Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 34 (1979)

Heft: 2

Artikel: Die Intervalleigenschaft der Ober- und Untersummenmengen einer beschränkten Funktion

Autor: Mrose, A. / Ripka, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33800

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$m=2$ ist). Also gibt es ein h, so dass $M(hx^2)\neq 0$, ebenso gibt es ein k, so dass $M(k2^x)\neq 0$ ist (da die Folge (2^x) nicht gleichverteilt mod 5 ist). Deshalb gilt nicht für jedes Paar $(h,k)\in J^2$, dass $M(hx^2+k2^x)=0$ ist (II, III).

L. Kuipers, Mollens

LITERATURVERZEICHNIS

1 G.J. Rieger: Bemerkungen über gewisse nichtlineare Kongruenzen. El. Math. *32*, 113–115 (1977).
2 L. Kuipers und H. Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences, 1974.
3 L. Kuipers und Jau-shyong Shiue: Asymptotic Distribution modulo m of Sequences of Integers and the Notion of Independence. Atti Accad. naz. Lincei, Mat. Ser. VIII, *XI*, 63–90 (1973).
4 L. Kuipers und H. Niederreiter: Asymptotic Distribution mod m and Independence of Sequences of Integers I, II. Proc. Japan Accid. *50*, Nr. 4, 256–265 (1974).

Die Intervalleigenschaft der Ober- und Untersummenmengen einer beschränkten Funktion

Zur Definition der Riemann-Integrierbarkeit einer auf einem Intervall $[a,b]$ beschränkten, reellwertigen Funktion f geht man gewöhnlich von Untersummen

$$\sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$$

und den entsprechend mit den Suprema gebildeten Obersummen aus. Werden hierbei alle endlichen Zerlegungen $\{x_1=a<x_2<\cdots<x_n=b\}$ $(n\geq 2)$ zugelassen, so erhält man die Mengen $\mathfrak{U}$ aller Untersummen bzw. $\mathfrak{O}$ aller Obersummen bezüglich f und $[a,b]$.
Für die Frage nach der Riemann-Integrierbarkeit werden $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{O}$ bekanntlich nur auf die Übereinstimmung von $\sup\mathfrak{U}$ und $\inf\mathfrak{O}$ hin untersucht. Es soll im folgenden die Beschaffenheit der Mengen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{O}$ unabhängig von der Existenz des Riemann-Integrals untersucht werden. Betrachtet man einpunktige Mengen als (entartete) Intervalle, so gilt nämlich:

Satz. *Sei f eine auf dem Intervall $[a,b]$ reellwertige, nach unten beschränkte Funktion. Dann bildet die Menge aller zugehörigen Untersummen ein Intervall.*

Entsprechendes gilt für $\mathfrak{O}$ im Falle einer nach oben beschränkten Funktion. Die Beschränktheit von f nach unten bzw. oben wurde vorausgesetzt, weil andernfalls die Mengen $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{O}$ leer wären.
Zum Beweis des Satzes benötigen wir den

Hilfssatz. *Sei g eine auf $[a,b]$ monoton fallende Funktion mit $g(b) \geq 0$. Dann ist $\{(x-a)g(x) \mid x \in [a,b]\}$ ein Intervall.*

Beweis des Hilfssatzes: O.B.d.A. kann $a=0$, $b=1$ angenommen werden. Dann ist zu zeigen, dass $h(x) := x\,g(x)$ das Intervall $[0, 1]$ auf ein Intervall abbildet.
Für konstantes h ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, ein Wert t im Inneren des Intervalls $[\inf h, \sup h]$ werde von h nicht angenommen und führen dies auf einen Widerspruch.
Sei

$$A := \{x \mid h(x) < t\},$$

K die Vereinigung aller Intervalle $[0,a]$, $a \geq 0$, die ganz in A liegen. Wegen $h(0)=0$ und $t>0$ ist $0 \in A$, also $K \neq \emptyset$. Es sei $m := \sup K$.
Falls $m=0$, also $K=\{0\}$ ist, liegen wegen der Definition von A in jeder Umgebung von 0 Punkte x mit $h(x) \geq t$, so dass aus $t>0$ die Unstetigkeit von h in $x=0$ folgen würde. Wegen der Beschränktheit von g ist $h(x) = x\,g(x)$ aber in $x=0$ stetig, so dass der Fall $m=0$ nicht eintreten kann; m ist demnach positiv.
Nach Definition von m ist

$$[0,m) \subset A\,. \tag{1}$$

Für jedes $x \in (0,m)$ ist daher wegen der Monotonie von g

$$g(m) \leq g(x) = \frac{h(x)}{x} < \frac{t}{x},$$

so dass auch $g(m) \leq t/m$ folgt. Es muss sogar $g(m) < t/m$ gelten, da sonst $t = h(m)$ im Widerspruch zur Annahme über t folgen würde. Somit ist für ein genügend kleines positives δ

$$g(m) < \frac{t}{m+\delta}.$$

Daher gilt für alle $x \in [m, m+\delta]$

$$g(x) \leq g(m) < \frac{t}{m+\delta} \leq \frac{t}{x},$$

also $[m, m+\delta] \subset A$.
Zusammen mit (1) folgt $[0, m+\delta] \subset A$, im Widerspruch zur Definition von m. Unsere obige Annahme ist demnach falsch, so dass h jeden Wert im Inneren des Intervalls $[\inf h, \sup h]$ annehmen muss. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.
Zum Beweis des obigen Satzes betrachten wir für $n \geq 2$ die Menge $\mathfrak{U}_n$ derjenigen Untersummen von f, die man erhält, wenn man nur Zerlegungen mit höchstens n Teilpunkten zulässt. Wegen

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{U}_n, \qquad \mathfrak{U}_n \subset \mathfrak{U}_{n+1} \qquad (n \geq 2)$$

genügt es offenbar zu zeigen, dass $\mathfrak{U}_n$ für jedes $n \geq 2$ ein Intervall ist. Dies beweisen wir durch vollständige Induktion bezüglich n.
Für $n=2$ ist die Behauptung trivialerweise richtig; denn man hat dann nur die aus den beiden Intervallendpunkten a und b bestehende Zerlegung, also ist $\mathfrak{U}_2$ das Intervall $\{(b-a)\inf f\}$.
Nehmen wir also an, für ein $n \geq 2$ sei $\mathfrak{U}_n$ ein Intervall. Sei P eine beliebige, aber feste Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit genau $n+1$ Teilpunkten $a=x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}=b$ und $u \in \mathfrak{U}_{n+1}$ die zugehörige Untersumme bezüglich f. Wegen $n \geq 2$ enthält P einen von a und b verschiedenen Teilpunkt x_i, also sind $x_{i-1}, x_{i+1} \in P$. Wir betrachten für $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$ die Zerlegung P_x, die aus P dadurch entsteht, dass x_i durch x ersetzt wird.
Wir definieren

$$g_1(x) := \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x} f(\xi) - \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}} f(\xi)$$

$$g_2(x) := \inf_{x \leq \xi \leq x_{i+1}} f(\xi) - \inf_{x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}} f(\xi)$$

und

$$v(x) := (x - x_{i-1}) g_1(x) + (x_{i+1} - x) g_2(x).$$

Dann gilt für die zu P_x gehörige Untersumme $u(x)$

$$u(x) = u(x_i) - v(x_i) + v(x). \tag{2}$$

Wir werden jetzt durch Anwendung des Hilfssatzes zeigen, dass $v([x_{i-1}, x_{i+1}])$ ein Intervall ist. Da dann nach (2) auch $u([x_{i-1}, x_{i+1}])$ ein Intervall ist, welches $u(x_{i-1}) \in \mathfrak{U}_n$ und $u(x_i) \in \mathfrak{U}_{n+1}$ enthält, ist dann der Beweis des Satzes erbracht.
Nach Definition von g_1 und g_2 folgt

$$\min\{g_1(x), g_2(x)\} = 0 \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}), \tag{3}$$

also existiert, da g_1 monoton fallend und g_2 monoton steigend ist, ein ζ mit $x_{i-1} \leq \zeta \leq x_{i+1}$ so, dass

$$g_1(x) = 0 \qquad (\zeta < x \leq x_{i+1}),$$
$$g_2(x) = 0 \qquad (x_{i-1} \leq x < \zeta).$$

Wegen (3) ist wenigstens einer der beiden Werte $g_1(\zeta), g_2(\zeta)$ Null. O.B.d.A. kann $g_1(\zeta)=0$ angenommen werden - sonst betrachte man die Funktion $f(x_{i-1}+x_{i+1}-x)$ anstelle von f. Somit gilt

$$v(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1}) g_1(x) & (x_{i-1} \leq x < \zeta) \\ (x_{i+1} - x) g_2(x) & (\zeta \leq x \leq x_{i+1}). \end{cases} \tag{4}$$

Nun muss $I := v([x_{i-1}, \zeta))$ ein Intervall sein; denn sonst gäbe es ein $\eta \notin I$ und ein $\eta^* = v(\zeta^*) \in I$ mit $0 = \min I < \eta < \eta^* \leq \sup I$. Nach dem Hilfssatz folgt aber $[0, \eta^*) \subset v([x_{i-1}, \zeta^*])$.

Die auf dem Intervall $[-x_{i+1}, -\zeta]$ definierte Funktion $g_3(x):=g_2(-x)$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Hilfssatzes, also ist $\{(x+x_{i+1})g_3(x) \mid -x_{i+1} \leq x \leq -\zeta\}$ ein Intervall, folglich nach (4) auch $v([\zeta, x_{i+1}])$.
Die Intervalle $v([x_{i-1}, \zeta))$ und $v([\zeta, x_{i+1}])$ enthalten nach (4) beide die Null. Damit ist ihre Vereinigung $v([x_{i-1}, x_{i+1}])$ ebenfalls ein Intervall, also der Satz bewiesen.

A. Mrose, FU Berlin, I. Math. Inst.
W. Ripka, Lörrach

Kleine Mitteilungen

Berandete 2-Mannigfaltigkeiten aus zwei ebenen Polygonen

Geschlossene nichtorientierbare 2-Mannigfaltigkeiten wie z. B. projektive Ebene oder Kleinsche Flasche lassen sich bekanntlich nicht durchdringungsfrei in den dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 einbetten, während dies für berandete wie das Möbiusband ohne weiteres möglich ist.

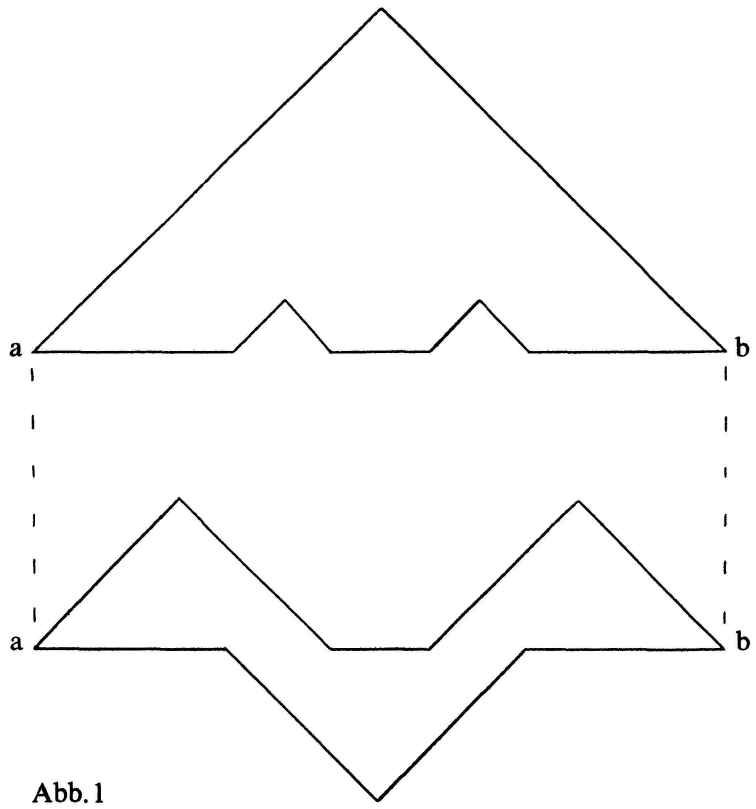

Abb. 1