

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 34 (1979)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die auf dem Intervall  $[-x_{i+1}, -\zeta]$  definierte Funktion  $g_3(x) := g_2(-x)$  erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Hilfssatzes, also ist  $\{(x + x_{i+1})g_3(x) \mid -x_{i+1} \leq x \leq -\zeta\}$  ein Intervall, folglich nach (4) auch  $v([\zeta, x_{i+1}])$ .

Die Intervalle  $v([x_{i-1}, \zeta])$  und  $v([\zeta, x_{i+1}])$  enthalten nach (4) beide die Null. Damit ist ihre Vereinigung  $v([x_{i-1}, x_{i+1}])$  ebenfalls ein Intervall, also der Satz bewiesen.

A. Mrose, FU Berlin, I. Math. Inst.

W. Ripka, Lörrach

## Kleine Mitteilungen

### Berandete 2-Mannigfaltigkeiten aus zwei ebenen Polygonen

Geschlossene nichtorientierbare 2-Mannigfaltigkeiten wie z.B. projektive Ebene oder Kleinsche Flasche lassen sich bekanntlich nicht durchdringungsfrei in den dreidimensionalen euklidischen Raum  $E^3$  einbetten, während dies für berandete wie das Möbiusband ohne weiteres möglich ist.

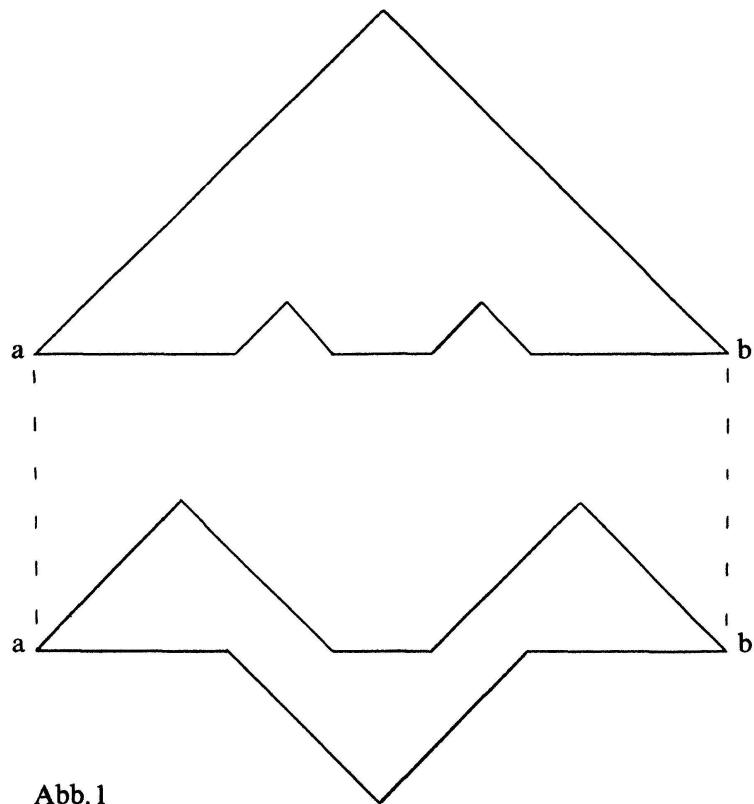


Abb. 1

Berandete 2-Mannigfaltigkeiten lassen sich sogar in zwei sich schneidende Ebenen des  $E^3$  einbetten. Für orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten scheint diese ebenso einfache wie überraschende Eigenschaft schon länger bekannt zu sein; für nichtorientierbare offenbar nicht.

**Satz.** *Jede berandete topologische 2-Mannigfaltigkeit lässt sich durch zwei ebene Polygone (durchdringungsfrei) im  $E^3$  darstellen.*

D.h. für die Mannigfaltigkeit  $M$  und die Polygone  $P_1, P_2$  gilt:  $\text{set}(P_1 \cup P_2)$  homöomorph zu  $M$ . Dabei ist ein ebenes Polygon eine zusammenhängende kompakte Teilmenge der euklidischen Ebene, deren Randmenge aus endlich vielen Strecken besteht.

Beweis: Es genügt offenbar, Mannigfaltigkeiten mit einer Randkomponente zu betrachten. Wie üblich seien  $\chi$  bzw.  $g$  die Eulercharakteristik bzw. das Geschlecht der 2-Mannigfaltigkeit  $M$ . Der Beweis erfolgt durch Angabe einer Konstruktion mit den erforderlichen Eigenschaften.

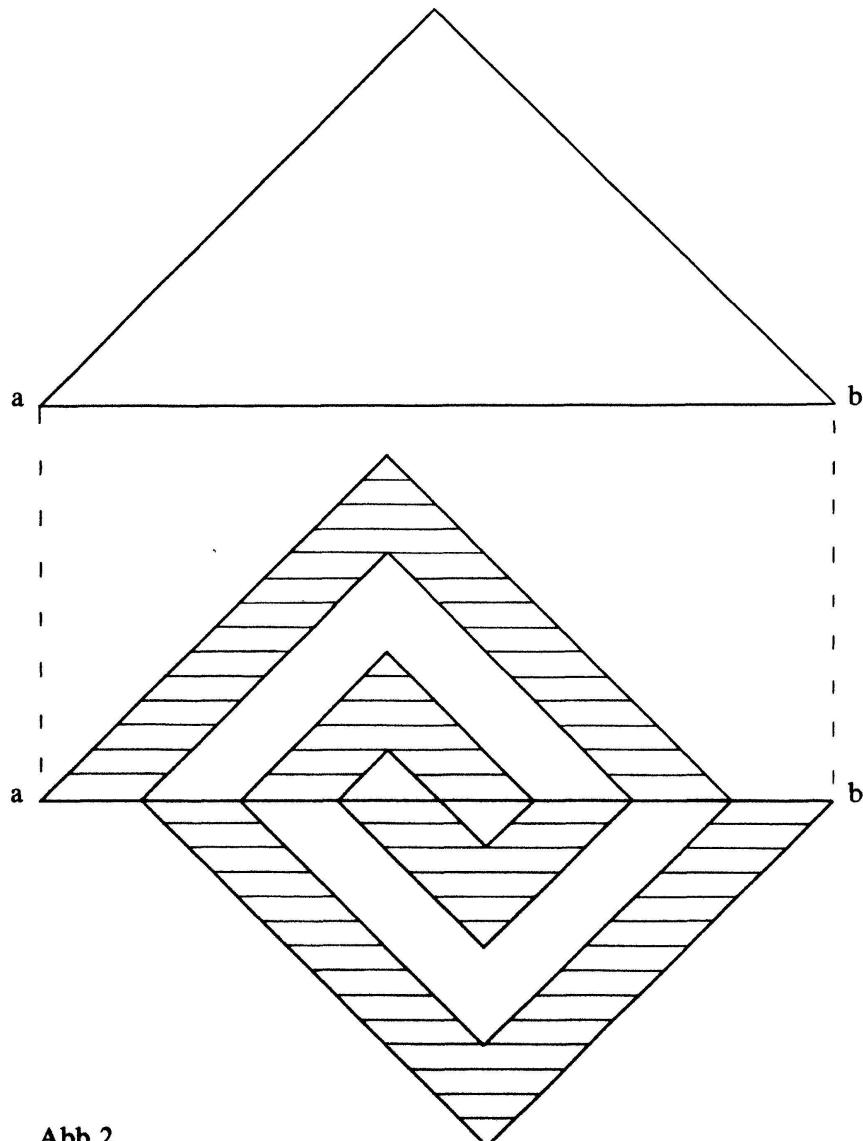


Abb.2

1. Sei  $M$  nichtorientierbar (Abb. 1 mit  $g=2$ ). Das obere Polygon in Abb. 1 ist ein Dreieck, bei dem an der Seite ab  $g$  Dreiecke ausgespart sind.

Das untere Polygon besteht aus  $g+1$  längs der Strecke  $ab$  zueinander versetzten Dreiecken. Beide Polygone haben je  $3g+3$  Ecken und Kanten.

Werden beide Polygone längs der Strecke  $ab$  verheftet, so fallen  $2g+2$  Ecken und  $g+1$  Kanten zusammen. Man erhält eine nichtorientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente,  $4g+4$  Ecken,  $5g+5$  Kanten und zwei Polygone.

Mit dem Satz von Euler folgt wie verlangt:

$$\chi(M) = 4g+4 - (5g+5) + 2 = 1 - g.$$

2. Sei  $M$  orientierbar und  $g > 0$  (Abb. 2 mit  $g=2$ ). Das untere Polygon in Abb. 2 besteht aus  $2g$  Sechsecken, die längs der Strecke  $ab$  zueinander versetzt sind. Das obere Polygon ist ein Dreieck, das mit dem unteren längs  $ab$  verheftet wird.

Man erhält eine orientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente,  $8g+2$  Ecken,  $12g+2$  Kanten und  $2g+1$  Polygonen (von denen  $2g$  in einer Ebene liegen). Mit dem Satz von Euler folgt wie verlangt:

$$\chi(M) = 8g+2 - (12g+2) + 2g+1 = 1 - 2g.$$

J. M. Wills, Math. Inst. GH Siegen, BRD

## Aufgaben

### Aufgabe 801. Unter den Voraussetzungen

$$0 < A < a < b < B, \quad (1)$$

$$0 < m < 1, \quad (2)$$

$$a^m \cdot b^{1-m} = A^{m'} \cdot B^{1-m'} \quad (3)$$

gilt die Ungleichung

$$ma + (1-m)b < m'A + (1-m')B. \quad (4)$$

Dies ist zu beweisen.

R. Boutellier, Zürich