in P in den Schmiegkegelschnitt S überführt. Die Elationsachse a von φ fällt in die Polare von X_1 bezüglich S_1.*

Mit Satz 1 ist die konstruktive Festlegung des Schmiegkegelschnittes S zu einem Klothoidenpunkt prinzipiell erledigt. Die restlichen Diskussionspunkte geben unter Benützung von Eigenschaften der Elation φ zweckmässige Konstruktionsschritte zur direkten Ermittlung der Achsen und Scheitel von S an. So schneidet die Verschwindungsgerade v_1 von φ die Klothoidentangente t in P nach (10) und (6) im Punkt $V_1=(6a,0)=(-3u_0,0)$, was $\overline{PV}_1=3\ \overset{\frown}{WP}$, also

$$\overline{PX}_1:\overline{PV}_1=1:-2, \tag{13}$$

erkennen lässt.

Satz 2. *Die zur Achse a der Elation φ aus Satz 1 parallele Verschwindungsgerade v_1 trifft die Klothoidentangente t in P im Punkt V_1, der (13) erfüllt.*

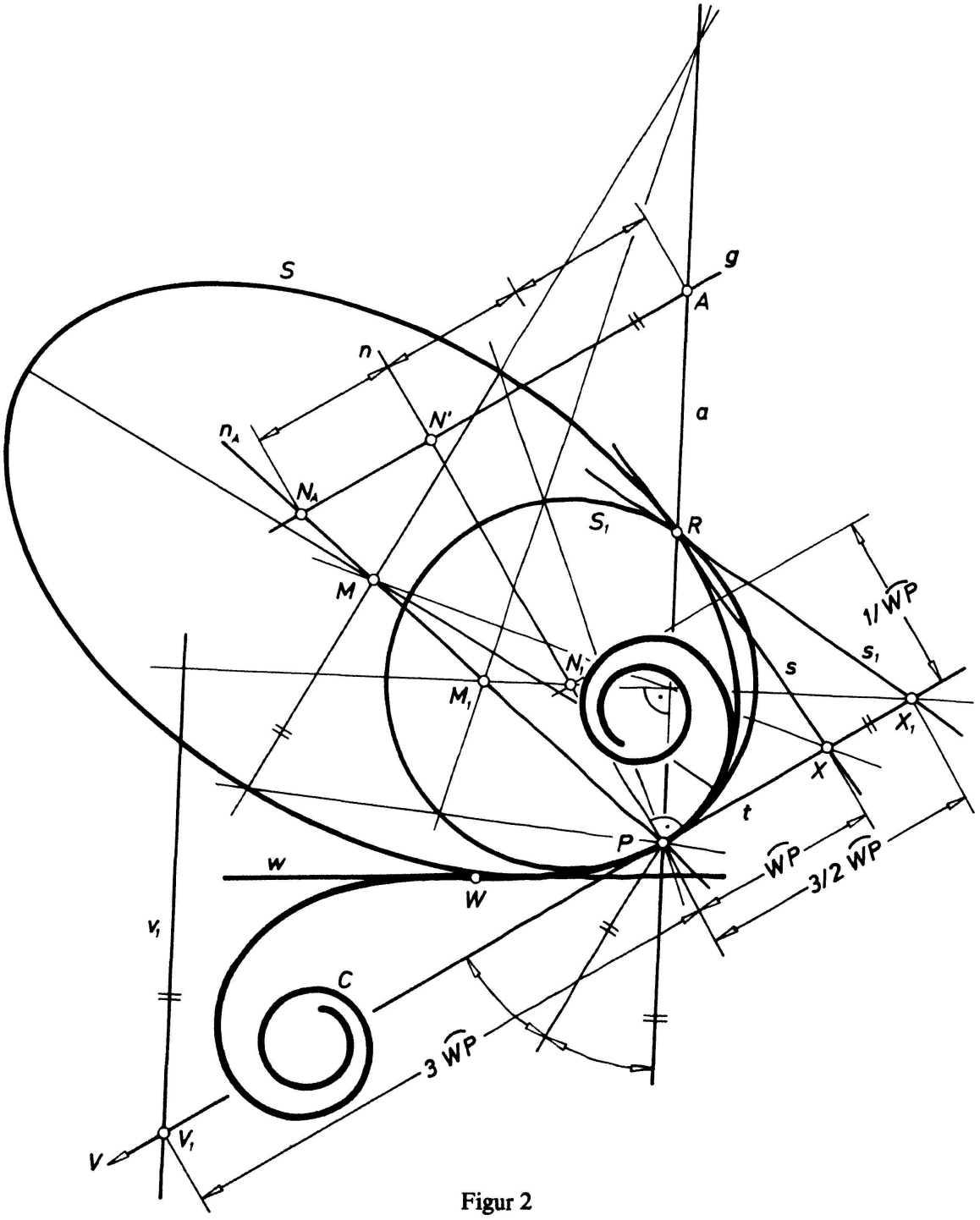
5. Parabelförmiger Schmiegkegelschnitt

Berührt die Verschwindungsgerade v_1 der Elation φ den Krümmungskreis S_1 der

7) Einsetzen von (6) in (8) ergibt für die Elationsachse a die Gleichung $y=6a^2x, a=-u_0/2$ bzw. unter Benützung des *historisch gemessenen Winkels* $\delta_0:=\delta(u_0)=2a^2=u_0^2/2$ der Wendetangente w von C gegen die Kurventangente t in P auch $y=3\delta_0 x$. Diese letzte Gleichung der gemeinsamen Sehne a des Krümmungskreises S_1 und des Schmiegkegelschnittes S von C in P wird in [6] mit anderer Methode gefunden und unter Verwendung des Winkels ψ_0 von t gegen a mit $\tan\psi_0=3\delta_0$ zur Konstruktion von a verwendet. (Die Figuren in ([5], S. 115) und [6] verletzen (12).)

Einheitsklothoide C zum Punkt P, so ist der Schmiegkegelschnitt $S=\varphi(S_1)$ von C in P eine Parabel; dies tritt nach Satz 1 genau für $\overset{\frown}{WP}=(5/9)^{1/4}$ ein. Der Berührpunkt U_1 von v_1 mit S_1 liegt nach Abschnitt 1 auf der Affinnormalen von C in P, welche parallel zur Achse von S ist. Den Parabelscheitel konstruieren wir nach Abschnitt 3 (vgl. Fig. 1).

Satz 3. *Berührt die Verschwindungsgerade v_1 der Elation φ den Krümmungskreis S_1 der Klothoide C zum Punkt P in einem Punkt U_1, so ist der Schmiegkegelschnitt S von C in P eine Parabel der Achsenrichtung PU_1; die direkte Scheitelkonstruktion erfolgt nach Abschnitt 3.*



Figur 2

6. Direkte Achsenkonstruktion für Schmiegkegelschnitte mit Mittelpunkt

Die Verschwindungsgerade v_1 von φ berührt jetzt den Krümmungskreis S_1 nicht. Wir zeichnen zunächst die Affinnormale n_A der Einheitsklothoide C im Punkt P, welche nach Abschnitt 1 den Mittelpunkt M des Schmiegkegelschnittes S trägt. Nach (5) und (6) wird n_A durch $y=-12a^2x$ beschrieben, was zusammen mit der Gleichung $y=6a^2x$ von a (vgl. Fussnote 7) die folgende Konstruktion von n_A begründet:

Satz 4. *Eine zur Klothoidentangente t in P parallele Gerade g trifft die Affinnormale n_A bzw. die Kurvennormale n bzw. die Elationsachse a in einem Punkt N_A bzw. N' bzw. A mit $\overline{AN'}:\overline{N'N_A}=2:1$.*

Das Urbild $\varphi^{-1}(M)=:M_1$ des Mittelpunktes M von S wird aus der Affinnormalen n_A vom Lot auf a durch X_1 ausgeschnitten; einerseits ist nämlich n_A ein Kollineationsstrahl von φ, trägt also mit M auch M_1, und andererseits ist M_1 der Pol von v_1 bezüglich des Kreises S_1, liegt also auf der nach Satz 1 zu a senkrechten Geraden durch X_1 und den Mittelpunkt N_1 von S_1. Der Punkt M ergibt sich dann als Lösung der Vervollständigungsaufgabe der Elation φ (Achse a, $X_1 \mapsto X$) aus M_1. Die Winkelsymmetralen von t und a bestimmen nach Abschnitt 3 die Achsen des Schmiegkegelschnittes S.

Satz 5. *Berührt die Verschwindungsgerade v_1 von φ den Krümmungskreis S_1 der Klothoide C zum Punkt P nicht, so hat der Schmiegkegelschnitt S in P einen Mittelpunkt M. Dieser liegt auf der Affinnormalen n_A und ist Bildpunkt unter φ des Schnittpunktes M_1 von n_A mit dem Lot aus X_1 auf a. Die Achsen von S sind parallel zu den Winkelsymmetralen der Klothoidentangente t und der Elationsachse a.*

Die direkte Konstruktion der Scheitel von S führen wir jetzt unter Benützung der Vervollständigungsaufgabe von φ durch (vgl. Fig. 2).

7. Schlussbemerkungen

Der Schmiegkegelschnitt S der Klothoide C im Punkt P ist genau dann eine Hyperbel, wenn die Verschwindungsgerade v_1 von φ den Krümmungskreis S_1 in zwei Punkten $U_1, \bar{U}_1$ trifft. Aus graphischen Gründen leisten die zu den Geraden PU_1 und $P\bar{U}_1$ parallelen Hyperbelasymptoten wertvolle Dienste. Die Tangenten des Kreises S_1 in den Punkten U_1 und $\bar{U}_1$ schneiden einander im Urbild $M_1=\varphi^{-1}(M)$ des Hyperbelmittelpunktes M, was bei hyperbelförmigem Schmiegkegelschnitt S einer Klothoide neben Satz 5 eine weitere direkte Achsenkonstruktion von S liefert. Die Verschwindungsgerade $\tilde{v}_1$ jener Elation $\tilde{\varphi}$ zum Zentrum P, die den Krümmungskreis S_1 in die C in P hyperoskulierende Parabel überführt, berührt S_1 im von P verschiedenen Schnittpunkt mit der Affinnormalen n_A von C in P. Unter

Benützung der zu $\tilde{v}_1$ parallelen Elationsachse durch P kann der Parabelscheitel nach Abschnitt 3 konstruiert werden.

H. P. Paukowitsch, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 Wilhelm Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, II. Springer, Berlin 1923.
2 Wolfgang Blaschke: Die Bremskurve als Trassierungselement. Ausbildung von Bremsstrecken vor engen Strassenbögen. Brücke und Strasse 1/1959, Berlin 1959.
3 G. Bol: Projektive Differentialgeometrie I. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1950.
4 H. Brauner: Geometrie projektiver Räume I. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1976.
5 H. Kasper, W. Schürba und H. Lorenz: Die Klotoide als Trassierungselement, 5. Aufl. Dümmler, Bonn 1968.
6 Z. Nádeník: Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klotoide. Schweizer Z. Vermess. Photogramm. Kulturtech., S. 208–211 (1968).

The number of triangles in a triangulation of a set of points in the plane[1])

1. Introduction

Our terminology and notation will be standard except as indicated. A good reference for undefined graph theoretic terms is [3].
In [1, 2] the authors discussed the question of the number of 3-cycles which could be present in a planar graph on p points. In this paper, we want to consider essentially the same question when the p points are in *fixed positions* in the plane. We will show that this restriction does not limit the possible range of the number of 3-cycles unless the p points are arranged in a unique, easily characterized configuration.

2. Statement of the problem and main results

Begin with a set P of $p \geq 5$ points in the plane, with no three of the points collinear. Suppose we draw straight line segments between pairs of points in P subject only to the restriction that these segments do not intersect except at the points of P themselves, until it is impossible to add more segments in this manner. We call this collection of line segments a *triangulation* of P (since all the finite regions into which these segments divide the plane are triangles). We will generally use T to denote a triangulation of P. Note in particular that the line segments comprising the boundary of the convex hull of P will be included in every triangulation T of P.

1) This work was supported in part by the National Science Foundation under Grant ENG 79-09724.