

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 35 (1980)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Die Schmiegkegelschnitte einer Klothoide  
**Autor:** Paukowitsch, H.P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34686>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

---

El. Math.

Band 35

Heft 6

Seiten 129–160

Basel, 10. November 1980

---

## Die Schmiegkegelschnitte einer Klothoide

Als fahrdynamisch günstiger Übergangsbogen zwischen geradliniger und kreisförmiger Mittenlinie einer Strasse wurde 1937 von L. Oerley der Klothoidenbogen in den Strassenbau eingeführt. Die Koordinaten der Punkte sowohl der Klothoide als auch ihrer Evolute kann man mit hinreichender Genauigkeit Tabellenwerken entnehmen. Trotzdem sind Verfahren von Interesse, welche Klothoidenbögen sowohl beim Entwurf als auch bei der Bauausführung im Gelände approximieren. Als Beispiele führen wir an: Näherungsformeln unter Benützung kubischer Parabeln, näherungsweise Bestimmung einer Klothoide aus gegebenen Punkten oder Tangenten, auf Sehnen bzw. Tangenten bzw. Sekanten basierende Absteckverfahren, Zweiachtelmethode zur Punkteverdichtung (vgl. etwa [5]); weiters sei auf die Zusammensetzung von Klothoidenbögen im Zusammenhang mit Bremskurven [2] hingewiesen. In ([5], S.115) wird eine von Nádeník [6] stammende aufwendige Konstruktion einzelner Punkte des eine Klothoide von maximaler Ordnung berührenden Schmiegkegelschnittes angegeben, der für eine Annäherung höherer Ordnung einer Klothoide wertvolle Dienste leistet. Die vorliegende Mitteilung bringt eine einfache direkte Achsen- und Scheitelkonstruktion des Schmiegkegelschnittes zu einem Klothoidenpunkt  $P$  unter Benützung des Krümmungskreises der Klothoide in  $P$ .

### 1. Schmiegkegelschnitte einer ebenen Kurve

Nach ([1], Bd. II, S.27) gibt es in jedem *Nichtwendepunkt*  $c(u_0)$  einer regulären ebenen  $C^4$ -Kurve  $c(I), u_0 \in I$  genau einen von vierter Ordnung berührenden Schmiegkegelschnitt  $S$ . Dieser wird in dem durch die *Frenet-Basis*<sup>1)</sup>  $(c_1(u_0), c_2(u_0))$  von  $c(I)$  in  $c(u_0)$  bestimmten kartesischen Koordinatensystem  $(c(u_0); x, y)$  durch eine Funktion  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  der Gestalt

$$F(x, y) := ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + y, \quad a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

1) Denken wir die gegebene Kurve durch einen *normierten Weg*  $c: I \rightarrow \mathbf{R}^2$  beschrieben, also  $\|\dot{c}\| = 1$  in  $I$ , so gelten für die Vektoren  $c_1(u_0) := \dot{c}(u_0)$ ,  $c_2(u_0) := \|\ddot{c}(u_0)\|^{-1} \ddot{c}(u_0)$  der Frenet-Basis von  $c(I)$  im Nichtwendepunkt  $c(u_0)$  die Ableitungsgleichungen  $\dot{c}_1(u_0) = \kappa(u_0)c_2(u_0)$ ,  $\dot{c}_2(u_0) = -\kappa(u_0)\dot{c}_1(u_0)$  mit  $\kappa(u_0) = \|\ddot{c}(u_0)\| \neq 0$ .

festgelegt. Nach ([1], Bd. I, S.32) *berühren*<sup>2)</sup> einander die Kurven  $c(I)$  und  $S$  im gemeinsamen Punkt  $c(u_0)=:P$  genau dann von  $k$ -ter *Ordnung* ( $k=1, 2, \dots$ ), wenn die ersten  $k$  Ableitungen der zusammengesetzten Funktion  $F \circ c: I \rightarrow \mathbf{R}$  an der Stelle  $u_0 \in I$  verschwinden. Ist die *Krümmung*  $\kappa(u_0)=:\kappa_0$  von  $c(I)$  im Punkt  $P$  ungleich Null, so berühren einander die beiden Kurven  $c(I)$  und  $S$  in  $P$  genau für

$$a = -\frac{\kappa_0}{2}, \quad \beta = -\frac{\dot{\kappa}_0}{6\kappa_0}, \quad \gamma = -\frac{1}{18\kappa_0^3} (9\kappa_0^4 - 4\dot{\kappa}_0^2 + 3\dot{\kappa}_0\ddot{\kappa}_0) \quad (2)$$

von vierter Ordnung, wie kurze Rechnung unter Benützung der Ableitungs-gleichungen eines normierten Weges  $c$  aus Fussnote 1 zeigt. Genau für zusätzlich

$$36\kappa_0^4\dot{\kappa}_0 - 45\kappa_0\dot{\kappa}_0\ddot{\kappa}_0 + 40\dot{\kappa}_0^3 + 9\kappa_0^2\ddot{\kappa}_0 = 0 \quad (3)$$

liegt Berührung fünfter Ordnung (oder *sechspunklige* Berührung) im dann *sex-taktisch* genannten Punkt  $P$  vor. Weiters gibt es genau eine  $c(I)$  im Nichtwende-punkt  $P$  hyperoskulierende Parabel, die sich für Koeffizienten  $a', \beta'$  und  $\gamma'$  mit

$$a' = a, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \frac{\beta^2}{a} = -\frac{\dot{\kappa}_0^2}{18\kappa_0^3} \quad (4)$$

in (1) einstellt. Die Mittelpunkte aller  $c(I)$  in  $P$  hyperoskulierenden Kegelschnitte liegen auf der *Affinnormale* genannten Geraden

$$x = \lambda y, \quad \lambda = -\frac{\beta}{a} = -\frac{\dot{\kappa}_0}{3\kappa_0^2} \quad (5)$$

durch  $P$ , welche parallel zur Achse der hyperoskulierenden Parabel ist.

## 2. Schmiegkegelschnitte einer Klohoide

Für eine durch die *natürliche Gleichung*  $\kappa: u \in \mathbf{R} \mapsto \kappa(u) := u$  festgelegte *Einheits-klohoide*<sup>3)</sup>  $c(\mathbf{R}) =: C$  bestimmen sich die Koeffizienten in der Gleichung (1) des Schmiegkegelschnittes der Kurve im Punkt  $c(u_0) =: P (u_0 \neq 0)$  nach (2) zu

$$a = -\frac{u_0}{2}, \quad \beta = \frac{1}{12a} = -\frac{1}{6u_0}, \quad \gamma = a - \frac{1}{36a^3} = -\frac{1}{18u_0^3} (9u_0^4 - 4). \quad (6)$$

Dabei ist  $|u_0|$  die *Bogenlänge*  $\widehat{WP}$  vom Wendepunkt  $c(0) =: W$  der Einheits-

2) Statt Berührung erster bzw. zweiter bzw. dritter Ordnung sprechen wir auch von *Berührung* bzw. *Oskulation* bzw. *Hyperoskulation*.

3) Misst man die Ebene mit einem Längenmaßstab zur Einheitsstrecke  $e' = ke$  statt  $e$  aus,  $k \in \mathbf{R}^+$ , so verändert sich die Krümmung einer ebenen Kurve von  $\kappa(u)$  zu  $\kappa'(u) = k^{-2}\kappa(u)$ . Nach geeigneter Wahl des Maßstabes lässt sich daher eine *Klohoide* mit der natürlichen Gleichung  $\kappa: u \mapsto k^{-2}u$  als Einheits-klohoide auffassen.

klothoide  $C$  zum Kurvenpunkt  $P$ . Wegen der *zentrischen Symmetrie* von  $C$  bezüglich  $W$  (vgl. [5], S.38) setzen wir im folgenden  $u_0 > 0$  voraus. Genau für  $\beta^2 - a\gamma = 0$ , also für  $u_1 = (5/9)^{1/4}$  ist der Schmiegkegelschnitt zum Punkt  $c(u_1) =: Q$  von  $C$  eine Parabel<sup>4)</sup>, für  $P$  zwischen  $W$  und  $Q$  eine Hyperbel und ausserhalb dieses Bogens eine Ellipse. Diese Ellipsen werden mit wachsender Bogenlänge  $u_0$  immer kreisförmiger, wie Diskussion von (1) zusammen mit (6) lehrt. Die Klothoide  $C$  ist wegen (3) frei von sextaktischen Punkten. Nach ([3], S.52) ist daher der Durchschnitt je zwei ihrer Schmiegkegelschnitte leer, falls die Berührpunkte dem Kurvenbogen  $c(\mathbf{R}^+)$  oder  $c(\mathbf{R}^-)$  angehören. Insbesondere liegen die nicht hyperbelförmigen Schmiegkegelschnitte ganz in der den betreffenden Klothoidenbogen enthaltenden Halbebene bezüglich der Wendetangente, welche Grenzlage der Schmiegkegelschnitte für  $u_0 \rightarrow 0$  ist.

### 3. Krümmungskreis in einem Kegelschnittpunkt

Unser Ziel ist eine direkte Achsen- und Scheitelkonstruktion des Schmiegkegelschnittes  $S$  zu einem Klothoidenpunkt  $P$  unter Benützung des Krümmungskreises  $S_1$  der Klothoide in  $P$ , der natürlich auch den Krümmungskreis von  $S$  in  $P$  abgibt. Wir diskutieren deshalb zunächst den Zusammenhang zwischen einem Kegelschnitt und dem Krümmungskreis in einem seiner Punkte.

Ein Kegelschnitt  $L$  der Gestalt (1) besitzt im Koordinatenursprung  $P = (0,0)$  den *oskulierenden Krümmungskreis*  $L_1$

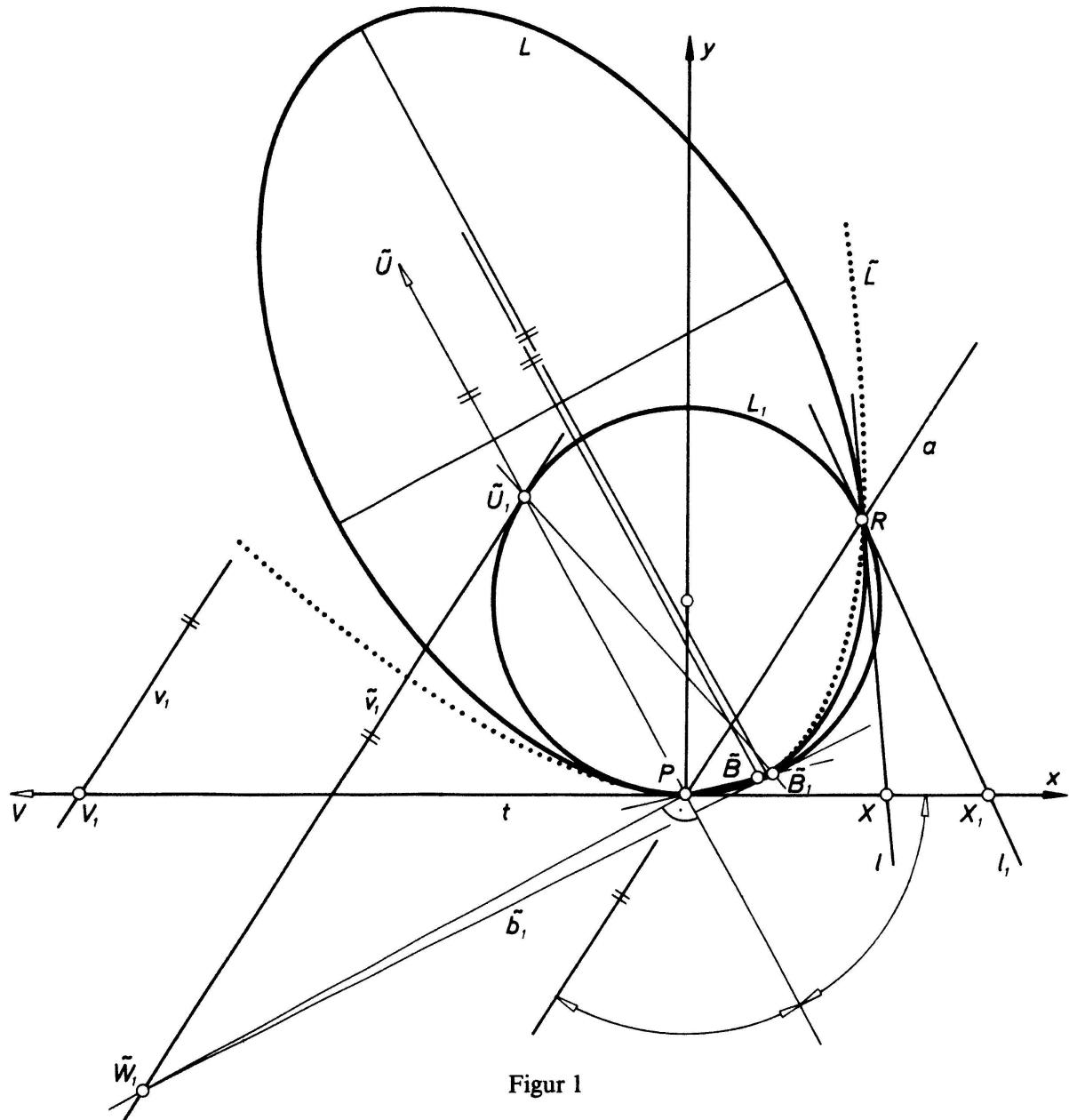
$$x^2 + y^2 + \frac{\gamma}{a} = 0. \quad (7)$$

Bekanntlich gibt es genau eine  $(P,a)$ -Elation  $\varphi$  mit dem *Oskulationspunkt*  $P$  als Zentrum und einer Achse  $a$  durch  $P$ , die  $\varphi(L_1) = L$  leistet; die durch die in  $P$  oskulierenden Kegelschnitte  $L_1$  und  $L$  eindeutig bestimmte Achse  $a$  dieser perspektiven Kollinearität  $\varphi$  fällt genau dann in die gemeinsame Tangente  $t(y=0)$  von  $L_1$  und  $L$  in  $P$ , wenn  $L_1$  und  $L$  in  $P$  hyperoskulieren, also  $P$  ein Scheitel von  $L$  ist (vgl. etwa [4], S.65). In (1) ist  $P = (0,0)$  genau für  $\beta = 0$  ein Scheitel; für  $\beta \neq 0$  wird die Elationsachse  $a$  durch

$$x = \mu y, \quad \mu = \frac{a - \gamma}{2\beta} \quad (8)$$

beschrieben, wie Elimination von  $x$  und  $y$  aus (1), (7) und dem Ansatz  $x = \mu y$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$  für  $a$  erkennen lässt. Da ein Klothoidenpunkt nie Scheitel des betreffenden

4) Für die Koordinaten  $(x_Q, y_Q)$  des schon in [6] erwähnten Punktes  $Q$  der Einheitsklothoide mit parabelförmigem Schmiegkegelschnitt im auf den Wendepunkt als Ursprung und auf die Wendetangente als  $x$ -Achse gestützten kartesischen Koordinatensystem ergibt die Auswertung der Integrale in ([5], S.40):  $x_Q = 0,851426289 \dots$ ,  $y_Q = 0,106189997 \dots$  Die Tangente in  $Q$  schliesst mit der Wendetangente den Winkel  $\delta_Q = 21^\circ 21' 10,35 \dots$  ein. Die Bogenlänge  $\widehat{WQ}$  errechnet sich zu  $\widehat{WQ} = (5/9)^{1/4} = 0,863340021 \dots$  und der Krümmungsradius in  $Q$  zu  $(\widehat{WQ})^{-1} = 1,158292185 \dots$



Figur 1

Schmiegkegelschnittes ist (vgl. (6)), genügt es, den Punkt  $P$  als Nichtscheitel von  $L$  vorauszusetzen. Insbesondere schneiden einander dann  $L_1$  und  $L$  in zwei Punkten  $P$  und  $R$  auf der von  $t$  verschiedenen Elationsachse  $a$  (vgl. Fig. 1). Diskussion des durch (1) festgelegten Kegelschnittes  $L$  im Falle einer Ellipse bzw. Hyperbel ( $\beta^2 - a\gamma < 0$  bzw.  $> 0$ ) liefert zusammen mit (8) das bekannte Ergebnis, dass die Winkelsymmetralen der Elationsachse  $a$  und der gemeinsamen Tangente  $t$  von  $L_1$  und  $L$  im Oskulationspunkt  $P$  die Achsenrichtungen von  $L$  sind. Im Falle einer Parabel  $L$  entsteht  $a$  durch Spiegelung von  $t$  an dem *Parabeldurchmesser* durch  $P$  (vgl. Fig. 1).

Die  $L_1$  in  $L$  abbildende Elation  $\varphi$  zum Zentrum  $P$  lässt sich konstruktiv verfolgen, wenn neben der Achse  $a$  ( $\neq t$ ) der Bildpunkt  $\varphi(X_1) =: X$  eines Punktes  $X_1$  ( $\notin a$ ) bekannt ist. Ein solches Punktpaar bestimmen die Schnittpunkte des Kollineationsstrahles  $t$  mit den Tangenten  $l_1$  bzw.  $l$  von  $L_1$  bzw.  $L$  im von  $P$  verschiedenen, gemeinsamen Punkt  $R \in a$  der beiden Kegelschnitte. Bei der folgenden Anwendung

auf die Klohoide besteht dieses zweckmässige Punktpaar stets aus *eigentlichen* Punkten, so dass wir in

$$X_1 = \left( -\frac{1}{2\mu a}, 0 \right), \quad \varphi(X_1) = X = \left( -\frac{1}{2(\mu a + \beta)}, 0 \right), \quad \mu = \frac{a - \gamma}{2\beta} \quad (9)$$

parallele Lage von  $l_1$  bzw.  $l$  zur *Oskulationstangente*  $t$  nicht berücksichtigen müssen; damit sind alle in (9) auftretenden Nenner ungleich Null. Für die konstruktive Durchführung der Elation  $\varphi$  ist die *Verschwindungsgerade*  $v_1$  von Interesse: Diese zur Elationsachse  $a$  parallele Gerade trifft die Oskulationstangente  $t$  im Punkt<sup>5)</sup>  $V_1$  mit

$$V_1 = \left( \frac{1}{2\beta}, 0 \right), \quad (10)$$

der unter  $\varphi$  in den Fernpunkt  $V$  von  $t$  abgebildet wird.

Ist  $(P, t)$  ein *Linienelement* eines Kreises  $L_1$  und  $a$  eine von  $t$  verschiedene Gerade durch  $P$ , so gibt es zwei  $(P, a)$ -Elationen, die  $L_1$  jeweils in eine im Punkt  $P$  oskulierende Parabel überführen; die zu  $a$  parallelen Kreistangenten geben die Verschwindungsgeraden jener Elationen ab. Der Figur 1 kann man eine direkte Scheitelkonstruktion des (punktiert eingezeichneten) parabelförmigen Bildes  $\tilde{\varphi}(L_1) = \tilde{L}$  von  $L_1$  bei einer Elation  $\tilde{\varphi}$  dieser Art (die Verschwindungsgerade  $\tilde{v}_1$  berührt  $L_1$  im Punkt  $\tilde{U}_1$ ) entnehmen: Das Lot aus  $P$  auf den Parabeldurchmesser  $P\tilde{U}_1$  trifft  $\tilde{v}_1$  im Punkt  $\tilde{W}_1$ ; die von  $\tilde{v}_1$  verschiedene Kreistangente  $\tilde{b}_1$  durch  $\tilde{W}_1$  berührt  $L_1$  im Urbild  $\tilde{B}_1$  des Parabscheitels  $\tilde{B}$ , der sich dann als Lösung der *Vervollständigungsaufgabe* der Elation  $\tilde{\varphi}$  (Achse  $a$ , Verschwindungsgerade  $\tilde{v}_1$ ) ergibt.

#### 4. Konstruktive Festlegung einer Elation, die den Krümmungskreis zu einem Klohoidenpunkt in den Schmiegekegelschnitt überführt

Es sei  $(c(u_0), t)$  ein Linienelement der Einheitsklohoide<sup>6)</sup>  $c(\mathbf{R}) = C$  und  $S_1$  der Krümmungskreis von  $C$  in  $c(u_0) = P$  vom Radius  $\rho_0 = (\chi(u_0))^{-1} = u_0^{-1}$ . Wir benutzen wie bisher  $P$  bzw.  $t$  als Ursprung bzw.  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Durch Einsetzen von (6) in (9) erhalten wir

$$X_1 = (-3a, 0) = \left( -\frac{3u_0}{2}, 0 \right), \quad \varphi(X_1) = X = (-2a, 0) = (u_0, 0), \quad u_0 = \widehat{WP}, \quad (11)$$

5) Die  $(P, a)$ -Elation  $\varphi$  induziert auf  $t$  eine *parabolische Projektivität*  $\pi$  mit  $Z_1 = (z_1, 0) \mapsto Z = (z, 0)$  und  $z = z_1(-2\beta z_1 + 1)^{-1}$ , wie ein unbestimmter Ansatz  $z = (\delta_1 z_1 + \delta_2)(\delta_3 z_1 + \delta_4)^{-1}, \delta_i \in \mathbf{R}, \delta_1 \delta_4 - \delta_2 \delta_3 \neq 0$  für  $\pi$  mit  $\pi(P) = P = (0, 0)$  und  $\pi(X_1) = X$  gemäss (9) lehrt. Genau für  $z_1 = (2\beta)^{-1}$  ist daher  $\pi(Z_1) = \pi(V_1)$  der Fernpunkt  $V$  von  $t$ .

6) In Abhängigkeit von der Bogenlänge  $u_0 = \widehat{WP}$  vom Wendepunkt  $W$  zum Kurvenpunkt  $P$  der Einheitsklohoide  $C$  können wir die Koordinaten von  $P$  und den Anstieg der Tangente in  $P$  im auf Wendepunkt und Wendetangente gestützten kartesischen Koordinatensystem etwa [5] entnehmen.

was die in ([5], S. 115) und [6] nicht berücksichtigte Beziehung

$$\overline{PX} : \overline{PX}_1 = 2 : 3 \quad (12)$$

erkennen lässt. Abtragen der Strecke  $3u_0/2$  bzw.  $u_0 = \widehat{WP}$  auf der Tangente  $t$  ausgehend von  $P$  in Richtung wachsender Bogenlänge  $u$  auf der Klothoide  $C$  ergibt den Punkt  $X_1$  bzw.  $X$  auf  $t$ ; ein Kreisbogen um  $X_1$  durch  $P$  trifft den Kreis  $S_1$  im von  $P$  verschiedenen Schnittpunkt  $R$  mit der Elationsachse  $a$ , da die Kreistangente  $s_1$  in  $R$  dann durch  $X_1$  verläuft (vgl. Abschnitt 3). Die Elation  $\varphi$  zum Zentrum  $P$ , welche den Krümmungskreis  $S_1$  der Klothoide  $C$  auf den Schmiekegelschnitt  $S$  abbildet, kann daher unter Benützung der Achse<sup>7)</sup>  $a = PR$  und  $X_1 \mapsto X$  konstruktiv bequem verfolgt werden. Wir formulieren den einige Ergebnisse zusammenfassenden

**Satz 1.** Der Schmiekegelschnitt  $S$  in einem vom Wendepunkt  $W$  verschiedenen Punkt  $P$  der Einheitsklothoide  $C$  ist genau für  $0 < \widehat{WP} < (5/9)^{1/4}$  eine Hyperbel, für  $\widehat{WP} = (5/9)^{1/4}$  eine Parabel und sonst eine Ellipse. Der Punkt  $X_1$  bzw.  $X$  der im Sinne wachsender Bogenlänge  $\widehat{WP}$  positiven Halbgeraden bezüglich  $P$  auf der Klothoidentangente  $t$  in  $P$  mit  $\overline{PX}_1 = 3/2 \widehat{WP}$  bzw.  $\overline{PX} = \widehat{WP}$  ist Ursprung bzw. Bildpunkt in jener Elation  $\varphi$  zum Zentrum  $P$ , die den Krümmungskreis  $S_1$  von  $C$  in  $P$  in den Schmiekegelschnitt  $S$  überführt. Die Elationsachse  $a$  von  $\varphi$  fällt in die Polare von  $X_1$  bezüglich  $S_1$ .

Mit Satz 1 ist die konstruktive Festlegung des Schmiekegelschnittes  $S$  zu einem Klothoidenpunkt prinzipiell erledigt. Die restlichen Diskussionspunkte geben unter Benützung von Eigenschaften der Elation  $\varphi$  zweckmässige Konstruktionsschritte zur direkten Ermittlung der Achsen und Scheitel von  $S$  an. So schneidet die Verschwindungsgerade  $v_1$  von  $\varphi$  die Klothoidentangente  $t$  in  $P$  nach (10) und (6) im Punkt  $V_1 = (6a, 0) = (-3u_0, 0)$ , was  $\overline{PV}_1 = 3\widehat{WP}$ , also

$$\overline{PX}_1 : \overline{PV}_1 = 1 : -2, \quad (13)$$

erkennen lässt.

**Satz 2.** Die zur Achse  $a$  der Elation  $\varphi$  aus Satz 1 parallele Verschwindungsgerade  $v_1$  trifft die Klothoidentangente  $t$  in  $P$  im Punkt  $V_1$ , der (13) erfüllt.

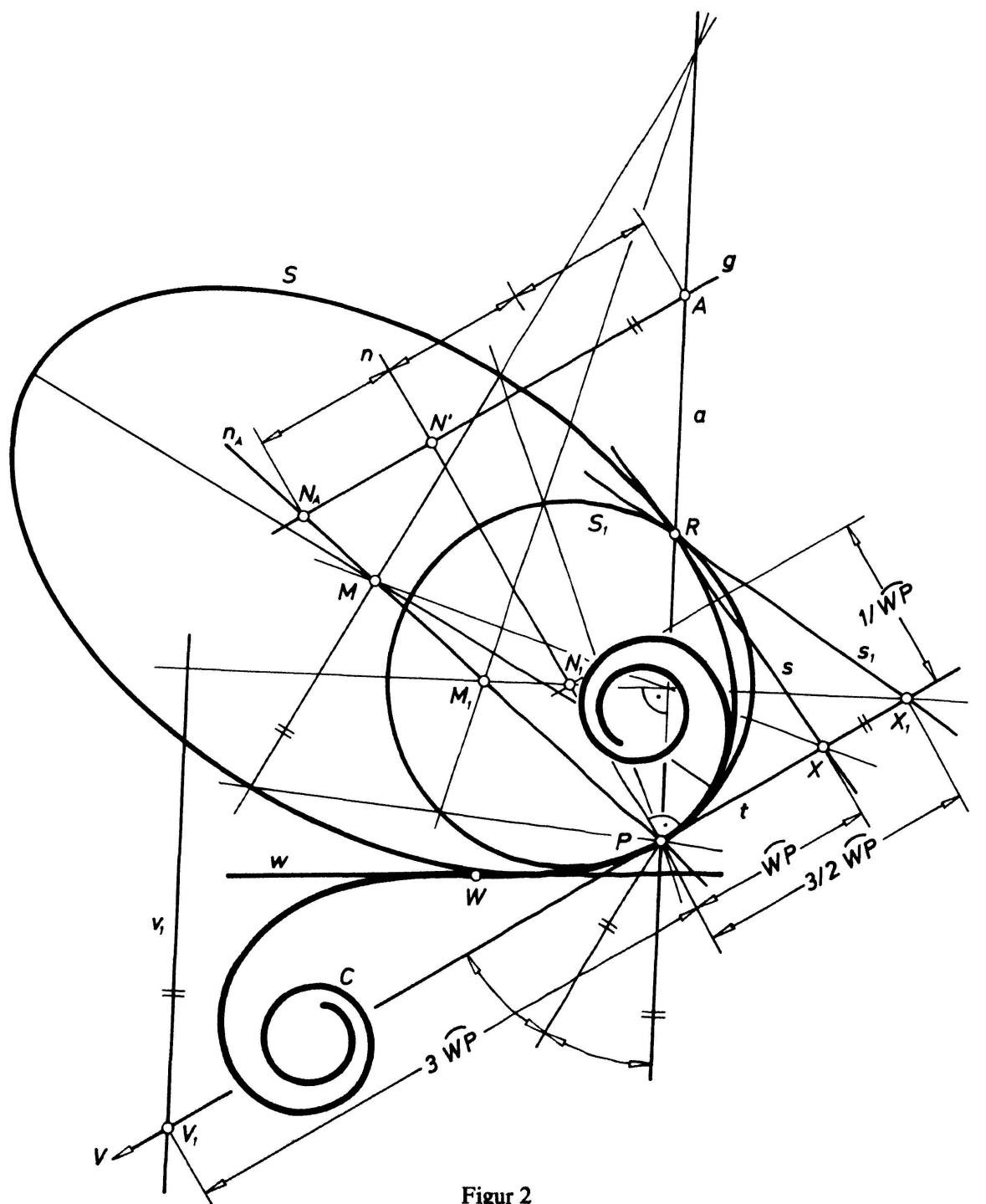
## 5. Parabelförmiger Schmiekegelschnitt

Berührt die Verschwindungsgerade  $v_1$  der Elation  $\varphi$  den Krümmungskreis  $S_1$  der

7) Einsetzen von (6) in (8) ergibt für die Elationsachse  $a$  die Gleichung  $y = 6a^2x, a = -u_0/2$  bzw. unter Benützung des historisch gemessenen Winkels  $\delta_0 := \delta(u_0) = 2a^2 = u_0^2/2$  der Wendetangente  $w$  von  $C$  gegen die Kurventangente  $t$  in  $P$  auch  $y = 3\delta_0 x$ . Diese letzte Gleichung der gemeinsamen Sehne  $a$  des Krümmungskreises  $S_1$  und des Schmiekegelschnittes  $S$  von  $C$  in  $P$  wird in [6] mit anderer Methode gefunden und unter Verwendung des Winkels  $\psi_0$  von  $t$  gegen  $a$  mit  $\tan \psi_0 = 3\delta_0$  zur Konstruktion von  $a$  verwendet. (Die Figuren in ([5], S. 115) und [6] verletzen (12).)

Einheitsklohoide  $C$  zum Punkt  $P$ , so ist der Schmiekegelschnitt  $S = \varphi(S_1)$  von  $C$  in  $P$  eine Parabel; dies tritt nach Satz 1 genau für  $\widehat{WP} = (5/9)^{1/4}$  ein. Der Berührpunkt  $U_1$  von  $v_1$  mit  $S_1$  liegt nach Abschnitt 1 auf der Affinnormalen von  $C$  in  $P$ , welche parallel zur Achse von  $S$  ist. Den Parabelseititel konstruieren wir nach Abschnitt 3 (vgl. Fig. 1).

**Satz 3.** Berührt die Verschwindungsgerade  $v_1$  der Elation  $\varphi$  den Krümmungskreis  $S_1$  der Klohoide  $C$  zum Punkt  $P$  in einem Punkt  $U_1$ , so ist der Schmiekegelschnitt  $S$  von  $C$  in  $P$  eine Parabel der Achsenrichtung  $PU_1$ ; die direkte Scheitelkonstruktion erfolgt nach Abschnitt 3.



## 6. Direkte Achsenkonstruktion für Schmiegekegelschnitte mit Mittelpunkt

Die Verschwindungsgerade  $v_1$  von  $\varphi$  berührt jetzt den Krümmungskreis  $S_1$  nicht. Wir zeichnen zunächst die Affinnormale  $n_A$  der Einheitsklohoide  $C$  im Punkt  $P$ , welche nach Abschnitt 1 den Mittelpunkt  $M$  des Schmiegekegelschnittes  $S$  trägt. Nach (5) und (6) wird  $n_A$  durch  $y = -12a^2x$  beschrieben, was zusammen mit der Gleichung  $y = 6a^2x$  von  $a$  (vgl. Fussnote 7) die folgende Konstruktion von  $n_A$  begründet:

**Satz 4.** Eine zur Klohoidentangente  $t$  in  $P$  parallele Gerade  $g$  trifft die Affinnormale  $n_A$  bzw. die Kurvennormale  $n$  bzw. die Elationsachse  $a$  in einem Punkt  $N_A$  bzw.  $N'$  bzw.  $A$  mit  $\overline{AN} : \overline{N'N_A} = 2 : 1$ .

Das Urbild  $\varphi^{-1}(M) =: M_1$  des Mittelpunktes  $M$  von  $S$  wird aus der Affinnormalen  $n_A$  vom Lot auf  $a$  durch  $X_1$  ausgeschnitten; einerseits ist nämlich  $n_A$  ein Kollinearitätsstrahl von  $\varphi$ , trägt also mit  $M$  auch  $M_1$ , und andererseits ist  $M_1$  der Pol von  $v_1$  bezüglich des Kreises  $S_1$ , liegt also auf der nach Satz 1 zu  $a$  senkrechten Geraden durch  $X_1$  und den Mittelpunkt  $N_1$  von  $S_1$ . Der Punkt  $M$  ergibt sich dann als Lösung der Vervollständigungsaufgabe der Elation  $\varphi$  (Achse  $a$ ,  $X_1 \mapsto X$ ) aus  $M_1$ . Die Winkelsymmetralen von  $t$  und  $a$  bestimmen nach Abschnitt 3 die Achsen des Schmiegekegelschnittes  $S$ .

**Satz 5.** Berührt die Verschwindungsgerade  $v_1$  von  $\varphi$  den Krümmungskreis  $S_1$  der Klohoide  $C$  zum Punkt  $P$  nicht, so hat der Schmiegekegelschnitt  $S$  in  $P$  einen Mittelpunkt  $M$ . Dieser liegt auf der Affinnormalen  $n_A$  und ist Bildpunkt unter  $\varphi$  des Schnittpunktes  $M_1$  von  $n_A$  mit dem Lot aus  $X_1$  auf  $a$ . Die Achsen von  $S$  sind parallel zu den Winkelsymmetralen der Klohoidentangente  $t$  und der Elationsachse  $a$ .

Die direkte Konstruktion der Scheitel von  $S$  führen wir jetzt unter Benützung der Vervollständigungsaufgabe von  $\varphi$  durch (vgl. Fig. 2).

## 7. Schlussbemerkungen

Der Schmiegekegelschnitt  $S$  der Klohoide  $C$  im Punkt  $P$  ist genau dann eine Hyperbel, wenn die Verschwindungsgerade  $v_1$  von  $\varphi$  den Krümmungskreis  $S_1$  in zwei Punkten  $U_1, \bar{U}_1$  trifft. Aus graphischen Gründen leisten die zu den Geraden  $PU_1$  und  $P\bar{U}_1$  parallelen Hyperbelasymptoten wertvolle Dienste. Die Tangenten des Kreises  $S_1$  in den Punkten  $U_1$  und  $\bar{U}_1$  schneiden einander im Urbild  $M_1 = \varphi^{-1}(M)$  des Hyperbelmittelpunktes  $M$ , was bei hyperbelförmigem Schmiegekegelschnitt  $S$  einer Klohoide neben Satz 5 eine weitere direkte Achsenkonstruktion von  $S$  liefert. Die Verschwindungsgerade  $\tilde{v}_1$  jener Elation  $\tilde{\varphi}$  zum Zentrum  $P$ , die den Krümmungskreis  $S_1$  in die  $C$  in  $P$  hyperoskulierende Parabel überführt, berührt  $S_1$  im von  $P$  verschiedenen Schnittpunkt mit der Affinnormalen  $n_A$  von  $C$  in  $P$ . Unter

Benützung der zu  $\tilde{v}_1$  parallelen Elationsachse durch  $P$  kann der Parabelscheitel nach Abschnitt 3 konstruiert werden.

H. P. Paukowitsch, TU Wien

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Wilhelm Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, II. Springer, Berlin 1923.
- 2 Wolfgang Blaschke: Die Bremskurve als Trassierungselement. Ausbildung von Bremsstrecken vor engen Straßenbögen. Brücke und Strasse 1/1959, Berlin 1959.
- 3 G. Bol: Projektive Differentialgeometrie I. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1950.
- 4 H. Brauner: Geometrie projektiver Räume I. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1976.
- 5 H. Kasper, W. Schürba und H. Lorenz: Die Klotoide als Trassierungselement, 5. Aufl. Dümmler, Bonn 1968.
- 6 Z. Nádeník: Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klotoide. Schweizer Z. Vermess. Photogramm. Kulturtech., S. 208–211 (1968).

# The number of triangles in a triangulation of a set of points in the plane<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

Our terminology and notation will be standard except as indicated. A good reference for undefined graph theoretic terms is [3].

In [1, 2] the authors discussed the question of the number of 3-cycles which could be present in a planar graph on  $p$  points. In this paper, we want to consider essentially the same question when the  $p$  points are in *fixed positions* in the plane. We will show that this restriction does not limit the possible range of the number of 3-cycles unless the  $p$  points are arranged in a unique, easily characterized configuration.

## 2. Statement of the problem and main results

Begin with a set  $P$  of  $p \geq 5$  points in the plane, with no three of the points collinear. Suppose we draw straight line segments between pairs of points in  $P$  subject only to the restriction that these segments do not intersect except at the points of  $P$  themselves, until it is impossible to add more segments in this manner. We call this collection of line segments a *triangulation* of  $P$  (since all the finite regions into which these segments divide the plane are triangles). We will generally use  $T$  to denote a triangulation of  $P$ . Note in particular that the line segments comprising the boundary of the convex hull of  $P$  will be included in every triangulation  $T$  of  $P$ .

1) This work was supported in part by the National Science Foundation under Grant ENG 79-09724.