

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1979)
Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. Remarks

a) One can show by induction that if A_1, A_2, \dots, A_n are n points in space with weights m_1, m_2, \dots, m_n such that $s_n = \sum m_i \neq 0$ then for any point M in space

$$\sum_{i=1}^n m_i \overline{MA_i}^2 = s_n \overline{MA}^2 + \frac{1}{s_n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \overline{A_i A_j}^2 \quad (17)$$

where (with the appropriate convention)

$$A = \frac{1}{s_n} (m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n).$$

This makes it possible to extend our method to higher dimensions.

b) The 'continuous' analogue of (17) is

$$\left[\int_a^b p(x) dx \right] \left[\int_a^b p(x) f^2(x) dx \right] = \left[\int_a^b p(x) f(x) dx \right]^2 \\ + \iint_{a \leq u < v < b} p(u) p(v) [f(v) - f(u)]^2 du dv$$

provided that the various integrals exist, and,

$$\int_a^b p(x) dx \neq 0.$$

Faruk F. Abi-Khuzam, American University, Beirut

REFERENCES

- 1 N.A. Court: College Geometry. Barnes and Noble, New York 1952.
- 2 R. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications, New York 1960.
- 3 A.H. Stone: Am. Math. Monthly 81, 1026 (1974).

Kleine Mitteilungen

Kreispackung in Quadraten

1. Diese kurze Arbeit behandelt ein Problem in der euklidischen Ebene. Sei E im folgenden ein abgeschlossenes Einheitsquadrat mit den Ecken A, B, C, D ; sei \dot{E} der offene Kern von E . Man greife k paarweise verschiedene Punkte P_i ($1 \leq i \leq k$) aus E heraus und bestimme ihren Mindestabstand d . Das Quadrat $G(d)$ mit Seitenlänge $1+d$ gehe aus \dot{E} durch eine Streckung hervor, welche als Zentrum den Mittelpunkt von E besitzt. Die k offenen Kreise mit Mittelpunkt P_i und Radius $d/2$ unterdecken $G(d)$; die Dichte dieser Unterdeckung ist $(k \pi d^2)/4(1+d)^2$. Unter allen Möglich-

keiten, k paarweise verschiedene Punkte aus E herauszugreifen, ist eine Möglichkeit zu suchen, für welche der *Mindestabstand der k Punkte maximal* wird; die zugehörige, wie im vorigen Satz gebildete Dichte ist dann diejenige einer dichtesten Unterdeckung eines gegebenen Quadrats durch k kongruente Kreise (Beweis: vgl. [1] und [2]). Für $2 \leq k \leq 9$ ist die Bestimmung dieser Maxima gelöst, für $k \geq 10$ ungelöst. Für einige k hat Michael Goldberg in [1] die grössten ihm bekannten Mindestabstände von k Punkten aus E angegeben. Für $k=10$ bzw. $k=13$ stellen Abb.1 bzw. Abb.2 das Quadrat E und die zu den Goldbergschen Werten gehörenden k Punkte aus E (durch Nullkreise hervorgehoben) dar.

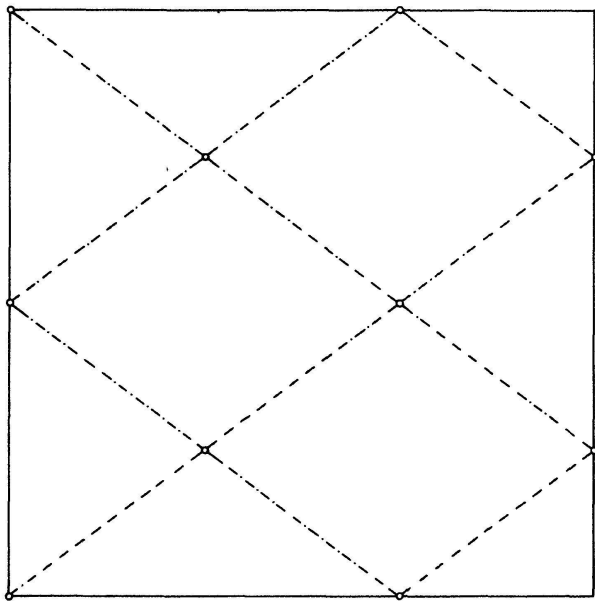


Abb. 1

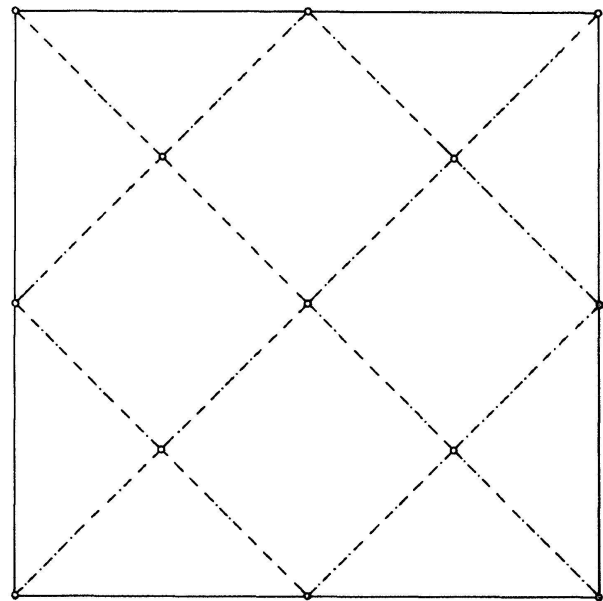


Abb. 2

In [2] wurden für diese beiden Fälle Punktmengen mit grösserem Mindestabstand bestimmt. Für $k=10$ bzw. $k=13$ stellen Abb.3 bzw. Abb.4 diese Konfigurationen dar.

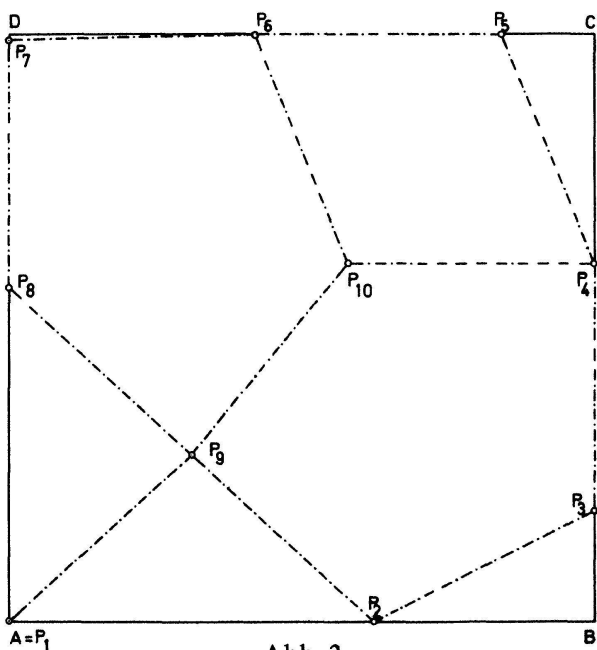


Abb. 3

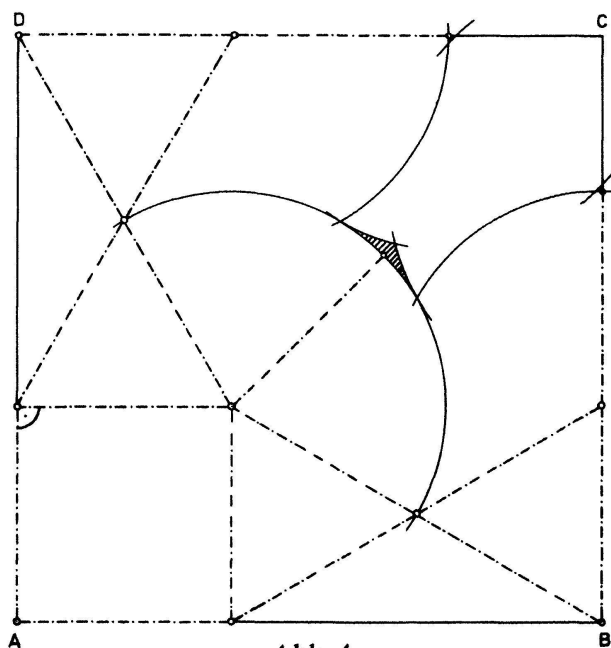


Abb. 4

2. Auf jeweils eine Abbildung bezogen, mögen die strichpunktierten Strecken, die als Endpunkte 2 der hervorgehobenen k Punkte, aber keine weiteren dieser k Punkte enthalten, von gleicher Länge sein. (Genau die Endpunkte dieser Strecken besitzen dann bei Beachtung der *knapp erläuterten Konstruktionsvorschriften* dieses Abschnitts Mindestabstand.) Man zerlege E in 12 kongruente Rechtecke R_s ($1 \leq s \leq 12$) mit Seitenlängen $1/4$ und $1/3$ bzw. in 16 kongruente Quadrate Q_t ($1 \leq t \leq 16$) mit Seitenlänge $1/4$; die in Abb. 1 bzw. Abb. 2 hervorgehobenen Punkte seien entsprechende Ecken der R_s bzw. Q_t . In Abb. 4 beachte man den angegebenen rechten Winkel und lege 3 der 13 Punkte auf die Diagonale \overline{AC} . In Abb. 3 enthalte der Rand von E bei Aufzählung im mathematisch positiven Sinn folgende Punkte: $A = P_1, P_2, B, P_3, P_4, C, P_5, P_6, D, P_7, P_8, A$.

3. Aufgrund von 2 ergibt sich folgende Tabelle:

Konfiguration dargestellt in	k	Mindestabstand d	Zugehörige Dichte $\frac{k \pi d^2}{4(1+d)^2}$
Abb. 1	10	$\frac{5}{12}$	0,67941018
Abb. 3	10	0,42127954	0,69003579
Abb. 2	13	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0,69661443
Abb. 4	13	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0,73305767

Die im Fall $k=10$ in Abb. 3 dargestellte Anordnung ist vermutlich die einzige 10elementige Teilmenge von E , die maximalen Mindestabstand besitzt. In [2] wurden Methoden entwickelt, die das Auffinden und Begründen solcher *Vermutungen* ermöglichen.

Klaus Schlüter, Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Michael Goldberg: The packing of equal circles in a square. Math. Mag. 43, 24–30 (1970).
- 2 Klaus Schlüter: Diplomarbeit, Universität Stuttgart.

Aufgaben

Aufgabe 798. A_1, A_2, A_3 seien die Ecken eines ebenen Dreiecks Δ . Auf den Verlängerungen seiner Seiten seien die Punkte U_1, \dots, U_6 folgendermassen angenommen:

$$\begin{array}{lll}
 U_1, U_4 & \text{auf } A_2 A_3, & |A_2 U_1| = |A_1 A_2|, \quad |A_3 U_4| = |A_3 A_1|, \\
 U_2, U_5 & \text{auf } A_3 A_1, & |A_3 U_5| = |A_2 A_3|, \quad |A_1 U_2| = |A_1 A_2|, \\
 U_3, U_6 & \text{auf } A_1 A_2, & |A_1 U_3| = |A_3 A_1|, \quad |A_2 U_6| = |A_2 A_3|.
 \end{array}$$

Ferner seien V_1, V_2, V_3 bzw. W_1, W_2, W_3 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{U_2 U_3}, \overline{U_1 U_6}, \overline{U_4 U_5}$ bzw. $\overline{U_5 U_6}, \overline{U_3 U_4}, \overline{U_1 U_2}$ des so entstehenden Sechsecks $U_1 \cdots U_6$.

a) Man zeige, dass sich die Transversalen $A_i V_i$ ($i = 1, 2, 3$) in einem Punkt L und die Transversalen $A_i W_i$ ($i = 1, 2, 3$) in einem Punkt P schneiden.

b) Man zeige, dass L, P und der Inkreismittelpunkt I von Δ kollinear sind.

c) Man bestimme den Wertebereich des Teilungsverhältnisses $|LI|/|IP|$.

J. T. Groenman, Groningen, NL

Lösung: Es seien a_i ($i = 1, 2, 3$) die Seitenlängen von Δ , O ein Bezugspunkt ausserhalb der Ebene von Δ und $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{OA_i}$ die Basisvektoren eines räumlichen Koordinatensystems. Da jede Winkelhalbierende von Δ die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, ist

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_1 \mathbf{b}_1 + a_2 \mathbf{b}_2 + a_3 \mathbf{b}_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Die drei Vektoren

$$\mathbf{b}_i - x_i \overrightarrow{A_i V_i} = \mathbf{b}_i - x_i (a_j/2 a_k) (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j) - x_i (a_k/2 a_j) (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_k) \\ (i, j, k = 1, 2, 3 \text{ im Zyklus})$$

sind für

$$x_i = 2 a_j a_k / (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

gleich dem Vektor

$$\overrightarrow{OL} = \frac{a_1^2 \mathbf{b}_1 + a_2^2 \mathbf{b}_2 + a_3^2 \mathbf{b}_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Daher gehen die Geraden $A_i V_i$ durch den Punkt L , den Lemoine-Punkt von Δ . Die drei Vektoren

$$\mathbf{b}_i + y_i \overrightarrow{A_i W_i} = \mathbf{b}_i + \frac{y_i (a_i + a_j)}{2 a_j} (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}_i) + \frac{y_i (a_i + a_k)}{2 a_k} (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_i)$$

sind für

$$y_i = a_j a_k / (a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)$$

gleich dem Vektor

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a_1 (a_2 + a_3) \mathbf{b}_1 + a_2 (a_3 + a_1) \mathbf{b}_2 + a_3 (a_1 + a_2) \mathbf{b}_3}{2 (a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)}.$$

Daher gehen die Geraden $A_i W_i$ durch den Punkt P . Die Vektoren $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OP}$ sind komplanar, da die aus ihren Koordinaten gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1(a_2+a_3) & a_2(a_3+a_1) & a_3(a_1+a_2) \end{vmatrix} = 0$$

ist. Somit sind I, L, P kollinear. Das Längenverhältnis der Vektoren

$$\overrightarrow{LI} = \frac{a_1(a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3) \mathbf{b}_1 + \dots}{(a_1 + a_2 + a_3)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

und

$$\overrightarrow{IP} = \frac{a_1(a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3) \mathbf{b}_1 + \dots}{2(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)}$$

lässt sich an jeder der drei Koordinaten ablesen und beträgt

$$|LI|/|IP| = 2(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)/(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Aus den bekannten Dreiecksungleichungen

$$a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2 < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq 2(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)$$

ergibt sich als Wertebereich dieses Verhältnisses

$$1 < |LI|/|IP| \leq 2,$$

mit Gleichheit rechts genau für das gleichseitige Dreieck.

Mária Herbert, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten J. Banning (Dedzjum, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (München, BRD), A. Reuschel (Wien, A).

Aufgabe 799. Es sei k eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $a \geq e$. Man zeige: Zu jeder reellen Zahl x mit $x \geq (\log a)^k$ existiert eine natürliche Zahl m derart, dass

$$\frac{x}{2^{k+1}(\log ax)^k} < m \leq \frac{x}{(\log am)^k}.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung mit Verschärfung: Seien k, a, x beliebig wie in der Aufgabenstellung vorgegeben; wir zeigen dann sogar, dass es ein natürliches m gibt mit

$$\frac{x}{2} (\log ax)^{-k} < m \leq x (\log am)^{-k}. \quad (1)$$

Da die Funktion $y(\log a y)^k$ in $y \geq 1$ streng monoton wächst, bei $y \rightarrow \infty$ nicht beschränkt bleibt und an der Stelle $y=1$ gleich $(\log a)^k \geq 1$ ist, ist die Menge $N(k, a, x) := \{n \in \mathbb{N} \mid n(\log a n)^k \leq x\}$ nicht leer und endlich. Sei m ihr größtes Element; offenbar genügt es bereits der rechten Ungleichung in (1) und weiter gilt

$$x < (m+1)(\log a(m+1))^k. \quad (2)$$

Wäre $m+1 \leq x(\log a x)^{-k}$, so folgte aus (2) und der vorhin festgestellten Monotonie von $y(\log a y)^k$, dass $x < x(\log a x)^{-k}(\log a x - k \log \log a x)^k \leq x$. Somit ist $x(\log a x)^{-k} < m+1 \leq 2m$, was auch die linke Seite von (1) beweist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte H. Harborth (Braunschweig, BRD).

Aufgabe 800. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2} [1 + (-1)^n].$$

S. Gabler, Mannheim, BRD

Lösung: Aus der Identität

$$k!(n-k)!(n+2) = k!(n-k+1)! + (k+1)!(n-k)!$$

$$\text{folgt } \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2} \left\{ \binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} \right\}.$$

Summiert man über k von 0 bis n , so heben sich rechts ersichtlich alle Summanden bis auf den ersten und letzten weg. Dies ergibt unmittelbar die Behauptung.

P. Hohler, Olten
Problemgruppe Bern

Anmerkung der Redaktion. Verschiedene Einsender bemerkten, dass sich Aufgabe 800 samt Lösung in [1] findet. Ferner wurde von mehreren Lesern auf [2] hingewiesen, wo die allgemeinere Identität

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{x}{k}^{-1} = \frac{x+1}{x+2} \left\{ 1 + (-1)^n \binom{x+1}{n+1}^{-1} \right\}$$

bewiesen wird. Als weitere Verallgemeinerung zeigt L. Hämmerling

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p+q+n}{p+k}^{-1} = \frac{p+q+n+1}{p+q+n+2} \left\{ \binom{p+q+n+1}{p}^{-1} + (-1)^n \binom{p+q+n+1}{q}^{-1} \right\} \quad \text{für } p, q, n \in \mathbb{N}_0.$$

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. Riordan: Combinatorial Identities, S. 28. John Wiley, New York 1928.
- 2 H.W. Gould: Combinatorial Identities, S.18. Morgantown Printing and Binding Co., Morgantown, West Virginia 1972.

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), R. Askey (Madison, USA), K. Bickel (Freiburg, BRD), A. Brunnschwiler (Magadino), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, USA), L. Hafner (Urbana, USA), L. Hämmerling (Aachen, BRD) (3 Lösungen), H. Harborth (Braunschweig, BRD), A.A. Jagers (Enschede, NL), M.S. Klamkin (Edmonton, CDN), M. Koch (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warszawa, Polen), P. Nuesch (Lausanne), I. Paasche (München, BRD) (2 Lösungen), R. Razen (Leoben, A), Hj. Stocker (Wädenswil), J. Suck (Bochum, BRD), G. Turnwald (Wien, A), M. Vowe (Therwil BL), H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1979* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 816. a_1, a_2, \dots, a_s seien gegebene positive Zahlen und $0 < r < 1$. Die Folge (a_n) sei durch die Rekursionsformel

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-s})^r, \quad n > s$$

bestimmt. Man beweise die Konvergenz von (a_n) und bestimme ihren Grenzwert.

E. Trost, Zürich

Aufgabe 817. Man bestimme alle Polynome f mit komplexen Koeffizienten, welche der Gleichung $f(x)f(-x) = f(x^2)$ genügen.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 818. G_m bezeichne die additive bzw. die multiplikative Gruppe aller bzw. aller regulären komplexen (m, m) -Matrizen, Z_n die multiplikative Gruppe der komplexen zyklischen Matrizen