

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 35 (1980)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 828.** Man berechne die folgenden Summen in geschlossener Form:

$$S_k := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \prod_{v=1}^k \cot^2 \frac{j_v \pi}{2n+1}; \quad k = 1, \dots, n.$$

M. Bencze, Clui-Napoca, Rumänien

Solution: The number  $S_k$  is equal to the coefficient of  $x^{n-k}$  in a monic polynomial in  $x$  of degree  $n$  with zeros  $-\cot^2(k\pi/(2n+1))$ ,  $k = 1, \dots, n$ . We put

$$g(x) := \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^{n-k}.$$

Then  $g(x)$  is a polynomial of degree  $n$  with leading coefficient  $2n+1$  related to the Chebyshev polynomial of the second kind  $U_{2n}(x)$ ;  $g(x)$  has the desired zeros. In fact,  $g(-\cot^2\phi) = ((i \cot\phi + 1)^{2n+1} - (i \cot\phi - 1)^{2n+1})/2 = (-1)^n \sin((2n+1)\phi)/(\sin^{2n+1}\phi)$ , which is zero for  $\phi = k\pi/(2n+1)$ ,  $k = 1, \dots, n$  ( $0 < \phi < \pi/2$ ). Thus

$$g(x) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left( x + \cot^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) \right),$$

and hence

$$S_k = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1} = \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-2k)!},$$

a Catalan number.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Bemerkung von P. Bundschuh, Köln, BRD: Ersetzt man in der Aufgabenstellung  $\cot$  durch  $\tan$  und bezeichnet die so entstehenden Summen mit  $T_k$ , so erhält man

$$T_k = \binom{2n+1}{2k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), B. Hoffrichter (Hannover, BRD), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), L. Kuipers (Mollens VS), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 829.** Unter denselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 808 [El. Math. 33, 100 (1978)] zeige man, dass sich die drei Potenzlinien je zweier nicht benachbarter Kreise in einem Punkt  $P$  schneiden. Ferner beweise man, dass im gleichen Viereck dieser Punkt  $P$  mit dem Schnittpunkt der vier konkurrenten Geraden jener Aufgabe zusammenfällt.

Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung: Im Sehnenviereck  $A_1A_2A_3A_4$  betrachten wir die beiden nicht benachbarten Kreise  $k_1$  und  $k_2$  über den Seiten  $A_1A_2$  und  $A_3A_4$ .  $M_1$  sei die Mitte der Seite  $A_1A_2$  und  $M_2$  die Mitte der Seite  $A_3A_4$ . Ferner sei  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $A_1A_2$  und  $A_3A_4$ . Behauptung: Das Lot  $l_2$  von  $M_2$  auf die Seite  $A_1A_2$  geht durch  $P$ .

Zum Beweis bezeichnen wir mit  $H$  den Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $A_1A_3A_4$ . Gemäss Lösung von Aufgabe 808 ist  $P$  der Mittelpunkt der Strecke  $HA_2$ . Bezeichnet  $\bar{M}_2$  die Mitte der Strecke  $HA_1$ , so ist  $M_2\bar{M}_2$  ein Durchmesser im Feuerbach-Kreis des Dreiecks  $A_1A_3A_4$ .  $\bar{M}_2P$  steht somit senkrecht auf  $M_2P$ . Da aber  $\bar{M}_2P$  parallel zur Seite  $A_1A_2$  ist, fällt  $M_2P$  mit  $l_2$  zusammen.

Analog zeigt man, dass das Lot  $l_1$  von  $M_1$  auf die Seite  $A_3A_4$  durch  $P$  geht.  $P$  ist also der Höhenschnittpunkt im Dreieck  $M_1M_2S$ . Die Potenzlinie von  $k_1$  und  $k_2$  fällt aber gerade mit der dritten Höhe in diesem Dreieck zusammen und geht somit durch  $P$ . Analog zeigt man, dass auch die andern beiden Potenzlinien durch  $P$  gehen.

A. Frei, Heerbrugg

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS) und O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

**Aufgabe 830.** Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ) positive reelle Zahlen mit  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Dann gilt

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{1-x_i} \frac{x_j}{1-x_j} \geq \frac{1}{(n-1)^2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/n$ .

Dies ist zu beweisen.

S. Gabler, Mannheim, BRD

Solution: Consider  $n-2$  nonnegative real numbers  $x_1, \dots, x_{n-2}$  such that

$$\sum_{i=1}^{n-2} x_i = 1 - s < 1.$$

Clearly

$$a := \sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_i}{1-x_i} \geq \sum_{i=1}^{n-2} x_i = 1 - s. \quad (1)$$

Now suppose  $x_{n-1} = x$ ,  $x_n = y$ ,  $x + y = s$ . Keeping  $x_1, \dots, x_{n-2}$  fixed we calculate the minimum of

$$\Sigma = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{1-x_i} \frac{x_j}{1-x_j}. \quad (2)$$

We have

$$\Sigma = \frac{x \cdot y}{(1-x)(1-y)} + a \left( \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} \right) + \Sigma', \quad (3)$$

where  $\Sigma'$  is obtained from (2) by replacing  $n$  by  $n-2$ .

Clearly the problem is to determine the minimal value of

$$\frac{(1-2a)xy + as}{1-s+xy} = 1 - 2a + \frac{a(2-s) - (1-s)}{1-s+xy}. \quad (4)$$

By (1) we have

$$a(2-s) - (1-s) \geq (1-s)^2 > 0$$

and hence (4) is minimal iff  $xy$  is maximal, i.e. iff  $x=y$ .

It follows that the expression  $\Sigma$ , where now all  $x_i$  can vary from 0 to 1 under the condition  $\sum x_i = 1$ , is minimal iff all  $x_i$  are equal.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) (2 Lösungen), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL) (zweite Lösung), H. Wellstein (Flensburg, BRD) (2 Lösungen), M. Vowe (Therwil) (Teillösung).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. April 1981* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68), Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44).

**Aufgabe 847.** Die beiden Zahlenfolgen  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  mit

$$a_n = \sum_{j=0}^{\left[ \frac{n}{k+1} \right]} \binom{n-kj}{j} s^j$$

und

$$b_n = \sum_{j=0}^n \binom{n+kj}{j+kj} s^j$$

( $n=0, 1, 2, \dots$ ;  $k$  eine feste natürliche,  $s$  eine feste reelle Zahl) sind durch einfache Rekursionsformeln zu charakterisieren.

(Für  $s=1$  sind  $a_n, b_n$  Transversalsummen, für  $s=-1$  alternierende Transversalsummen im Pascal-Dreieck.)

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 848.** Es seien  $a, b$  ganze,  $h, m, n$  natürliche Zahlen mit  $m, n \geq 2$ . Ferner sei

$$S = S(a, b; h; m, n) := \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} \exp \frac{2\pi i h (ra + sb)}{mn}.$$

Man zeige, dass dann und nur dann  $S=0$  gilt, wenn eine der folgenden Bedingungen 1. und 2. erfüllt ist:

1.  $(a, m) = 1$  und  $b = cm$  mit  $(c, n) = 1$ ,
2.  $(b, n) = 1$  und  $a = dn$  mit  $(d, m) = 1$ .

L. Kuipers, Mollens VS

**Aufgabe 849.** Für natürliche  $n$  beweise man

$$\exp \frac{n(n-1)}{2} \leq 1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n \leq \exp \frac{n(n-1)(2n+5)}{12}.$$

M. Bencze, Brasov, Rumänien

## Literaturüberschau

G. Hämmerlin: Numerische Mathematik I. Hochschultaschenbücher, Band 498, 191 Seiten, DM 12.80. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1978.

Das Büchlein führt in vier Kapiteln in die folgenden Teilgebiete der numerischen Mathematik ein: Approximation, Interpolation, numerische Quadratur und Differentiation, Gleichungssysteme. Der Autor erarbeitet die grundsätzlichen Aspekte, ohne in die Breite zu gehen. Klar tritt der Zusammenhang der einzelnen Kapitel hervor. Wo immer es angebracht scheint, wird einer funktionalanalytischen Darstellung der Vorzug gegeben. Die üblichen Kenntnisse aus den Grundvorlesungen über lineare Algebra und Analysis werden vorausgesetzt.

F. Spirig

J. Cigler und H.-C. Reichel: Topologie. Eine Grundvorlesung. Hochschultaschenbücher, Band 121, XIII und 244 Seiten, DM 16.80. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1978.

Die Autoren verfolgen ein doppeltes Ziel: einerseits die wichtigsten topologischen Begriffe und Methoden, wie sie für den modernen Ausbau der verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik (insbesondere der Analysis) erforderlich sind, in gebotener Vertiefung bereitzustellen; andererseits in die Grundprobleme und die Denkweise der Topologie als eines eigenständigen und wichtigen Teilgebiets der Mathematik einzuführen. Beides ist ihnen in ausgezeichneter und anregender Weise gelungen. Das Buch kann besonders empfohlen werden, weil die Topologie als Gebiet mit Fleisch und Blut und mit vielfältigsten Beziehungen präsentiert wird.

H. E. Debrunner