Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 35 (1980)
Heft: 1

Artikel: Le chasseur perdu dans la forêt
Autor: Joris, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34678

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 35 Nr. 1 Seiten 1-24 Basel, 10. Januar 1980

Le chasseur perdu dans la forêt

(Un problème de géométrie plane)

1. Un chasseur erre dans la forêt, ayant perdu l'orientation. Après quelque temps, il trouve un indicateur l'informant qu'une route passe à un kilomètre de là. Malheureusement, l'arbre auquel l'indicateur est cloué, gît par terre, privant le chasseur de tout renseignement sur la direction à suivre pour trouver cette route. Il décide de marcher droit un kilomètre en direction arbitraire, et de continuer ensuite sur le pourtour du cercle ayant l'emplacement de l'indicateur comme centre. Ainsi, il est sûr de trouver la route après au plus $1+2\pi$ km de marche.
Cette situation était décrite dans un problème d'un de ces concours mathématiques pour collégiens, populaires aux Etats-Unis. La question: *Supposant que la route est droite, quel est le chemin plus court qu'aurait pu prendre le chasseur s'il avait réfléchi un peu plus longtemps?* La réponse attendue était probablement: «Au lieu de parcourir le cercle entier, il remplace le dernier quart par un chemin droit d'un kilomètre, tangent au cercle (fig. 1), gagnant $\pi/2-1\approx 0{,}57$ km.»
Mais il est possible de raccourcir encore plus le parcours en continuant d'abord dans la direction du rayon au-delà du cercle et en revenant ensuite sur le cercle tangentiellement (fig. 2). Cela donne le chemin $ABCDEF$, de longueur

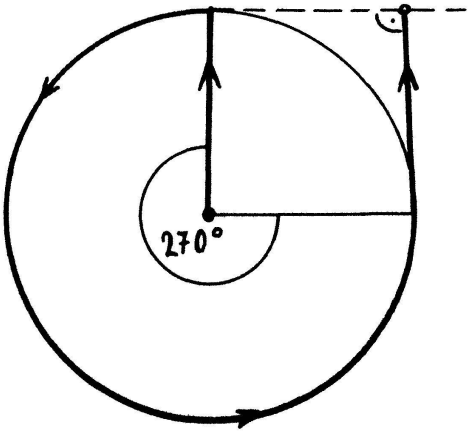

Figure 1

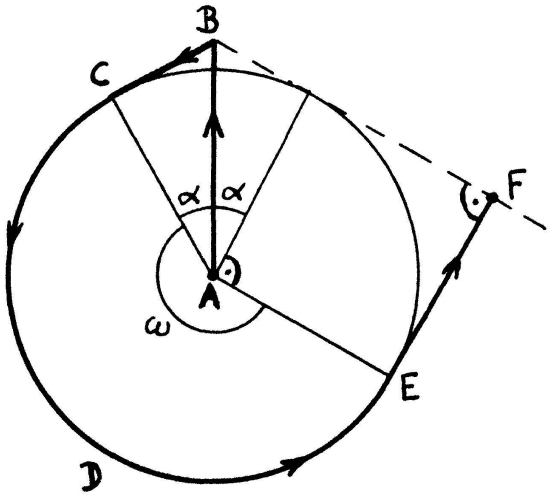

Figure 2

$$\frac{1}{\cos a}+\operatorname{tg} a+\omega+1=\frac{1}{\cos a}+\operatorname{tg} a+\frac{3\pi}{2}-2a+1=l(a).$$

$l(a)$ atteindra son minimum pour $a=30°=\pi/6$,

$$l\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{6}\pi+1+\sqrt{3}. \tag{1}$$

2. Abstraction faite de forêt et chasseur, en termes de géométrie plane, on est amené à formuler le problème (P):
Donné un cercle de rayon 1, trouver le chemin le plus court qui intersecte toutes les tangentes du cercle, et qui prend son départ au centre.
On a le théorème suivant:

Théorème 1. *Une solution de (P) est le chemin de la figure 2, avec $a=\pi/6$. Toute autre solution s'obtient d'elle par des rotations et réflexions du plan qui laissent le cercle en place.*

Si l'on supprime, dans (P), la condition sur le point de départ, on a le

Théorème 2. *Le chemin le plus court qui intersecte toutes les tangentes d'un cercle donné consiste en une moitié du cercle donné prolongé de chaque côté par un segment tangent de la longueur du rayon* (fig. 3).

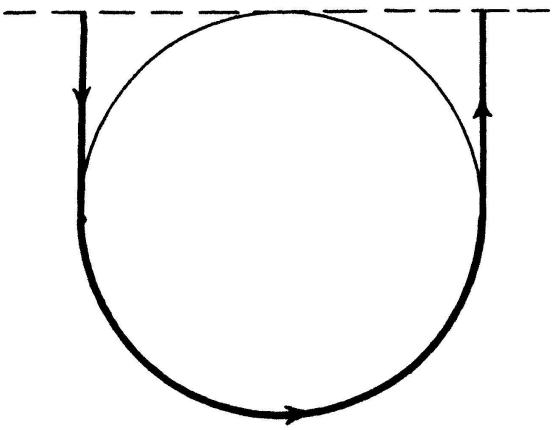

Figure 3

(Si le rayon est de longueur 1, la longueur du chemin est $\pi+2$.)
Aussi élémentaires et plausibles que ces théorèmes, en particulier le second, puissent paraître, je n'ai pas réussi à trouver des démonstrations simples et complètement élémentaires. Ceci est dû au fait que l'on doit prendre en considération toutes les courbes continues et rectifiables qui satisfont aux conditions, bien que les solutions soient des courbes composés de segments droits et d'arcs circulaires.

3. Dans ce qui suit, nous allons démontrer les deux théorèmes précédents. La méthode consiste à montrer que chaque courbe minimale est une de celles décrites dans les théorèmes. Nous démontrons d'abord l'existence de courbes minimales.

Soit m l'infimum des longueurs des courbes qui rencontrent toutes les tangentes, $\mathfrak{C}_n$ une suite minimale de telles courbes, donc $l(\mathfrak{C}_n)=$ (longueur de $\mathfrak{C}_n) \to m$. Chaque $\mathfrak{C}_n$ peut être paramétrisée par f_n: $[0,1] \to E_2$, le paramètre étant proportionnel à la longueur de l'arc. Les $l(\mathfrak{C}_n)$ sont bornées, donc toutes les $\mathfrak{C}_n$ sont dans un carré fermé, et

$$\text{distance}\,(f_n(t_2), f_n(t_1)) \leqslant |t_1 - t_2|\, l(\mathfrak{C}_n) \leqslant |t_1 - t_2| \cdot M,$$

pour tous t_1, t_2, n, M étant une constante. On est donc en droit d'appliquer le théorème de Arzela-Ascoli: il existe un chemin $\mathfrak{C}$, donné par f: $[0,1] \to E_2$, tel que $f_n \to f$ uniformément. Alors $l(\mathfrak{C}) \leqslant m$, et $\mathfrak{C}$ rencontre chaque tangente. Car autrement, si $\mathfrak{C}$ ne rencontre pas t, $\mathfrak{C}$ a une distance positive de t, et à cause de l'uniformité de $f_n \to f$, $\mathfrak{C}_n$ aura aussi une distance positive de t pour $n \geqslant N$, ce qui n'est pas possible. Donc, on a un minimum pour le théorème 2. Pour le théorème 1, chaque $\mathfrak{C}_n$ débutera au centre du cercle, donc aussi $\mathfrak{C}$.

4. *Notations:* Si $A, B, C, D \ldots$ sont des points du plan, AB sera le segment droit entre A et B, $|AB|$ la distance entre A et B; $ABCD \ldots$ sera le chemin $AB \cup BC \cup CD \cup \ldots$. Si $A \neq B$, $d(AB)$ sera la droite qui relie A et B, $r(AB)$ la demi-droite de $d(AB)$ qui commence en A et passe par B. Si $A \neq B \neq C$ et si $r(BA)$ n'est pas la demi-droite opposée à $r(BC)$, $a(ABC)$ sera la région angulaire convexe fermée délimitée par $r(BA)$ et $r(BC)$ et $\sphericalangle ABC$ la mesure angulaire de $a(ABC)$. Donc $0 \leqslant \sphericalangle ABC < \pi$ toujours.
L'enveloppe convexe d'un ensemble S sera $k(S)$. En particulier, si $A, B, C, \ldots$ sont des points, $k(ABC \ldots)$ sera le polygone convexe le plus petit qui contient $A, B, C \ldots$; $k(ABC)$ sera le triangle ayant A, B, C comme sommets.
Le cercle que nous considérons sera K, son intérieur et extérieur $\operatorname{int}(K)$ et $\operatorname{ext}(K)$.
Si un chemin est donné par f: $[a,b] \to E_2$, et $X = f(t)$, $Y = f(s)$, on écrira $X < Y$ si $t < s$.

5. Soit d'abord $\mathfrak{C}$ un chemin quelconque, donné par c: $[a,b] \to E_2$. $[a,b]$ est union de $c^{-1}(K)$, $c^{-1}(\operatorname{int}(K))$ et $c^{-1}(\operatorname{ext}(K))$; la topologie nous enseigne que $c^{-1}(\operatorname{int}(K))$ et $c^{-1}(\operatorname{ext}(K))$ sont composés d'intervalles ouverts dans $[a,b]$, $c^{-1}(K)$ est composé d'intervalles fermés dans $[a,b]$, et en plus, s'il y a une infinité de tels intervalles, des points d'accumulation. *Je dénoterai les chemins correspondants aux intervalles de* $c^{-1}(K)$, $c^{-1}(\operatorname{int}(K))$ *et* $c^{-1}(\operatorname{ext}(K))$, *par* j_1, j_2, j_3 *respectivement*, après avoir ajouté à chacun d'eux son point initial et terminal, si nécessaire.

6. Considérons maintenant un j_1 d'une courbe minimale $\mathfrak{C}$. j_1 est un arc sur K, pas tout K. Si les extrémités de l'arc ne sont pas le point initial et le point terminal de j_1, une partie de l'arc est parcourue deux fois, ce qui permet un raccourcissement par une corde. Donc pour $\mathfrak{C}$ minimale, les j_1 sont des arcs de K parcourus simplement. Les j_2, étant à l'intérieur du cercle, où il n'y a pas de tangentes, sont clairement des cordes ou des segments de cordes.

7. Il nous reste les j_3 à considérer. Soit d'abord $X \in \operatorname{ext}(K)$; soient t_+ et t_- les deux

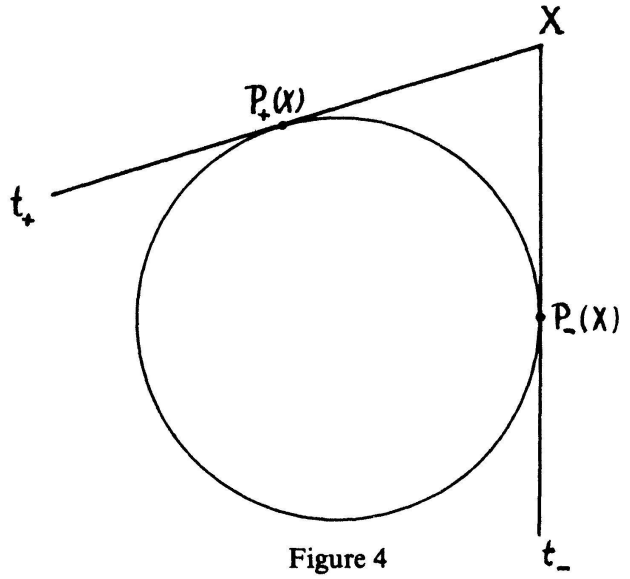

Figure 4

tangentes de X à K, telles que vu de X, K soit à gauche de t_+. Soient $P_+(X)$ et $P_-(X)$ les points où t_+ et t_- touchent K (fig. 4). Pour $X \in K$, on écrit $P_+(X) = P_-(X) = X$. Alors P_+ et P_- sont des applications continues de $K \cup \operatorname{ext}(K)$ sur K. Chaque $P_+(j_3)$ et $P_-(j_3)$ est un arc fermé sur K, et si j_3 a un point sur K, $P_+(j_3) \cup P_-(j_3)$ est un arc fermé sur K. Soit maintenant $X_0 \in \mathfrak{C} \cap \operatorname{ext}(K)$, et t une tangente qui sépare K de X_0 proprement, donc $X_0 \notin t$. Supposons, pour simplifier, que X_0 n'est pas terminal ou initial sur $\mathfrak{C}$. Il existe Y, Z sur $\mathfrak{C}$, $Y < X_0 < Z$ tels que pour $Y \leqslant X \leqslant Z$, X soit aussi séparé de K par t proprement. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 quatre points, $Y \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant X_3 \leqslant X_4 \leqslant Z$, pour lesquels minimum et maximum de P_+ et P_- sur le chemin $\{X \in \mathfrak{C} \mid Y \leqslant X \leqslant Z\}$ sont atteints. Alors le chemin segmentaire $YX_1X_2X_3X_4Z$ rencontre les mêmes tangentes et est strictement plus court que tout autre chemin contenant Y, X_1, X_2, X_3, X_4, Z dans le même ordre. Donc il suit que *chaque j_3 est une succession de segments.* Nous appelons AB un *segment maximal* de $\mathfrak{C}$, si AB ne fait pas partie d'un segment $A'B'$ de $\mathfrak{C}$ contenant AB proprement.

8. Il est utile de considérer le problème d'une façon différente. Soit D un domaine compact et convexe dans le plan E_2. Les droites de soutien de D sont les droites l qui intersectent D de telle façon que D se trouve complètement dans l'un des deux demi-plans fermés définis par l. Soit S un ensemble connexe. Alors D est dans $k(S)$ si et seulement si S intersecte toutes les droites de soutien de D. En particulier si D est bordé d'une courbe lisse, les droites de soutien sont les tangentes à la courbe du bord.
Notre problème se ramène à trouver le chemin $\mathfrak{C}$ le plus court tel que $K \subseteq k(\mathfrak{C})$.
Rappelons que $k(S_1 \cup S_2)$ est l'union des segments XY avec $X \in k(S_1)$ et $Y \in k(S_2)$.
On dira que l'arc $\mathfrak{S}$ du chemin $\mathfrak{C}$ est *répétitif* si ou bien $K \subseteq k(\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{S})$ ou bien $\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{S}$ intersecte toutes les tangentes de K. En particulier $\mathfrak{S}$ est répétitif si $\mathfrak{S} \subseteq k(\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{S})$.
Un arc répétitif est toujours un segment droit parcouru simplement.

9. Soit $P \in K \cap \mathfrak{C}$, t la tangente en P, et soit $Q \in \mathfrak{C}$ *proprement séparé de K par t, c'est-à-dire Q est à l'intérieur du demi-plan défini par t qui ne contient pas K.* Alors

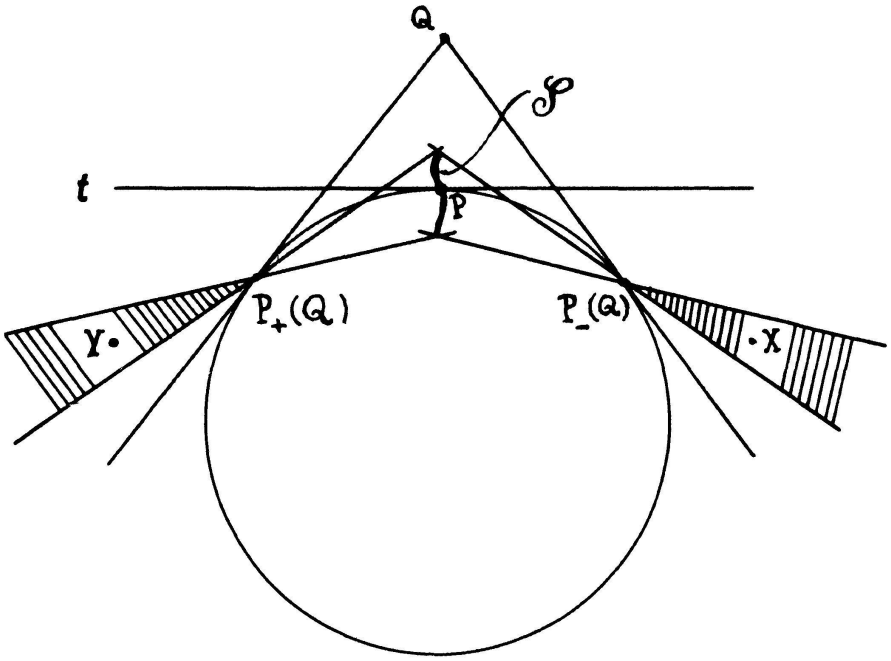

Figure 5

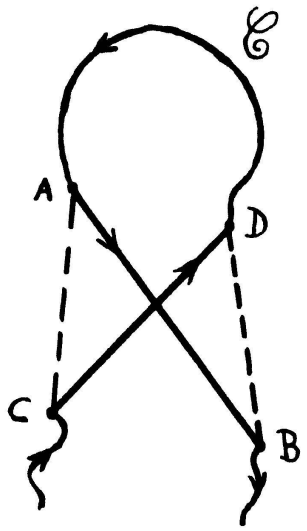

Figure 6

près de P, $\mathfrak{C}$ est un segment droit. Car si $\mathfrak{S}$ est un arc de $\mathfrak{C}$ contenant P, et contenu dans l'intérieur du triangle $k(P_+(Q)QP_-(Q))$ (fig. 5), il doit y avoir des points X, Y dans les régions hachurées, avec $X, Y \in k(\mathfrak{C}\setminus\mathfrak{S})$. Alors $\mathfrak{S} \subseteq k(YQX) \subseteq k(\mathfrak{C}\setminus\mathfrak{S})$, donc $\mathfrak{S}$ est répétitif, donc un segment.

10. Les considérations du § 8 nous permettent d'exclure les situations impossibles suivantes:
Imp. a): Deux segments AB et CD non colinéaires qui s'intersectent en un point intérieur à au moins l'un des segments AB et CD. Car dans la figure 6, $k(AB \cup DC) = k(DB \cup AC)$. On obtient un raccourcissement en remplaçant AB et CD par CA et DB et en changeant la direction d'une partie de $\mathfrak{C}$.

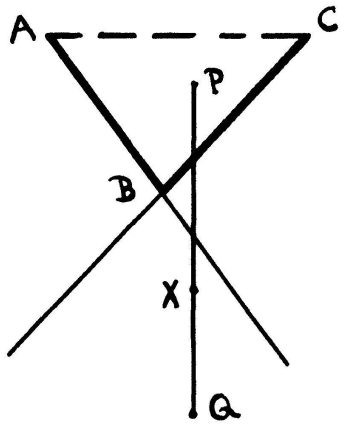

Figure 7

Imp. b): Deux segments consécutifs ABC formant un angle tel que la région angulaire opposée contient un point X de K ou de $k(\mathfrak{C}\setminus ABC)$, $X \neq B$. Car dans la figure 7 soit $S = (\mathfrak{C}\setminus ABC) \cup A \cup C$, $\mathfrak{C} = ABC \cup S$. Il existe $Q \in k(S)$ tel que

$X \in PQ$, $P \in k(ABC)$; alors $ABC \subseteq k(QAC)$, ABC est répétitif et doit être remplacé par le segment AC, plus court que ABC.
Imp. c): Un segment AC tel que C est point terminal ou initial de $\mathfrak{C}$, tel que $r(AC)$ intersecte K au-delà de C. Seule exception: C est le point initial imposé du problème (P).
Imp. d): Deux segments qui coïncident, dont au moins l'un est suivi par un segment de direction différente (fig. 8).

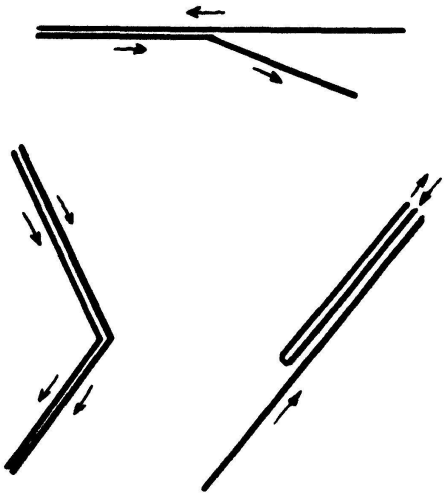

Figure 8

Imp. e): Deux segments consécutifs $A'BC'$ tels que K est contenu dans $a(A'BC')$. Car si A et C sont à l'intérieur de $A'B$ et $C'B$ resp., assez près de B, l'on voit facilement que $d(AC)$ sépare B proprement de K et que ABC peut être remplacé par AC, plus court.
Imp. f): Deux segments consécutifs ABC, tels que K soit contenu dans une des régions angulaires supplémentaires à $a(ABC)$, resp. demi-plans définis par $d(AB)$ si $r(BA) = r(BC)$. Seule exception: $A = C \in K$, et $d(AB)$ est tangente à K. Nous traitons ici le cas non dégénéré où $r(BA) \neq r(BC)$, et $ABC \subseteq \mathrm{ext}(K)$ (fig. 9). On suppose que BA et BC soient maximaux et que $d(BA)$ sépare K et BC. Soient les tangentes

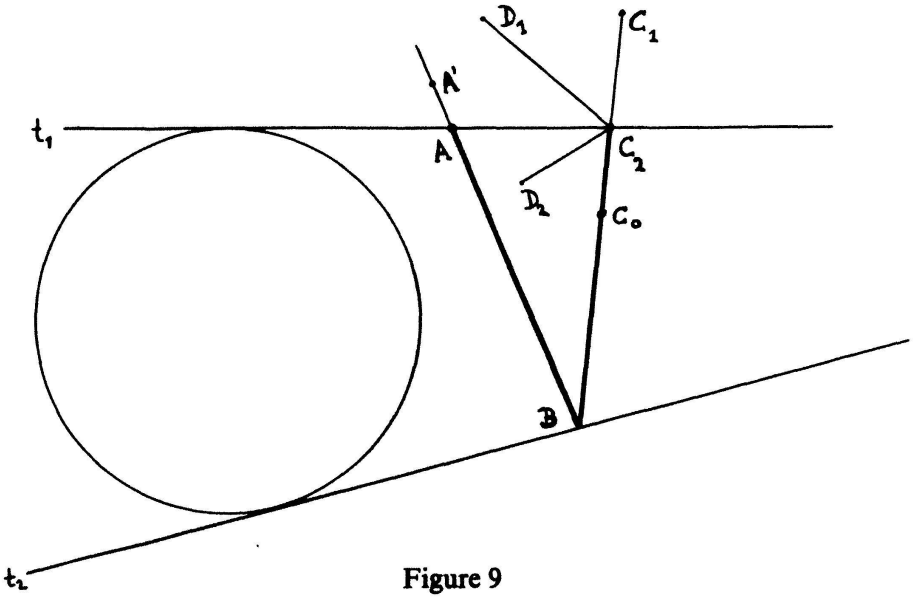

Figure 9

t_1 et t_2 de A et B comme dans la figure. Pour C on a les possibilités C_0, C_1, C_2. BC_2 est répétitif, donc $C \neq C_0$. Si $C = C_1$, BA' est répétitif, donc BA n'est pas maximal. Donc: $C = C_2$. Si C est point terminal de $\mathfrak{C}$, BC est superflu (car le seul point terminal de $\mathfrak{C}$ imposé est le centre de K). Regardons la suite de $\mathfrak{C}$ au-delà de C. Si c'est un segment CD_1, avec D_1 proprement séparé de K par t_1, BA ne peut pas être maximal. Si par contre la suite est CD_2 avec D_2 dans le même demi-plan fermé (défini par t_1) que K, BCD_2 est répétitif, ce qui n'est pas possible.

11. On est maintenant en mesure de déterminer la forme qu'un j_3 peut avoir. Soit AB un segment maximal de j_3 tel que $d(AB)$ n'intersecte pas K. D'après imp. b, imp. e et imp. f, ou bien B est point terminal ou bien $\mathfrak{C}$ se poursuit au-delà de B par un segment dirigé vers K. De même pour A. Si $AB \subseteq j_3$ est tel que $d(AB)$ intersecte K [disons que $r(AB)$ intersecte K], alors par imp. c et imp. b, B doit être sur K. Si de plus $d(AB)$ n'est pas tangent à K en B, le segment AB doit se prolonger dans $\mathrm{Int}(K)$ (d'après le § 9), au-delà de B. A peut être terminal. Si A n'est pas terminal, $\mathfrak{C}$ se poursuit au-delà de A par AC, $C \in K$, ou par un AC tel que $d(AC) \subseteq \mathrm{ext}(K)$, le cas considéré plus haut.
On trouve les sept possibilités suivantes pour les j_3 (fig. 10):

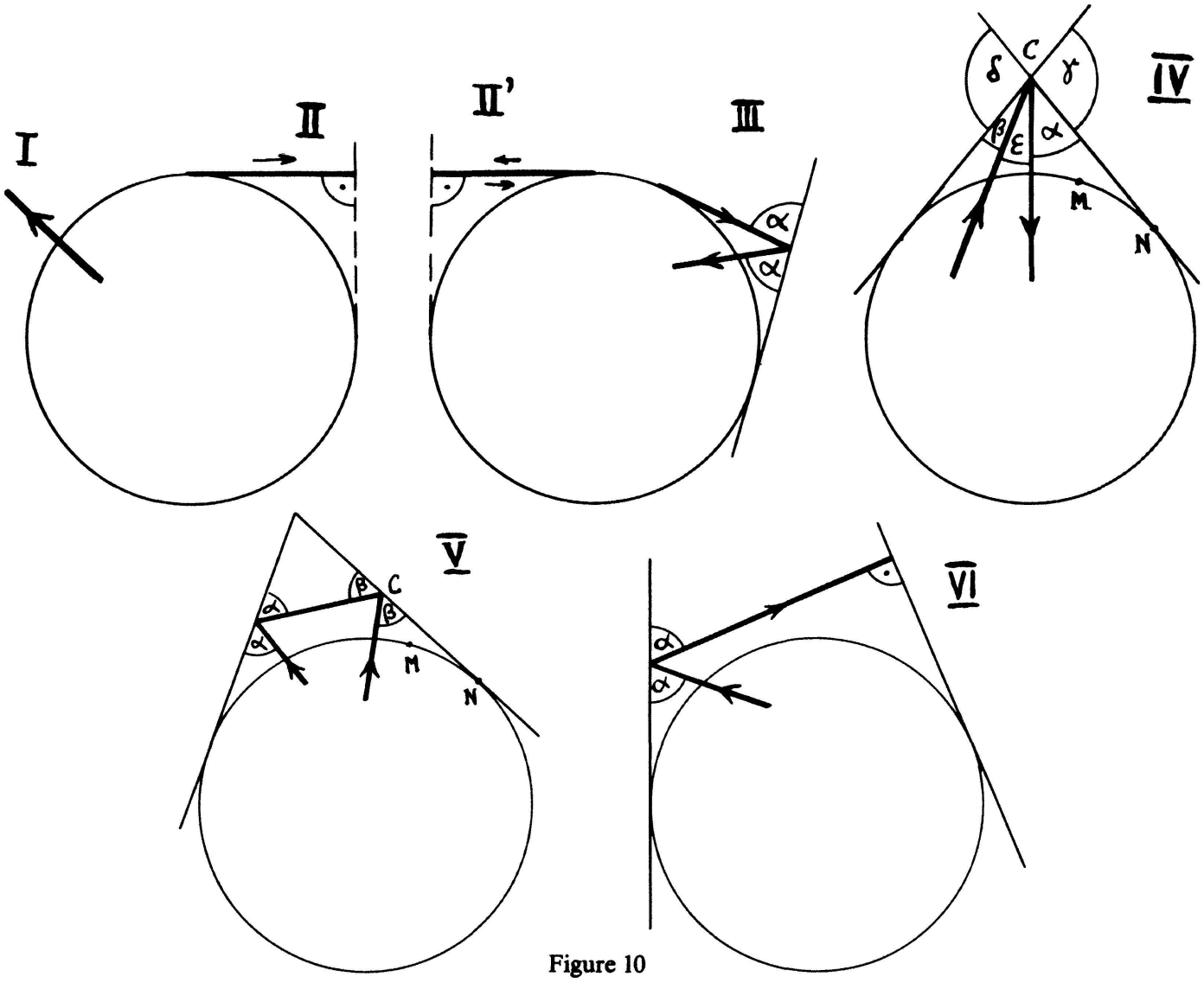

Figure 10

Les prolongations dans l'intérieur de K sont indiquées. Des angles identiques sont indiqués par des lettres identiques. On a aussi indiqué les angles droits.
L'égalité des deux angles β dans le cas V, pour prendre un exemple, est dû au fait élémentaire suivant: si X, Y sont deux points du même côté de la droite d, le chemin le plus court entre X et Y, qui passe par d, consiste en deux segments XZ, YZ avec $Z \in d$, tel que XZ et YZ forment le même angle avec d. (L'explication des angles droits indiqués est encore plus simple.) Dans le cas IV, nous pouvons avoir $\varepsilon = 0$ comme cas limite. On voit facilement que

$$a \leqslant \beta + \delta, \qquad \beta \leqslant a + \gamma. \tag{2}$$

On peu aussi montrer $2\beta + 2a + \varepsilon \geqslant \pi$, mais on n'utilisera pas ce fait.

12. On a montré que les j_1, j_2, j_3 sont des arcs très simples de $\mathfrak{C}$; il nous reste à montrer que des configurations compliquées ne peuvent se produire par des accumulations de j_1, j_2, j_3 sur $K \cap \mathfrak{C}$. Nous montrons d'abord:
Si AB est un j_2 de $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire une corde ou un morceau de corde de K, et $B \in K$, alors B n'est pas point terminal de $\mathfrak{C}$, et la continuation de $\mathfrak{C}$ se fait sur un segment BC; $C \in \operatorname{ext}(K)$, $B \in AC$, c'est-à-dire $\mathfrak{C}$ continue droit en avant sur $d(AB)$. D'abord, si B était terminal, soit $A' \in AB \cap \operatorname{int}(K)$, $\mathfrak{S} = (\mathfrak{C} \setminus A'B) \cup A'$. $\mathfrak{S}$ rencontre toutes les tangentes, sauf peut-être celle de B. Mais comme $\mathfrak{S}$ est fermé, elle rencontre aussi celle de B par continuité, donc $A'B$ serait superflu. De la même façon la suite de $\mathfrak{C}$ ne se fait pas par un autre j_2. Les considérations qui suivent se réfèrent à la figure 11, t est la tangente en B, que nous supposons horizontale. S'il y a un $Y \in \mathfrak{C}$, proprement séparé de K par t, l'affirmation découle du § 9. Autrement il y aura un $Z > B$, tel que $\mathfrak{S} = \{X \in \mathfrak{C} \mid Z \geqslant X \geqslant B\}$ se trouve dans le rectangle $k(PQRW)$, où R, $W \in K$ et $P, Q \in t$, $|QB|$ et $|PB|$ petits. On suppose $\sphericalangle(A'BP) \leqslant \pi/2$. Pour passer de $k(QBTR)$ à $k(PBTW)$, $\mathfrak{S}$ devra passer par B, car $\mathfrak{S}$ ne peut pas croiser $A'B$ à l'intérieur d'après imp. a. Si $\mathfrak{S}$ passe indéfiniment des deux côtés de $A'B$, il doit y avoir une infinité de boucles b, avec départ et arrivée en B,

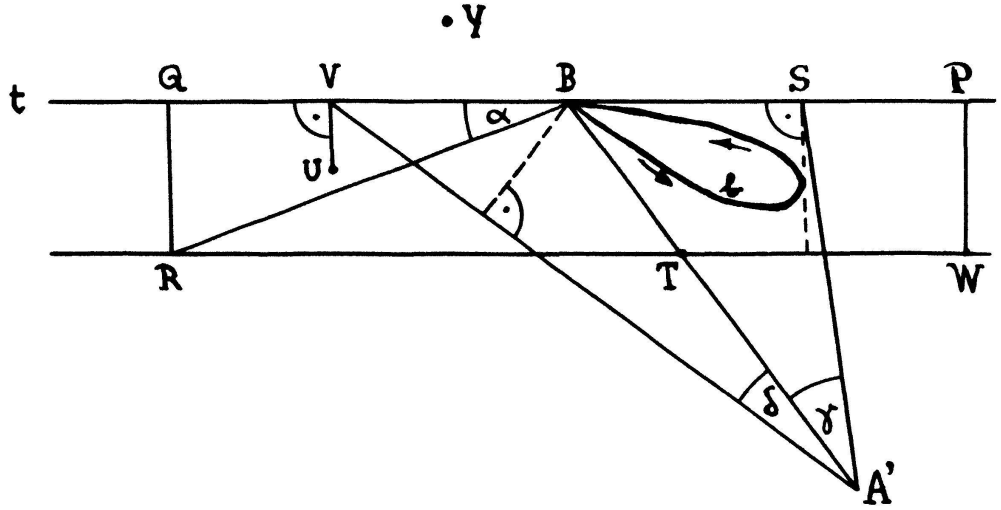

Figure 11

dans $k(PBTW)$. Soit b une telle boucle avec élongation horizontale $|BS|$. Pour BP assez petit, le chemin $A'SB$ est plus court que les chemins $A'B$ et b ensemble, car

$$|A'S|+|BS| \leqslant \frac{|A'B|}{\cos\gamma}+|BS| \leqslant \frac{|A'B|}{\cos\gamma}-|BS|+\text{longueur}\,(b)$$

$$\leqslant \frac{|A'B|}{\cos\gamma}-|A'B|\sin\gamma+\text{longueur}\,(b)<|A'B|+\text{longueur}\,(b)$$

si γ est assez petit. Donc si b est la boucle d'élongation horizontale maximale, on peut remplacer $A'B$ par $A'SB$ et omettre toutes les boucles dans $k(PBTW)$. On peut donc supposer que $\mathfrak{S}$ se trouve entièrement du même côté de $A'B$, disons dans $k(QBTR)$. Mais dans ce cas $\mathfrak{S} \subseteq k(QBR)$. Car si X est un point dans le triangle $k(BTR)$ sans RB, X est sur une corde j_2 qui doit forcément intersecter RW ou BT à l'intérieur, sauf si $\mathfrak{S} \subseteq j_2$, un cas que nous avons déjà exclu. Soit maintenant $U \in \mathfrak{S}$, le plus à gauche pour tout $\mathfrak{S}$. Nous remplaçons $A'B \cup \{X \in \mathfrak{S} \mid U \geqslant X \geqslant B\}$ par $A'VU$, qui rencontre toutes les tangentes rencontrées par $A'B \cup \{X \in \mathfrak{S} \mid U \geqslant X \geqslant B\}$, qui a une longueur $\geqslant |A'B|+|BV|$, tandis que, avec $\omega = \sphericalangle(A'BV)$,

$$\begin{aligned}|AA'V|+|VU| &= |A'B|\cos\delta+|VB|\cos(\pi-\omega-\delta)+|VU| \\ &\leqslant |A'B|\cos\delta+|VB|\,|\cos(\omega+\delta)|+|VB|\,\mathrm{tg}\,a<|A'B|+|VB|\end{aligned}$$

si a et δ sont assez petits. Celà démontre l'affirmation.

13. Chaque $j=j_1$ ou j_3 «couvre» un ensemble de tangentes, dont les points d'intersection avec K forment un arc $P_+(j) \cup P_-(j)$ sur le cercle K. Appelons cet arc $P(j)$. On prétend: *$P(j)$ n'a pas de points intérieurs en commun avec $P(j')$ si $j \neq j'$.* Celà est clair si j ou j' est un j_1, donc un arc de K, car on peut remplacer une partie de ce j_1 par une corde plus courte. Donc soient j et j' des j_3. Clairement $P(j) \not\subseteq P(j')$, autrement j est répétitif. Donc on a une situation comme dans la figure 12. Si j est un j_3 de type V, figure 10, on peut raccourcir en coupant à

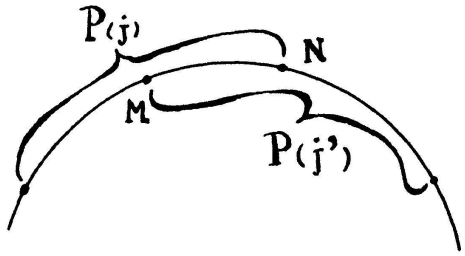

Figure 12

travers l'angle formé par $\mathfrak{C}$ en C. Si j_3 est du type IV, figure 10, on peut faire descendre C le long de la tangente gauche, ce qui donne un raccourcissement, sauf si $\beta = a+\gamma$. Et ainsi de suite. On obtient la situation suivante, comme seule possibilité (fig. 13): j contient le segment $b=BD$, avec $\beta \leqslant \pi/2$, et j' contient le segment $a=AC$ avec $a \leqslant \pi/2$. Comme dans les démonstrations du § 10, si $S=\mathfrak{C}\backslash a\backslash b$, on trouve des points $X, Y, W \in k(S)$ dans les régions angulaires indiquées, pour

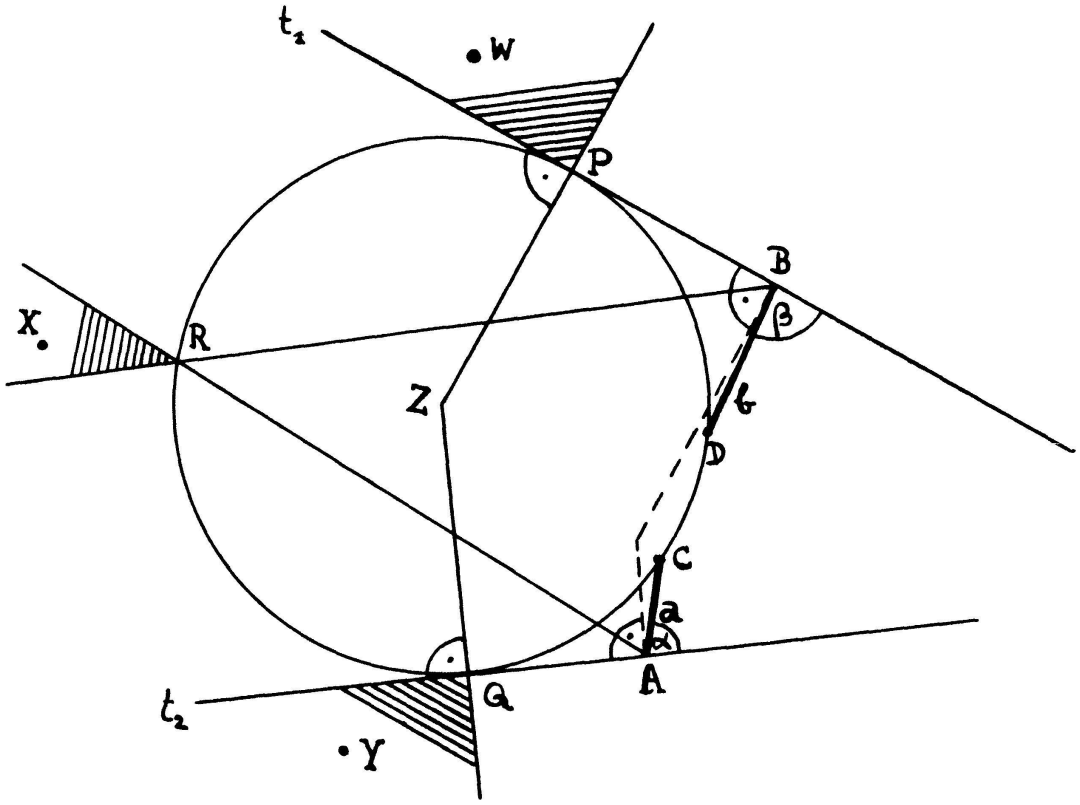

Figure 13

qu'on ait R, Q, P respectivement dans $k(\mathfrak{C})$. Mais alors $a, b \subseteq k(ABWXY)$, et $a \backslash A$ et $b \backslash B$ sont répétitifs, aussi bien que leurs prolongements jusqu'aux tangentes t_1 et t_2 resp., ce qui entraînera forcément un croisement non permis. Observons qu'on a, pour la première fois, utilisé le fait que K est un cercle, ou plutôt que les normales aux tangentes en Q et P se rencontrent en $Z \in \operatorname{int}(K)$. Jusqu'à présent, tout pouvait se faire pour des K lisses, convexes et ne contenant pas de segments droits.

14. On voit facilement, de ce que nous venons d'énoncer, que si $j = j_1$ ou j_3, $\mathfrak{C} \backslash j$ se trouve complètement du même côté que K par rapport à chaque tangente qui touche K en $P(j)$, c'est-à-dire dans la partie non hachurée du plan dans la figure 14.

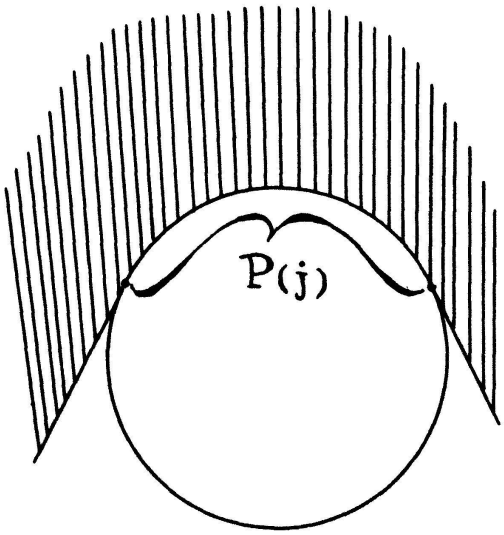

Figure 14

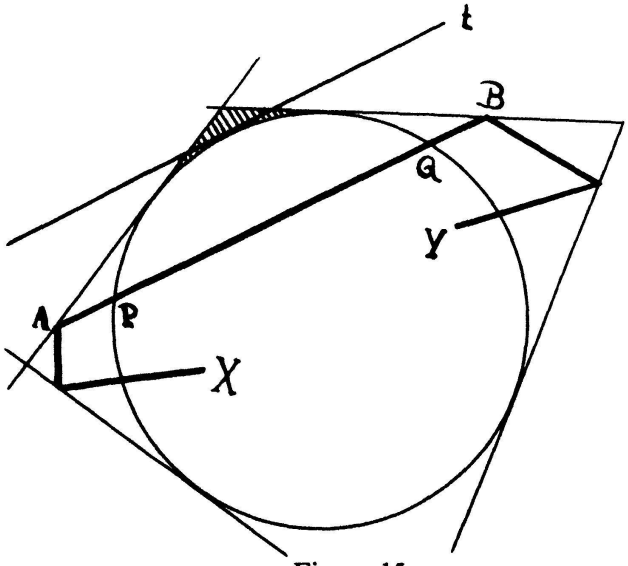

Figure 15

Il s'ensuit que si $AB \subseteq \mathfrak{C}$ est un segment maximal contenant une corde PQ de K, alors ni A ni B n'est terminal, et la continuation de $\mathfrak{C}$ à partir de A et à partir de B ne se fait pas dans le même demi-plan défini par $d(AB)$. Autrement, on aura la situation de la figure 15.
La rencontre de $\mathfrak{C}$ avec la tangente $t \| AB$ doit se faire dans la région hachurée, que $\mathfrak{C}$ ne peut atteindre ni de X ni de Y sans un croisement avec AB.

15. Nous montrons que $\mathfrak{C}$ consiste en un nombre fini de j_1, j_2, j_3. Dans le cas contraire, il existe un $X \in K \cap \mathfrak{C}$, tel que pour tout $Y, Z \in \mathfrak{C}$, $Y < X < Z$, il y a une infinité de j_1, j_2, j_3 entre Y et Z, disons entre Y et X. Supposons qu'il n'y a pas de cordes j_2 dans ce nombre. Alors les j_3 sont du type II′ de la figure 10. Mais chacun de ceux-là a la longueur 2, donc il n'y en a qu'un nombre fini, donc, si Y est assez près de X, il n'y aurait que des j_1, donc $\{W \in \mathfrak{C} \mid Y \leqslant W \leqslant X\}$ serait un arc sur K et appartiendrait à un seul j_1. Donc, il y a un nombre infini de cordes j_2 s'approchant de X. D'après le § 14, cette approche doit se faire en zig-zag, comme en la figure 16. Les j_2 ont une direction presque identique à celle de la tangente t en X. A chaque j_2 on aurait attaché un j_3 de la forme III, IV ou V, figure 10.

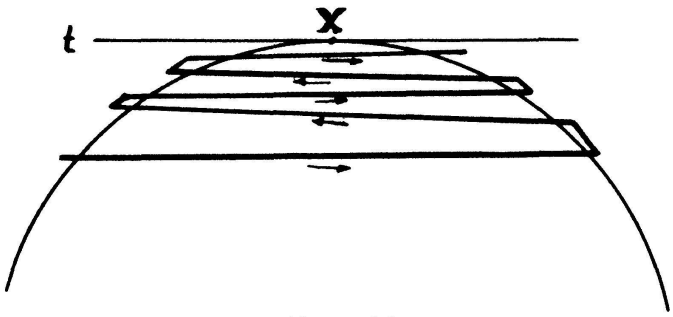

Figure 16

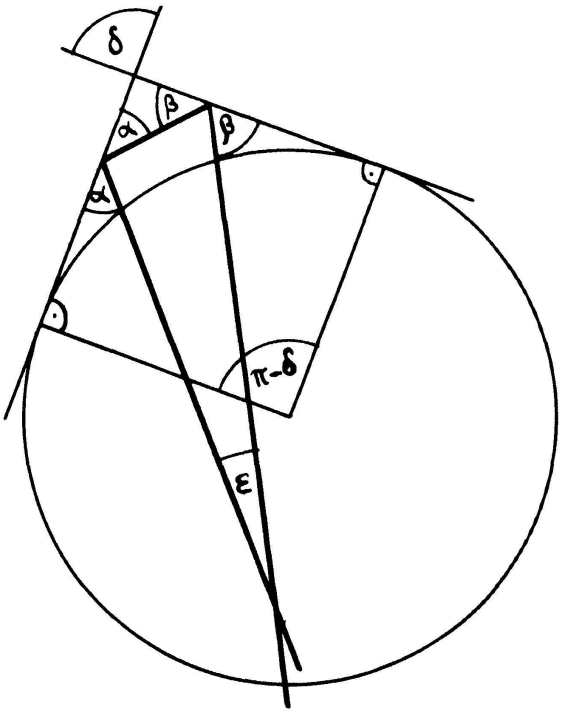

Figure 17

Pour un j_3 de la forme V, on aurait en figure 17, $2\pi = \varepsilon + \delta + \pi - \alpha + \pi - \delta$, donc $\alpha + \beta = \varepsilon + \delta$. Mais $\alpha + \beta = \pi - \delta$, donc $\delta = \pi/2 - \varepsilon/2$; pour $|\varepsilon|$ petit, $\delta \approx \pi/2$, et $P(j_3)$ aurait une longueur $\approx \pi/2$, donc trop grande. De même on aura des contradictions pour des j_3 de type III et IV. On a donc trouvé: $\mathfrak{C}$ *est réunion finie de chemins* j_1, j_2, j_3.

16. *On peut maintenant démontrer les théorèmes 1 et 2.* Dans le théorème 1 on a un point terminal libre, dans le théorème 2 les deux points terminaux sont libres. On voit sans autre qu'un arc j_1 sur K ne peut être chemin terminal de $\mathfrak{C}$. On sait

déjà que les j_2 ne sont pas terminaux, sauf pour le point terminal fixé du théorème 1. Des j_3 du type I ne sont pas terminaux, selon le § 14. Donc, il reste pour terminal libre: les j_3 de type II ou VI.
Soit le segment terminal libre un j_3, type II, donc une tangente de longueur 1. Il peut être suivi d'un j_3, type III, ou d'un arc j_1. Pour le premier cas on a la figure 18. Mais ici on voit que ABC peut être remplacé par BAC, plus court et d'enveloppe convexe égale. Le même argument est valable si $\mathfrak{C}$ se termine par un j_3 de type VI. La seule possibilité est donc une tangente de longueur 1 suivie d'un

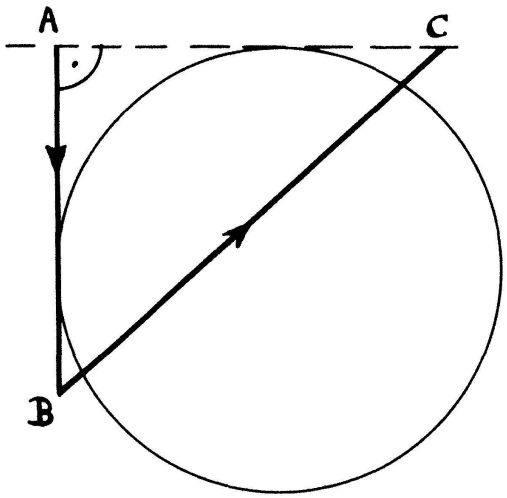

Figure 18

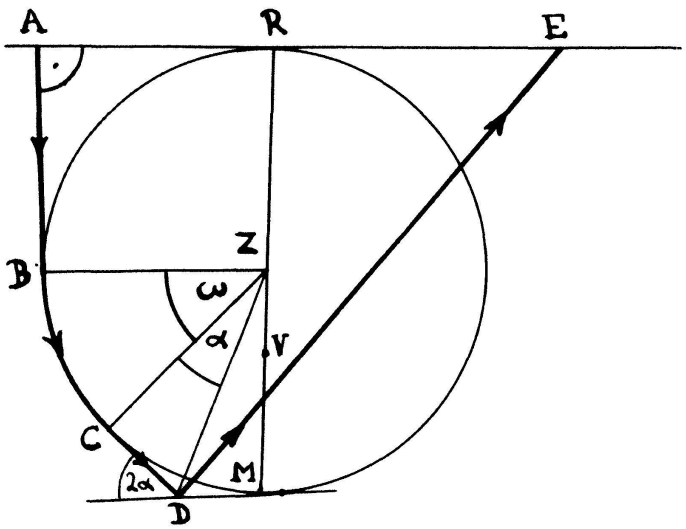

Figure 19

arc. On montre que $\mathfrak{C}$ ne comporte pas de cordes entières. Autrement on prend la première après l'arc. On doit obtenir la figure 19. Soit $a+\omega \leqslant \pi/2$. Si

$$|RE| < \frac{4}{\pi-2} - \frac{\pi-2}{4},$$

on vérifie que le cercle de centre E et de rayon $|ER| + (\pi/2) - 1$ passe par V (sur le diamètre RM), donc

$$|ED| > |ER| + \frac{\pi}{2} - 1. \tag{3}$$

Cela permet de remplacer le chemin $ABCDE$ (BC un arc) par $DCBRE$, avec CBR un arc sur K. La longueur du premier est $1+\omega+\operatorname{tg}a+|DE| > 1+\omega+\operatorname{tg}a+|ER| + (\pi/2)-1 = \omega+\operatorname{tg}a+(\pi/2)+|ER|$ qui est la longueur du deuxième.
Si

$$|RE| \geqslant \frac{4}{\pi-2} - \frac{\pi-2}{4},$$

on considère le théorème 2 d'abord. La longueur du chemin sera au moins

$$|AB|+|BE|>2+|RE|\geqslant 2+\frac{4}{\pi-2}-\frac{\pi-2}{4}>\pi+2,$$

donc plus long que le chemin du théorème.
Pour le théorème 1, la courbe doit revenir sur le centre à partir de E. Donc le chemin sera plus long que $|AB|+|BE|+|EZ|>2(1+|RE|)>2+2\pi$, donc plus long que le chemin du théorème 1.
Soit maintenant $\omega+a>\pi/2$. Pour le théorème 1, on voit que DE barre la route à $\mathfrak{C}$ pour revenir sur le centre. Pour le théorème 2, on commence de l'autre point terminal, mais on aura forcément $\omega'+a'<\pi/2$, d'après le § 14, donc on sera ramené au cas précédent.
Maintenant que l'on sait que le seul j_2 ne peut être que la demi-corde menant au centre, pour le théorème 1, on ne peut donc obtenir autre chose que les chemins décrits dans les théorèmes.
Remarques: a) Le problème qui a été considéré peut être largement généralisé en remplaçant par exemple K par un convexe quelconque, ou les tangentes par des cercles tangents, etc. L'énoncé général du problème: *Dans un espace métrique connexe par arcs, on donne une famille $\mathfrak{F}$ de fermés F, et un ensemble connexe compact K qui intersecte tout $F\in\mathfrak{F}$. Trouver le chemin le plus court qui intersecte tous les F.*
b) En dimensions plus hautes, si E_n est l'espace euclidien de n dimensions, S_{n-1} la sphère unité, l_n la longueur du chemin le plus court qui rencontre tous les hyperplans tangents à S_{n-1}, ou du chemin $\mathfrak{C}$ le plus court avec $S_{n-1}\subseteq k(\mathfrak{C})$, alors par induction on trouve

$$l_3\geqslant\sqrt{\left(2+\sqrt{3}+\frac{7}{6}\pi\right)^2+4}\approx 7{,}6628$$

$$l_n\geqslant \text{const.}+2n.$$

Par construction de chemins particuliers on trouve:

$$l_n\leqslant \text{const.}\, n^{3/2}$$

$$l_3\leqslant 4+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 3\cdot\pi\approx 10{,}6643.$$

Les bornes supérieures me semblent être plus près de la réalité.
c) En espace de Hilbert de dimension infinie, disons $H=l^2$, le cas se présente un peu différemment. Si S est la sphère unité, il n'existe pas de chemin de longueur finie, pas même un chemin compact quelconque $\mathfrak{C}$ tel que $S\subseteq k(\mathfrak{C})$, car $k(\mathfrak{C})$ est compact, mais S ne l'est pas. Il faut donc considérer des ensembles convexes compacts $K\subseteq H$. Dans ce cas, il existe certainement un chemin compact $\mathfrak{C}$, que l'on peut construire facilement, tel que $k(\mathfrak{C})\supseteq K$. [D'après un théorème de Hahn et Mazurkiewicz, il existe même une application continue $f\colon[0,1]\to H$, avec $\operatorname{Im} f=K$ (voir [1])]. Mais cette courbe ne sera généralement pas de longueur finie. Si

$$K=\left\{(x_1,x_2,\ldots)\,|\,\sum_1^\infty j x_j^2\leqslant 1\right\},$$

K est compact et convexe, mais toute courbe $\mathfrak{C}$ avec $k(\mathfrak{C}) \supseteq K$ est de longueur infinie. Si

$$K = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \mid \sum_1^\infty j^{100} x_j^2 \leqslant 1 \right\},$$

il existe $\mathfrak{C}$ de longueur finie avec $k(\mathfrak{C}) \supseteq K$. En plus, on peut démontrer que si K est convexe compact et $\mathfrak{C}$ de longueur finie avec $k(\mathfrak{C}) \supseteq K$, alors il existe une courbe minimale. Cela se fait comme dans le § 3. Il faut simplement montrer que si $\{\mathfrak{C}_n\}$ est une suite minimale de courbes, alors $\bigcup_1^\infty \mathfrak{C}_n$ est relativement compacte.

H. Joris, Genève

BIBLIOGRAPHIE

1 M.H.A. Newman: Elements of the topology of plane sets of points, p. 89–92, Cambridge 1964.

Kleine Mitteilungen

Parabeln mit gemeinsamem isotropem Krümmungskreis

Nach Kickinger [2] liegen die Brennpunkte der Parabeln mit gemeinsamem Krümmungskreis k auf einem Kreis, der k im Oskulationspunkt von innen berührt und dessen Durchmesser gleich dem halben Radius von k ist. Im folgenden zeigen wir, dass dieser Sachverhalt sinngemäss auch in der isotropen Geometrie zutrifft.

1. Wir gehen von einem isotropen Kreis j aus, dessen Darstellung o. B. d. A. zu

$$\boldsymbol{y} = \tau \boldsymbol{r}_1 + \frac{\tau^2}{2} \boldsymbol{r}_2 \tag{1}$$

gewählt sei, wobei $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ linear unabhängige reelle Vektoren sind und τ ein reeller Parameter von j sei. Der Vektor $\boldsymbol{r}_2$ gibt dabei die *isotrope Richtung* der sich – im Sinne von F. Kleins «Erlanger Programm» – auf die Gruppe G_5 der isotropen Ähnlichkeiten stützenden isotropen Ebene an. Für eine Einführung in die isotrope Geometrie sei auf die elementare Darstellung von Strubecker [4] verwiesen.
Im affinen Koordinatensystem $\{\boldsymbol{o}; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ haben wir gemäss (1) für das j im Punkte $\tau = 0$ oskulierende Kegelschnittnetz

$$x_1^2 + a x_2^2 + 2\beta x_1 x_2 - 2 x_2 = 0, \qquad a, \beta \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

dessen Parabeln $P(\beta)$ sich für $a = \beta^2$ ergeben.