Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 35 (1980)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Satz. *Die Cantorsche Abbildung ist ein Borel-Isomorphismus.*

Beweis: Die σ-Algebra der Borelschen Mengen von J wird erzeugt von den Mengen $\{x: X_1(x)=k_1, \ldots, X_n(x)=k_n\}$, wobei $n, k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$ und $k_n \geqq 2$ ist. In der Tat, sei $z=2^{-l_1}+\cdots+2^{-l_1-\cdots-l_j}$, $z_o=0$ und $z_k=2^{-l_1}+\cdots+2^{-l_1-\cdots-l_k}$, wobei $j, k, l_1, \ldots, l_j \in \mathbf{N}$ und $k \leqq j$ sei, dann gilt $]0,z]=\bigcup_{k=1}^{j}]z_{k-1}, z_k]$, $]z_{k-1}, z_k]=\bigcup_{m=1}^{\infty}]z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m)}, z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m-1)}]$ und
$]z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m)}, z_{k-1}+2^{-l_1-\cdots-(l_k+m-1)}]$
$=\{x: X_1(x)=l_1, \ldots, X_{k-1}(x)=l_{k-1}, X_k(x)=l_k+m\}$.
f ist nun Borel messbar, da $f^{-1}\{z: X_1(z)=k_1, \ldots, X_n(z)=k_n\}$
$=\{x: X_i(x)=k_{2i-1}, i=1, \ldots, [n/2]+\delta_n\} \times \{y: X_j(y)=k_{2j}, j=1, \ldots, [n/2]\}$ gilt ($\delta_n=1$ für $n=2m+1$ und $\delta_n=0$ für $n=2m$).
Schliesslich ist f^{-1} Borel messbar, da
$f(\{x: X_1(x)=k_1, \ldots, X_m(x)=k_m\} \times \{y: X_1(y)=l_1, \ldots, X_n(y)=l_n\})$
$=\{z: X_{2i-1}(z)=k_i, X_{2j}(z)=l_j, i=1, \ldots, m, j=1, \ldots, n\}$ gilt.
Die rechte Seite ist ein endlicher Durchschnitt von Mengen $\{z: X_r(z)=s\}$, $r, s \in \mathbf{N}$. Diese Mengen sind Borel messbar wegen der Gleichung $\{z: X_r(z)=s\}$

$$=\bigcup_{k_1, \ldots, k_{r-1} \in \mathbf{N}} \{z: X_1(z)=k_1, \ldots, X_{r-1}(z)=k_{r-1}, X_r(z)=s\}.$$

D. Mussmann und D. Plachky, Münster, Westfalen

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Cantor: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. J. reine angew. Math. *84*, 242-258 (1878).
2 F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Chelsea Publication Co., New York 1949.

Aufgaben

Aufgabe 819. Zu gegebenem $n \in \mathbf{N}$ bestimme man die grösste natürliche Zahl $t(n)$ mit folgender Eigenschaft: In jeder 5zeiligen und n-spaltigen Matrix aus Nullen und Einsen gibt es zwei Zeilen, die in $t(n)$ Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen enthalten.

H. Harborth und J. Mengersen, Braunschweig, BRD

Lösung der Aufgabensteller: Jede Spalte einer beliebigen fünfzeiligen und n-spaltigen Matrix M aus Nullen und Einsen enthält mindestens drei Nullen oder drei Einsen. Damit enthält ein Zeilentripel T der $\binom{5}{3}=10$ möglichen Zeilentripel von M nach dem Schubfachprinzip in mindestens $\lceil n/10 \rceil$ Spalten jeweils drei Nullen oder drei Einsen ($\lceil x \rceil$ bzw. $\lfloor x \rfloor$ bezeichnen die kleinste ganze Zahl $\geqslant x$ bzw. die grösste ganze Zahl $\leqslant x$). Da in jeder der übrigen Spalten in T mindestens zwei Nullen oder zwei Einsen stehen, enthält eines der drei Zeilenpaare aus T in mindestens

$$\left\lceil \frac{1}{3}(n-\lceil n/10 \rceil) + \lceil n/10 \rceil \right\rceil$$

Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen, woraus

$$t(n) \geqslant \left\lceil \frac{1}{3}(n+2\lceil n/10 \rceil) \right\rceil$$

folgt. Schreibt man von links nach rechts $\lfloor n/10 \rfloor$-mal die Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und dann noch die ersten $n - 10\lfloor n/10 \rfloor$ Spalten von M_1 hintereinander, so ergibt sich eine fünfzeilige und n-spaltige Matrix, in der je zwei Zeilen in höchstens

$$\left\lceil \frac{1}{3}(n+2\lceil n/10 \rceil) \right\rceil$$

Spalten jeweils zwei Nullen oder zwei Einsen enthalten. Somit gilt

$$t(n) = \left\lceil \frac{1}{3}(n+2\lceil n/10 \rceil) \right\rceil.$$

Eine weitere Lösung sandte O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Aufgabe 820. Von der komplexen Differenzengleichung

$$a(r+n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k a(r+k)$$

wird vorausgesetzt, dass für jede Wahl von Anfangswerten $a(0), \ldots, a(n-1)$

$$\lim_{r\to\infty} a(r) = 0$$

gilt. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a(r)$ konvergiert und gebe ihre Summe an.

J. Golser, Wien, A
H. Wimmer, Würzburg, BRD

Solution: Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be the roots of the characteristic polynomial of the given difference equation. Then $|\lambda_i| < 1$ for all i, since $\lim_{r\to\infty} a(r) = 0$ for each choice of the initial values $a(0), \ldots, a(n-1)$. Hence $\sum_{r=0}^{\infty} a(r)$ converges being a linear combination of geometric series $\Sigma_r x^r$ (and possibly of derived series $\Sigma_r r(r-1)\cdots(r-k)$

x^{r-k-1}, if multiple roots occur) with $x=\lambda_i, i=1,2,\ldots,n$. Now we know that $\sum_{r=0}^{\infty} a(r)$ converges, its sum

$$s=\frac{a(0)+a(1)+\cdots+a(n-1)-\sum_{k=1}^{n-1} c_k\big(a(0)+a(1)+\cdots+a(k-1)\big)}{1-\sum_{k=0}^{n-1} c_k}.$$

immediately follows from the difference equation. Note that the denominator of the latter expression is $\neq 0$ since, otherwise 1 would be a root of the characteristic polynomial.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Mollens VS), I. Paasche (München, BRD).

Aufgabe 821. Eine Folge $(S_n)_{n=1,2,\ldots}$ nichtnegativer reeller Zahlen genüge bei festem $a>0$ der Ungleichung

$$S_{n+1} \leq a n S_n + S_{n-1} \quad \text{für} \quad n=2,3,\ \ldots$$

Man beweise die Existenz einer nur von S_1, S_2 und a abhängigen Konstanten $C \geq 0$ derart, dass

$$S_n \leq C a^n (n-1)! \quad \text{für} \quad n=1,2,\ldots$$

gilt.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Lösung mit Verallgemeinerung (Bearbeitung der Redaktion). Wir beweisen: Eine Folge $(S_n)_{n=1,2,\ldots}$ nichtnegativer reeller Zahlen genüge bei festem $a>0$ und nichtnegativen r_n mit

$$K := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r_n}{n(n-1)} < \infty$$

der Ungleichung

$$S_{n+1} \leqslant a n S_n + r_n S_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

Dann existiert eine nur von S_1, S_2, a und K abhängige Konstante $C \geq 0$ derart, dass

$$S_n \leq C a^n (n-1)! \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Beweis: Mit

$$T_1 := S_1, \qquad T_n := \frac{S_n}{a^n (n-1)!} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

sowie

$$d_1 := \frac{r_1}{a^2}, \qquad d_n := \frac{r_n}{a^2 n(n-1)} \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

ergibt sich zunächst

$$T_{n+1} \leq T_n + d_n T_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Die Folge (U_n) sei definiert durch

$$U_1 := T_1, \qquad U_2 := \max(T_1, T_2), \qquad U_{n+1} := U_n + d_n U_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 2. \tag{2}$$

Aufgrund von (1) schliesst man induktiv auf

$$U_{n+1} \geq U_n \geq T_n \quad \text{für} \quad n \geq 1. \tag{3}$$

Ferner zeigt man, ebenfalls durch vollständige Induktion unter Benutzung von (2), (3), dass

$$U_{n+1} \leq U_n(1+d_n) \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

Daraus folgt aber

$$U_n \leq U_2 \prod_{k=2}^{n-1} (1+d_k) \leq U_2 \exp\left(\sum_{k=2}^{n-1} d_k\right) \leq U_2 \exp\left(\frac{K}{a^2}\right) \quad \text{für} \quad n \geq 3.$$

Wegen (3) leistet somit

$$C := \max\left(U_1, U_2, U_2 \exp\left(\frac{K}{a^2}\right)\right)$$

das Verlangte. Im Spezialfall des Aufgabenstellers ist $K = 1$.

K. Witsch, St. Augustin, BRD

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), A.A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A). M. Kaletsch und H.B. Sieburg (Köln, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), Sim-por Lam und Kee-wai Lau (Hongkong).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1980* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von

Lösungen zu den mit *Problem* ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 837. Es seien G_1, G_2 zwei Graphen mit je n Ecken x_i bzw. $y_i (i = 1, \ldots, n)$ und e_n Kanten. Für die Grade (Valenzen) $\rho(x_i)$ bzw. $\rho(y_i)$ der Ecken gelte $\rho(x_i) \neq \rho(y_j)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Man bestimme max e_n.

P. Erdös

Aufgabe 838. Let $x_1, \ldots, x_k$ be positive real numbers. Show that if

$$[n(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)] = [n x_1] + [n x_2] + \cdots + [n x_k]$$

for all positive integers n, then at most one of $x_1, \ldots, x_k$ is nonintegral.

M. S. Klamkin, A. Liu, Alberta, Canada

Aufgabe 839. Man bestimme alle Quadrupel verschiedener natürlicher Zahlen, von denen jede Zahl Teiler der Summe der drei anderen ist.

P. Hohler, Olten

Aufgabe 840A. Gesucht ist das Minimum der Längensumme $l(C_1) + l(C_2)$ zweier einfach geschlossener punktfremder Kurven C_1, C_2, welche die Einheitssphäre S^2 in drei flächengleiche Teile zerlegen. Man verallgemeinere das Problem auf den Fall von n Kurven.

H. Flanders, Boca Raton, USA

Literaturüberschau

A. Mukherjea und K. Pothoven: Real and Functional Analysis. X und 529 Seiten. US $ 30.-. Plenum Press, New York, London 1978.
Dieses Buch bietet eine gute Einführung in die moderne Analysis, und zwar sowohl in die Lehre von Mass und Integral als auch der Banach- und Hilberträume. Die Theorie wird mit vielen Beispielen und Übungsaufgaben vervollständigt. Interessant sind die geschichtlichen Überblicke, die jedem Paragraphen vorangehen. Der Text ist reichlich mit Literaturangaben versehen, vor allem auch mit zahlreichen neuesten Forschungsresultaten.

J. Schoenenberger-Deuel

H. Grunsky: Lectures on Theory of Functions in Multiply Connected Domains. 253 Seiten. DM 32.-. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, Zürich 1978.
Dieses Buch wendet sich an Studenten, die über solide Kenntnisse in der Funktionentheorie verfügen, sich aber auf diesem Gebiet noch nicht spezialisiert haben. Es behandelt Probleme, die sich bei der Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete stellen. Für den Zugang zu einem umfassenderen Studium der Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten leistet ein ausgedehntes Literaturverzeichnis am Schluss des Buches wertvolle Dienste.

K. Meier