

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 35 (1980)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$A(z)$  is isometrically isomorphic to  $\mathbf{C}$ . Hence,  $A(z)$  contains a nonzero idempotent  $e$  corresponding to 1 in  $\mathbf{C}$ . Since  $e^2 = e$ ,  $eAe$  is a subalgebra of  $A$  with  $e$  as identity. By the assumed norm condition,  $\|e\| = 1$  and  $\|exe\| = \|x\|$  for all  $x \in A$ . Thus the map  $x \rightarrow exe$  is a linear isometry of  $A$  onto  $eAe$  and  $eAe$  has a 'multiplicative norm'. It follows by theorem 1 that  $eAe$  is isometrically isomorphic to  $\mathbf{C}$ . Now  $A$  and  $\mathbf{C}$  are isomorphic as vector spaces, and for  $x \in A$ ,  $x \neq 0$ , we have  $\|x^2\| = \|x\|^2 > 0$ . Therefore, applying lemma 2,  $A$  has an identity, and the result follows from theorem 1.

R. S. Doran, Texas Christian University, Fort Worth, USA

## REFERENCES

- 1 R. Arens: Linear topological division algebras. Bull. Am. Math. Soc. 53, 623–630 (1947).
- 2 R. Larsen: Banach algebras, an introduction. Marcel Dekker, Inc., New York 1973.
- 3 S. Mazur: Sur les anneaux linéaires. C.R. Acad. Sci., Paris 207, 1025–1027 (1938).
- 4 C. Rickart: General theory of Banach algebras. D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960.
- 5 G. Simmons: Introduction to topology and modern analysis. McGraw-Hill, New York 1963.

## Aufgaben

**Aufgabe 816.**  $a_1, a_2, \dots, a_s$  seien gegebene positive Zahlen und  $0 < r < 1$ . Die Folge  $(a_n)$  sei durch die Rekursionsformel

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-s})^r, \quad n > s$$

bestimmt. Man beweise die Konvergenz von  $(a_n)$  und bestimme ihren Grenzwert.

E. Trost, Zürich

**Solution:** This problem is solved by applying the following more general

**Theorem.** Let  $g: \mathbf{R}_+^k \rightarrow \mathbf{R}_+^k$  (where  $\mathbf{R}_+^k$  denotes the positive octant in  $\mathbf{R}^k$ ) be increasing with respect to each of its arguments. Suppose that the function  $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ , defined by  $f(x) := g(x, x, \dots, x)$  is continuous and satisfies

$$f(x) > x \quad \text{for } 0 < x < a, \quad f(x) < x \quad \text{for } x > a,$$

for some  $a > 0$ . Let the sequence  $(a_n)$  satisfy  $a_n > 0$  ( $n = 0, \dots, k-1$ ) and

$$a_{n+k} = g(a_{n+k-1}, \dots, a_n) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Then  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Proof: Define  $b_n := \min S_n$ ,  $c_n := \max S_n$ , where

$$S_n := \{a_{kn}, \dots, a_{kn+k-1}, a\}.$$

Then one finds successively

$$a_{kn+k} = g(a_{kn+k-1}, \dots, a_{kn}) \geq f(b_n) \geq b_n,$$

.

.

.

$$a_{kn+2k-1} \geq f(b_n) \geq b_n$$

and hence

$$b_{n+1} \geq f(b_n) \geq b_n.$$

Notice that  $f$  is increasing so that  $a \geq f(b_n)$ . We conclude that  $\beta := \lim b_n$  exists. By the continuity of  $f$  we must have  $f(\beta) = \beta$  and hence  $\beta = a$ . Similarly one finds

$$c_{n+1} \leq f(c_n) \leq c_n$$

and hence  $\gamma := \lim c_n$  exists and satisfies  $\gamma = f(\gamma)$ , that is  $\gamma = a$ . Since

$$b_n \leq a_{kn+j} \leq c_n \quad (j=0, \dots, k-1)$$

it follows that  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Application to the problem: Take  $g(x_1, x_2, \dots, x_s) = (x_1 + \dots + x_s)^r$  in the theorem. The convergence of the sequence  $(a_n)$  then follows and the value of the limit  $a$  follows from  $a = (sa)^r$ , i.e.

$$a = s^{r/(1-r)}$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), P. Erdős, J. Fehér (Pécs, Ungarn), A.A. Jagers (Enschede, NL), M. Kaletsch und H.B. Sieburg (Köln, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), R. Unsin (Köln, BRD), H. Walser (Frauenfeld), K. Witsch (St. Augustin, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 817.** Man bestimme alle Polynome  $f$  mit komplexen Koeffizienten, welche der Gleichung  $f(x)f(-x) = f(x^2)$  genügen.

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers: Aus der Gleichung erhält man unmittelbar:

- (1) Mit  $u$  ist auch  $u^2$  eine Wurzel von  $f$ .
- (2) Mit  $u$  ist auch mindestens eine der Zahlen  $\sqrt{u}$ ,  $-\sqrt{u}$  eine Wurzel von  $f$ .
- (3)  $f$  ist normiert.
- (4) Mit  $f_1, f_2$  ist auch  $f_1 f_2$  eine Lösung der Gleichung.

Iteriert man (1) und (2), so müssen wegen der Endlichkeit der Wurzelmenge periodische Wurzelfolgen entstehen. Da dies für  $|u| > 1$  und  $0 < |u| < 1$  nicht der Fall ist, muss  $u=0$  oder  $|u|=1$  gelten. Ist  $|u|=1$ , so muss es ein kleinstes  $i$  mit  $u^{2^i} = u^{2^j}$  ( $j > i \geq 0$ ) geben;  $u$  ist also notwendigerweise eine  $n$ -te Einheitswurzel. Wir bestimmen nun die zulässigen Wurzeln  $u$  und zu jedem solchen  $u$  die Menge  $W_u$  der aus  $u$  durch Iteration von (1) und (2) erzeugten Wurzeln. Zu jedem  $u$  geben wir ein Polynom  $f_u$  an, das genau die Elemente von  $W_u$  als einfache Wurzeln hat. Mit (4) erhalten wir schliesslich aus den  $f_u$  die allgemeine Lösungsschar.

Doch zuvor beweisen wir einen

**Hilfssatz.**  $v = \exp(i\psi_0)$  mit  $\psi_0 = k_0\pi/n$ ,  $(k_0, n) = 1$ ,  $k_0$  ungerade,  $k_0 \leq 2n-1$  kann nicht Wurzel von  $f$  sein.

Beweis: Andernfalls wäre nach (2) eine der Zahlen  $\psi'_1 = k_0\pi/2n$  oder  $\psi''_1 = (k_0+2n)\pi/2n$ , also eine Zahl der Form  $\psi_1 = k_1\pi/2n$  mit  $(k_1, n) = 1$ ,  $k_1$  ungerade,  $k_1 \leq 2^2n-1$ , ebenfalls Argument einer Wurzel. Iteration von (2) ergäbe eine unendliche Folge verschiedener Wurzeln.

Wegen des Hilfssatzes scheiden bereits alle  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\neq 1$  mit geradem  $n$  aus: Das Argument  $\psi = 2m\pi/n$  mit  $m < n$  lässt sich jedenfalls auf die Form  $\psi = 2m'\pi/n'$  mit ungeradem  $m'$  und geradem  $n'$  bringen. Nach (2) ist eine der Zahlen  $m'\pi/n'$  oder  $(m'+n')\pi/n'$  Argument einer Wurzel, was aber für beide dank dem Hilfssatz ausgeschlossen ist. Alle noch verbleibenden Wurzeln sind zulässig.

Ist  $u=0$ , so  $W_0 = \{0\}$  und  $f_0(x) = -x$ .

Für  $u=1$  liefert (1) keine weitere Wurzel, (2) ausser 1 höchstens noch  $-1$  mit dem verbotenen Argument  $\pi$ . Somit ist  $W_1 = \{1\}$  und  $f_1(x) = 1-x$ .

Sei jetzt  $u$  eine  $n$ -te Einheitswurzel  $\neq 1$  mit ungeradem  $n \geq 3$ , ihr Argument ist  $\psi = 2m\pi/n$ ,  $0 < m < n$ . Um Wiederholungen zu vermeiden, setzen wir  $(m, n) = 1$  voraus. Wegen  $(2, n) = 1$  gilt  $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ . In der primen Restklassengruppe  $P_n$  erzeugt 2 eine Untergruppe  $U_n$  der Ordnung  $k_n, k_n | \varphi(n)$ ; wir setzen  $\psi(n)/k_n = d_n$ . Es gilt  $m \in P_n$  für jedes zulässige  $m$ . Wir wählen  $m_1 = 1$  aus  $U_n$  und  $m_2, m_3, \dots, m_{d_n}$  aus verschiedenen Nebenklassen von  $U_n$  aus. Jedes der Argumente  $\psi_i = 2m_i\pi/n$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_n$ , gibt vermöge (1) Anlass zu  $k_n$  verschiedenen Argumenten  $2\psi_i, 2^2\psi_i, \dots, 2^{k_n}\psi_i = \psi_i$  (hier und im folgenden sind alle Argumente ins Intervall  $]0, 2\pi[$  reduziert zu denken). (1) liefert daraus keine neuen Werte; (2) führt von  $2^r\psi_i$  auf das schon gezählte  $2^{r-1}\psi_i$  oder auf  $2^{r-1}\psi_i + \pi = (2^r m_i + n)\pi/n = s\pi/n$  mit ungeradem  $s$ , was nach dem Hilfssatz nicht in Frage kommt. Ist  $u_i$  die zu  $\psi_i$  gehörende Einheitswurzel, so erhalten wir  $d_n$  disjunkte Wurzelmengen  $W_{n,i} = \{u_i, u_i^2, \dots, u_i^{k_n-1}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_n$  und  $d_n$  Polynome  $f_{n,i}(x) = (u_i - x)(u_i^2 - x) \cdots (u_i^{k_n-1} - x)$ .

Alle Polynome  $f_0, f_1, f_{n,i}$  erfüllen offensichtlich die gegebene Gleichung. Somit ist nach (4) deren allgemeine Lösung

$$f = f_0^{r_0} f_1^{r_1} \prod_{v=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d_{2v+1}} f_{2v+1,i}^{s_{v,i}}, \quad r_0, r_1, s_{v,i} \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Weitere Beiträge sandten L. Carlitz (Durham, USA), A. Fort (Padova, I), A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), R. Unsinn (Köln, BRD), K. Witsch (St. Augustin, BRD), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 818.**  $G_m$  bezeichne die additive bzw. die multiplikative Gruppe aller bzw. aller regulären komplexen  $(m, m)$ -Matrizen,  $Z_n$  die multiplikative Gruppe der komplexen zyklischen Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \end{bmatrix}$$

Man bestimme alle stetigen Lösungen  $F: G_m \rightarrow Z_n$  der Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} F(X+Y) &= F(X)F(Y) \quad \text{mit} \quad F(O) = E_n \quad \text{und} \\ F(T^{-1}XT) &= F(X) \quad \text{für alle} \quad x \in G_m \quad \text{und alle regulären} \quad T \end{aligned} \quad (1)$$

bzw.

$$F(XY) = F(X)F(Y) \quad \text{mit} \quad F(E_m) = E_n \quad (2)$$

$E_m, E_n$  bezeichnen jeweils die Einheitsmatrix.

H. Kappus, Rodersdorf

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_0(X) & f_1(X) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n-1}(X) \\ f_{n-1}(X) & f_0(X) & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n-2}(X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(X) & f_2(X) & \cdot & \cdot & \cdot & f_0(X) \end{bmatrix}$$

mit  $f_k: G_m \rightarrow \mathbf{C}$ . Mit Hilfe der  $n$ -ten Einheitswurzeln

$$\varepsilon_v = \exp \frac{2\pi i v}{n}, \quad v = 0, \dots, n-1$$

bilden wir die Funktionen

$$\varphi_v(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_v^k f_k(X), \quad v = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

Dann gilt bekanntlich

$$F(X) = U \operatorname{diag}(\varphi_0(X), \dots, \varphi_{n-1}(X)) U^{-1}, \quad \text{wobei } U = (\varepsilon_k^j).$$

$F$  ist also genau dann eine Lösung von (1) bzw. (2), wenn die Funktionen  $\varphi_\nu$  den Funktionalgleichungen

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X)\varphi(Y) \quad (4)$$

mit den entsprechenden Anfangs- und Invarianzbedingungen genügen. Die Lösungsmengen von (4) sind wohlbekannt (siehe z. B. [1], S. 242):

$$\varphi_\nu(X) = \exp(c_\nu \cdot \operatorname{tr} X), \quad c_\nu \in \mathbf{C} \quad (5)$$

( $\operatorname{tr} X$  bezeichnet die Spur der Matrix  $X$ ) bzw.

$$\varphi_\nu(X) = |\det X|^{c_\nu} \quad \text{oder} \quad \varphi_\nu(X) = \operatorname{sgn}(\det X) |\det X|^{c_\nu}, \quad c_\nu \in \mathbf{C}. \quad (6)$$

Zwecks Auflösung von (3) nach den  $f_k$  multiplizieren wir (3) mit  $\varepsilon_j^\nu$  und summieren über  $\nu = 0, \dots, n-1$ . Unter Beachtung von

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon_\nu^k \varepsilon_j^\nu = \begin{cases} n, & \text{falls } j+k \equiv 0 \pmod{n} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt sich

$$f_k(X) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{2\pi i \nu k}{n}\right) \varphi_\nu(X), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (7)$$

Damit sind alle stetigen Lösungen von (1) bzw. (2) gefunden.

#### LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Aczel: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel 1961.

Eine weitere Lösung sandte M. L. J. Hautus (Eindhoven, NL). Er zeigt, dass die allgemeine Lösung von (1) bzw. (2) in der Form

$$F(X) = \exp\{(\operatorname{tr} X)A\}, \quad A \in \mathbf{Z}_n$$

bzw.

$$F(X) = \exp\{(\log \det X)A\}, \quad A \in \mathbf{Z}_n, \quad e^{2\pi i A} = E_n$$

darstellbar ist.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1980* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68), Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44).

**Aufgabe 834.** Zu gegebenen  $m, j \in \mathbb{N}$  bezeichne  $N(j, m)$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , für welche

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m i^{-k} \geq j$$

gilt. Man bestimme

$$g_m = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{N(j+1, m)}{N(j, m)}.$$

J. Dankert, Magdeburg, DDR  
W. Moldenhauer, Rostock, DDR

**Aufgabe 835.** Es seien  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) und  $m$  natürliche Zahlen. Unter  $a_i^{1/m}$  werde die positive Lösung der Gleichung  $x^m = a_i$  verstanden. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Sind die Zahlen  $a_i^{1/m}$  sämtlich irrational, so ist auch  $s := a_1^{1/m} + \dots + a_n^{1/m}$  irrational.

P. Mihailescu, Zürich

**Aufgabe 836.** Gesucht ist die Konstruktion der Verbindungsgeraden zweier weit entfernter Punkte in der euklidischen Ebene mit eingeschränkten Konstruktionshilfsmitteln. Zur Verfügung stehen ein gerades Lineal mit der festen Länge  $L$  und ein Zirkel mit fest eingestelltem Radius  $R < L$ .

W. Gamerith und P. Schöpf, Graz, A

## Literaturüberschau

Optimal Estimation in Approximation Theory. Hrsg. Ch.A. Micchelli und Th.J. Rivlin. IX und 300 Seiten. US\$ 35.40. Plenum Press, New York, London 1977.

Der Band enthält die gesammelten Arbeiten einer internationalen Tagung mit dem oben erwähnten Titel, welche im Jahre 1976 in Freudenstadt, BRD, stattfand. Abstrakt kann das Hauptthema der Tagung, die optimale Rekonstruktion von Funktionen, wie folgt beschrieben werden: Für eine unbekannte Funktion  $f$  aus einer gegebenen Funktionsklasse soll aus einer zur Verfügung stehenden