

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 34 (1979)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Einige Bemerkungen zu einer Arbeit von G.J. Rieger  
**Autor:** Kuipers, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33799>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Einige Bemerkungen zu einer Arbeit von G. J. Rieger

In [1] beweist G.J. Rieger den folgenden Satz.

**Satz 1.** Es sei  $s \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq j \leq s$ ),  $b_j \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq j \leq s$ ),  $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(m, b_1 \dots b_s a) = 1$ ,  $h(m) = [g(b_1; m), \dots, g(b_s; m)]$ ; für  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq x < [m, h(m)]$  liefert  $a_1 b_1^x + \dots + a_s b_s^x + ax$  jeden Rest mod  $m$  gleich oft und damit genau  $[m, h(m)]/m$ -mal. [Hier ist  $g(b_j; m)$  die kleinste Zahl aus  $\mathbb{N}$  mit  $b_j^{g(b_j; m)} \equiv 1 \pmod{m}$ .]

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir einen ähnlichen Satz:

**Satz 2.** Es sei  $s \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq j \leq s$ ),  $b_j \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq j \leq s$ ),  $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$ ,  $(m, h(b_1; m) \dots h(b_s; m)a) = 1$ . Dann ist für  $j = 1, \dots, s$  die Folge  $(ax + a_j b_j^x)$ ,  $x = 1, 2, \dots$  gleichverteilt mod  $m$ . Sind überdies die Zahlen  $h(b_1; m), \dots, h(b_s; m)$  relativ prim, dann ist die Folge  $(ax + a_1 b_1^x + \dots + a_s b_s^x)$ ,  $x = 1, 2, \dots$  gleichverteilt mod  $m$ . [Hier ist  $h(b_j; m)$  die (kleinste) Periode der Reste mod  $m$  der Folge  $(b_j^x)$ .]

Beispiel: Es sei  $m = 14$ . Dann hat man für  $b = 2, \dots, 13$  bzw.  $h(b^x; m) = 3, 4, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 6, 3, 6, 2$ . Satz 1 impliziert die Gleichverteilung mod 14 jeder der Folgen  $(ax + a_j b_j^x)$ ,  $b_j = 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13$ . Satz 2 gibt die Gleichverteilung mod 14 jeder der Folgen  $(ax + a_j b_j^x)$ ,  $b_j = 2, 7, 8, 9, 11$ . In den Fällen  $b_j = 4, 6, 10, 12$  kann man nicht entscheiden auf Grund der Sätze 1 und 2 [jedoch sind diese Folgen gleichverteilt mod 14 (!)]. Satz 1 impliziert auch noch die Gleichverteilung mod 14 der Folgen  $(ax + a_1 3^x + a_2 5^x + a_3 7^x + a_4 9^x + a_5 11^x + a_6 13^x)$ , und kraft des Satzes 2 hat man die Gleichverteilung mod 14 der Folgen  $(ax + a_1 2^x + a_2 7^x + a_3 8^x + a_4 9^x)$ .

Für den Beweis des Satzes 2 benutze ich die nachfolgenden Behauptungen (I, ..., V). Zuerst seien einige Definitionen formuliert.

Es sei  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$ ,  $(f(n))$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eine Folge von ganzen rationalen Zahlen. Die Menge  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  wird mit  $J$  bezeichnet. Man definiert für  $j \in J$ :

$$a(j) = E(f, j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Kard} \{n \mid 1 \leq n \leq N, f(n) \equiv j \pmod{m}\},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Es existiere auch der entsprechende Grenzwert  $\beta(j)$  relativ einer zweiten Folge  $(g(n))$ . Weiter sei  $\gamma(j, k) = E(f, j; g, k)$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Kard} \{n \mid 1 \leq n \leq N; f(n) \equiv j, g(n) \equiv k \pmod{m}\},$$

angenommen, dass der Grenzwert existiert.

Ist für alle  $j \in J$  (alle  $(j, k) \in J^2$ )  $a(j) = 1/m$  ( $\gamma(j, k) = 1/m^2$ ), dann heisst die Folge  $(f(n))$   $[(f(n), g(n))]$  gleichverteilt mod  $m$  in  $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^2)$ .

Die Folgen  $(f(n))$  und  $(g(n))$  heissen unabhängig mod  $m$  in  $\mathbb{Z}$ , wenn für alle  $j, k \in J$

$$E(f, j; g, k) = E(f, j) E(g, k) \quad (\text{oder } \gamma(j, k) = a(j) \beta(k))$$

ist.

Schliesslich setze man für  $h \in J$ :

$$M(hf) = M(e^{2\pi i hf(n)/m}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i hf(n)/m},$$

falls dieser Grenzwert existiert ([2], Chap. 5).

Jetzt folgen die oben angekündigten Behauptungen.

I. Die Folgen  $(f(n))$  und  $(g(n))$  sind unabhängig mod  $m$  genau dann, wenn für alle  $h, k \in J$ :

$$M(hf + kg) = M(hf)M(kg) \quad ([3], \text{Prop. 2.2}).$$

II. Die Folge  $(f(n))$  ist gleichverteilt mod  $m$  in  $\mathbf{Z}$  genau dann, wenn  $M(hf) = 0$  für  $h = 1, 2, \dots, m-1$  ([2], Chap. 5, Th. 1.2).

III. Die Folge  $(f(n), g(n))$  ist gleichverteilt mod  $m$  in  $\mathbf{Z}^2$  genau dann, wenn  $M(hf + kg) = 0$  für alle  $h, k \in J^2$  mit  $(h, k) \neq (0, 0)$ .

IV. Es seien die Folgen  $(f(n))$  und  $(g(n))$  unabhängig mod  $m$ , und es sei die Folge  $(f(n))$  gleichverteilt mod  $m$ . Dann ist auch die Folge  $(f(n) + g(n))$  gleichverteilt mod  $m$  ([3], Prop. 2.3).

V. Es seien die Folgen  $(f(n))$  und  $(g(n))$  unabhängig mod  $m$ . Dann sind für jedes Paar  $(h, k) \in \mathbf{Z}^2$  die Folgen  $(hf(n))$  und  $(kg(n))$  unabhängig mod  $m$  ([3], Prop. 1.7, oder [4], Th. 2).

Beweis von Satz 2: Erstens sind unter der Bedingung  $(m, h(b_j; m)) = 1$  die Folgen  $(x)$  und  $(b_j^x)$  unabhängig mod  $m$ , denn für jedes Paar  $(t, u) \in \mathbf{Z}^2$  hat man

$$E(x, t; b_j^x, u) = E(x, t)E(b_j^x, u). \quad (*)$$

Gibt es kein  $u$ , für welches  $b_j^x \equiv u \pmod{m}$  für irgendein  $x \in \mathbf{N}$ , dann sind die beiden Glieder von  $(*)$  gleich 0; ist für irgendein  $x$  die Kongruenz  $b_j^x \equiv u \pmod{m}$  erfüllt, dann ist jede Seite von  $(*)$  gleich  $1/(mh(b_j; m))$ .

Zweitens sind auch die Folgen  $(ax)$  und  $(a_j b_j^x)$  unabhängig mod  $m$  (V).

Drittens ist für  $(a, m) = 1$  die Folge  $(ax)$  gleichverteilt mod  $m$ . Deshalb hat auch die Folge  $(ax + a_j b_j^x)$  diese Eigenschaft (IV). Die Periode (mod  $m$ ) der letztgenannten Folge ist gleich  $mh(b_j; m)$ , und da  $(mh(b_j; m), h(b_k; m)) = 1$  ist für  $j \neq k$ , sind auch die Folgen  $(ax + a_j b_j^x)$  und  $(a_k b_k^x)$  unabhängig mod  $m$ ; deshalb ist auch die Folge  $(ax + a_j b_j^x + a_k b_k^x)$  gleichverteilt mod  $m$  usw.

Bemerkung 1: Die Bedingungen in Behauptung IV, dass  $(f(n))$  und  $(g(n))$  unabhängig mod  $m$  sind, ist keineswegs eine notwendige.

Beispiel: Die Folgen  $(x)$  und  $(5^x)$ ,  $x = 1, 2, \dots$  sind nicht unabhängig mod  $b$ . Dennoch ist die Folge  $(x + 5^x)$  gleichverteilt mod 6 (Satz 1).

Bemerkung 2 ([1], Schluss): Die Folge  $(x^2 + 2^x)$  ist nicht gleichverteilt mod 5. Erstens sind die Folgen  $(x^2)$  und  $(2^x)$  unabhängig mod 5. Zweitens ist die Folge  $(x^2)$  nicht gleichverteilt mod 5 (die Folge  $(x^2)$  ist genau dann gleichverteilt mod  $m$ , wenn

$m=2$  ist). Also gibt es ein  $h$ , so dass  $M(hx^2) \neq 0$ , ebenso gibt es ein  $k$ , so dass  $M(k2^x) \neq 0$  ist (da die Folge  $(2^x)$  nicht gleichverteilt mod 5 ist). Deshalb gilt nicht für jedes Paar  $(h, k) \in J^2$ , dass  $M(hx^2 + k2^x) = 0$  ist (II, III).

L. Kuipers, Mollens

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G.J. Rieger: Bemerkungen über gewisse nichtlineare Kongruenzen. El. Math. 32, 113–115 (1977).
- 2 L. Kuipers und H. Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences, 1974.
- 3 L. Kuipers und Jau-shyong Shiue: Asymptotic Distribution modulom of Sequences of Integers and the Notion of Independence. Atti Accad. naz. Lincei, Mat. Ser. VIII, XI, 63–90 (1973).
- 4 L. Kuipers und H. Niederreiter: Asymptotic Distribution modm and Independence of Sequences of Integers I, II. Proc. Japan Accid. 50, Nr. 4, 256–265 (1974).

## Die Intervalleigenschaft der Ober- und Untersummenmengen einer beschränkten Funktion

Zur Definition der Riemann-Integrierbarkeit einer auf einem Intervall  $[a, b]$  beschränkten, reellwertigen Funktion  $f$  geht man gewöhnlich von Untersummen

$$\sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

und den entsprechend mit den Suprema gebildeten Obersummen aus. Werden hierbei alle endlichen Zerlegungen  $\{x_1 = a < x_2 < \dots < x_n = b\}$  ( $n \geq 2$ ) zugelassen, so erhält man die Mengen  $\mathfrak{U}$  aller Untersummen bzw.  $\mathfrak{O}$  aller Obersummen bezüglich  $f$  und  $[a, b]$ .

Für die Frage nach der Riemann-Integrierbarkeit werden  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{O}$  bekanntlich nur auf die Übereinstimmung von  $\sup \mathfrak{U}$  und  $\inf \mathfrak{O}$  hin untersucht. Es soll im folgenden die Beschaffenheit der Mengen  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{O}$  unabhängig von der Existenz des Riemann-Integrals untersucht werden. Betrachtet man einpunktige Mengen als (entartete) Intervalle, so gilt nämlich:

**Satz.** Sei  $f$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  reellwertige, nach unten beschränkte Funktion. Dann bildet die Menge aller zugehörigen Untersummen ein Intervall.

Entsprechendes gilt für  $\mathfrak{O}$  im Falle einer nach oben beschränkten Funktion. Die Beschränktheit von  $f$  nach unten bzw. oben wurde vorausgesetzt, weil andernfalls die Mengen  $\mathfrak{U}$  bzw.  $\mathfrak{O}$  leer wären.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den