Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 35 (1980)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Zum Schluss noch ein Hinweis auf den Spezialfall konstanter b_k (d.h. $r=1$): $1/s=[\bar{b}]=[b,b,\ldots]$. Einsetzen im Kb. führt auf $1/s=b+1/(1/s)$ und damit schliesslich auf die beiden Möglichkeiten (da $(u,v)=1$ vorausgesetzt):

$$u=1, \quad v \text{ beliebig}, \quad b=2v,$$

$$u=2, \quad v \text{ ungerade}, \quad b=v.$$

In diesem Falle gilt:

$$y_k/(x_k+(-1)^k)=u/v.$$

(Folgt aus Gl. 2.2.1; vgl. auch Einführungsbeispiel in Abschnitt 1.)
Beispiele:

$$u=2, \quad v=1: \quad b=1, \quad 1/s=(1+\sqrt{5})/2.$$

(Die A_k, B_k bilden, um eine Position gegeneinander verschoben, je die Folge der Fibonaccizahlen.)

$$u=v=1: \quad b=2, \quad 1/s=1+\sqrt{2}.$$

(Beispiel aus Abschnitt 1.)

Peter Läuchli, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 Gelfond, A.O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.
2 Kirch, A.M.: Elementary Number Theory, A Computer Approach. Intext Educational Publishers, New York 1974.
3 Läuchli, P.: Ein Problem der ganzzahligen Approximation. Berichte des Instituts für Informatik, Nr.22. ETH Zürich 1977.
4 Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd. 1. Teubner, Stuttgart 1954.
5 Van der Waerden, B.L.: Erwachende Wissenschaft, 2. Aufl. Birkhäuser, Basel 1966.

Aufgaben

Aufgabe 825. Es sei N eine natürliche Zahl. Für $n=1,2,\ldots,2N$ sei $f(n)$ definiert durch

$$f(n)=\binom{2N}{n}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{n-2k}{n}\right|\binom{N}{k}\binom{N}{n-k}.$$

Man gebe einen geschlossenen Term für $f(n)$ an. Ferner zeige man, dass stets $f(n+1) \leqslant f(n)$.

S. Gabler, Mannheim, BRD

Lösung: Mit den Abkürzungen

$$h(N,n;k) := \frac{\binom{N}{k}\binom{N}{n-k}}{\binom{2N}{n}} \quad \text{und} \quad m := \left[\frac{n}{2}\right]$$

folgt

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{n-2k}{n}\right| h(N,n;k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{n-2k}{n} h(N,n;k) + \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{n-2k}{n} h(N,n;n-k). \end{aligned}$$

Wegen

$$h(N,n;n-k) = h(N,n;k) \quad \text{und} \quad n-m-1 = \begin{cases} m-1 & \text{für} \quad n=2m \\ m & \text{für} \quad n=2m+1 \end{cases}$$

und des im ersten Falle für $k=m$ verschwindenden Faktors bei h lässt sich die zweite Summe als

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{n-2k}{n} h(N,n;k)$$

schreiben, somit kommt

$$f(n) = 2\sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{2k}{n}\right) h(N,n;k). \tag{1}$$

Da $h(N,n;k)$ als hypergeometrische Verteilung interpretiert werden kann, gilt

$$1 = \sum_{k=0}^{n} h(N,n;k) = \sum_{k=0}^{m} h(N,n;k) + \sum_{k=0}^{n-m-1} h(N,n;k).$$

Hier sind die Fälle $n=2m$ und $n=2m+1$ zu unterscheiden. Im ersten folgt

$$1 = 2\sum_{k=0}^{m} h(N,n;k) - h(N,2m;m),$$

im zweiten

$$1=2\sum_{k=0}^{m} h(N,2m+1;k).$$

Beide Ergebnisse lassen sich vereint darstellen in der Form

$$\sum_{k=0}^{m} h(N,n;k)=\frac{1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4}\,h(N,n;m). \tag{2}$$

Wegen $k\binom{N}{k}=N\binom{N-1}{k-1}$ und $\binom{N}{n-1-k}=\binom{N-1}{n-1-k}+\binom{N-1}{n-2-k}$ gilt

$$\begin{aligned}\binom{2N}{n}\sum_{k=0}^{m} kh(N,n;k)&=N\sum_{k=1}^{m}\binom{N-1}{k-1}\binom{N}{n-k}\\ &=N\binom{2(N-1)}{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} h(N-1,n-1;k)\\ &\quad+N\binom{2(N-1)}{n-2}\sum_{k=0}^{m-1} h(N-1,n-2;k).\end{aligned} \tag{3}$$

Für $n=2m$ erhält man für (1) aus (3) unter Verwendung von (2) nach einigen elementaren Umformungen

$$f(2m)=\frac{\binom{N-1}{m}\binom{N-1}{m-1}}{\binom{2N-1}{2m-1}}, \tag{4}$$

analog für $n=2m+1$

$$f(2m+1)=\frac{\binom{N-1}{m}\binom{N-1}{m}}{\binom{2N-1}{2m}}, \tag{5}$$

Die beiden Ergebnisse lassen sich wieder vereint darstellen durch

$$f(n)=\frac{\binom{N-1}{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{N-1}{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\binom{2N-1}{n-1}}. \tag{6}$$

Aus (4) und (5) folgt sofort $f(2m+1)=f(2m)$, dagegen $f(2m)<f(2m-1)$ als schärferes Ergebnis gegenüber $f(n+1)\leq f(n)$ für alle n.

Schliesslich folgt noch aus (6)

$$\lim_{N\to\infty} f(n) = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)!\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)!}.$$

Interessant ist auch die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung des Ergebnisses (6): Ist X eine diskrete zufällige Veränderliche, die mit Wahrscheinlichkeit $h(N,n;x)$ den Wert $x\in\{0,1,\dots,n\}$ annimmt, so gilt für den Erwartungswert der absoluten Abweichungen vom Mittelwert $n/2$:

$$E\left(\left|\frac{n}{2}-X\right|\right)=\frac{n}{2}f(n).$$

G. Bach, Leinfelden, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, USA), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 826. Man beweise folgende Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung

$$\binom{2n}{n}\geqslant\frac{4^n}{2n}$$

für die mittleren Binomialkoeffizienten: Für alle $m,n\in\mathbf{N}$ gilt

$$\binom{(m+1)n}{n}\geqslant\frac{(m+1)^{(m+1)n}}{(m+1)nm^{mn}}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $m=n=1$.

A. Kemnitz, Braunschweig, BRD

Lösung mit weiterer Verallgemeinerung. Für $r,s\in\mathbf{N}$ mit $r\geqslant 2$ und $0<s<r$ sind unter den r Summanden in der binomischen Entwicklung von

$$r^{r-1}=((r-s)+s)^{r-1}=\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r-1}{i}(r-s)^{r-1-i}s^i$$

diejenigen mit den Nummern $i=s-1$ und $i=s$ gleich gross, also maximal. Es ist also

$$r^{r-1}\leqslant r\cdot\binom{r-1}{s}(r-s)^{r-1-s}s^s=\binom{r}{s}(r-s)^{r-s}s^s$$

oder

$$\binom{r}{s}\geqslant\frac{r^{r-1}}{(r-s)^{r-s}s^s}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $r=2$ und $s=1$.
Für $r=(m+1)n$ und $s=n$ entsteht nach sorgfältigem Kürzen die speziellere Ungleichung des Aufgabenstellers.

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), S. Gabler (Mannheim, BRD), L. Geöcze (Viçosa, Brasilien), W. Janous (Innsbruck, A), J.H. van Lint (Eindhoven, NL), L. Kuipers (Mollens VS).

Aufgabe 827. Man zeige, dass die Kongruenz

$$1+4(n!)^4 \equiv 0 \pmod{4n+1}$$

dann und nur dann gilt, wenn n Quadratzahl und $4n+1$ Primzahl ist.

E. Trost, Zürich

Lösung: Sei $n \in \mathrm{N}$ und $1+4n!^4 \equiv 0 \bmod p := 4n+1$. Dann ist entweder $n=1$ oder $n \geqslant 4$ und für $n=1$ oder $n=4$ ist p Primzahl und n Quadratzahl. Im Fall $n \geqslant 5$ zeigen wir erst, dass p Primzahl sein muss: Wegen $n \geqslant 5$ ist $(4n+1)^{1/2} \leqslant n$; wäre p nicht Primzahl, so gäbe es eine p teilende Primzahl $q \leqslant (4n+1)^{1/2}$, die dann also auch $4n!^4$ und somit die Zahl 1 teilen müsste. Primzahlen p der Form $4n+1$ haben bekanntlich genau eine Darstellung als Summe zweier Quadratzahlen in der Form $p=4n+1=x^2+y^2$ mit ungeradem x und geradem y, wobei überdies $x \equiv (2n)!/2 \cdot n!^2 \bmod p$ und $|x| < p/2$ ist, vgl. [1], S. 65–92 bzw. 165–168. Wegen $((p-1)/2)!^2 \equiv -1 \bmod p$ ist daher $x^2 \equiv -1/4n!^4 \equiv 1 \pmod p$, also $x^2=1$ und somit $y^2=4n$, was zeigt, dass n Quadratzahl sein muss.
Sei nun $p=4n+1$ Primzahl und n Quadratzahl. In $p=x^2+y^2$ ist dann nach dem zitierten Satz $y^2=4n$ und $1=x^2 \equiv -1/4n!^4 \pmod p$, also $1+4n!^4 \equiv 0 \bmod 4n+1$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 C.F. Gauss: Theoria residorum biquadraticorum, Werke II, 2. Aufl. Göttingen 1876.

Eine weitere Lösung sandte K. Inkeri (Turku, Finnland).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. *Februar 1981* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem

672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 844. Let (x_n) be a sequence of successive approximations of $\sqrt{3}$ obtained by applying Newtons method to the function $f(x)=x^2-3$. Take $x_0=2$. Then

$$x_n+2=4-\frac{1|}{|4}-\frac{1|}{|4}-\cdots-\frac{1|}{|4},$$

a continued fraction containing the number 4 exactly 2^n times. Prove this.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Aufgabe 845. Für nichtnegative $x_1,\ldots,x_n$ mit $x_1+\cdots+x_n=s$ $(n\in\mathbf{N})$ beweise man

$$n-\frac{ns}{s+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\leqslant n-\frac{s}{s+1}.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

W. Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 846. Es sei

$$n-1\leqslant k\leqslant\binom{n}{2},\qquad n,k\in\mathbf{N}.$$

Dann gibt es auf der x-Achse immer n Punkte $x_1<x_2<\cdots<x_n$, die genau k verschiedene Entfernungen x_i-x_j $(i>j)$ bestimmen. Dies ist zu zeigen.

P. Erdös

Literaturüberschau

H. B. Griffiths und P. J. Hilton: Klassische Mathematik in zeitgemässer Darstellung. Band 2: 244 Seiten, Fr. 30.–; Band 3: 320 Seiten, Fr. 42.–. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, Zürich 1976 und 1978.

Mit diesen beiden Bänden liegt nun die Übersetzung von «A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics» abgeschlossen vor: Geometrie und Algebra werden in Band 2, Zahlensystem, Topologie und Analysis, Logik und Kategorien in Band 3 gebracht. Diese beiden Bände haben natürlich dasselbe Ziel wie der früher besprochene erste Band: Dem Leser soll nicht ein erster Kontakt mit dem dargebotenen Stoff vermittelt werden, sondern er soll eingeladen werden – und das geschieht auf eine geradezu charmante Art! –, bereits etwas vertraute Zusammenhänge von zeitgemässen Standpunkten aus nochmals zu überdenken. Es scheint uns, dass dieses Ziel auf ganz vorbildliche Art erreicht wird. Man versucht, den Leser für gewisse Fragestellungen zu motivieren, ihm bei schwierigen Passagen Hilfe zu leisten, auf didaktische Probleme einzugehen und schliesslich die Betrachtungen immer wieder in einen ganzheitlich mathematischen Rahmen, oft auch in weitere geistesgeschichtliche Zusammenhänge zu stellen. Der Inhalt dürfte durch die obige Aufzählung angedeutet sein; es bleibt indessen noch darauf hinzuweisen, dass die Autoren auch der Geometrie (vektorielle Geometrie, Längen- und Flächenmassbegriffe, Beweise in der Geometrie, projektive Geometrie) einen sehr beachtenswerten Platz zuweisen.

R. Ineichen