

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1979)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- a) Gibt es ein Netz, aus dem man alle Dreieckszehnfächer falten kann?
 b) Können alle Tetraedermehrlinge aus Parallelogrammnetzen gefaltet werden?

Roland Powarzynski und Hartmut Spiegel, Worms, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders. *El. Math.* 30, Heft 4, 73–96 (1975).

Aufgaben

Aufgabe 813. Man beweise, dass für alle natürlichen $n \geq 2$

$$\sum_{v=2}^{2n-2} \frac{v-3}{2n-v} \binom{2n-1}{v} B_{2n-v} = n-3 + \frac{3}{2n}.$$

Dabei bezeichnet B_k die k -te Bernoullizahl.

P. Addor, Bern

Lösung: Verwenden wir der Reihe nach

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n-1} = 0 \quad (n \geq 2)$$

und

$$\frac{1}{2n-v} \binom{2n-1}{v} = \frac{1}{2n} \binom{2n}{v} \quad (0 \leq v \leq 2n-1),$$

die bekannte Rekursionsformel der Bernoullizahlen

$$\sum_{v=1}^m \binom{m}{v} B_{m-v} = 0 \quad (m \geq 2) \quad \text{für } m=2n \quad \text{und } m=2n-1$$

und endlich noch

$$v \binom{2n}{v} = 2n \binom{2n-1}{v-1} \quad (1 \leq v \leq 2n),$$

so ist für beliebige reelle Zahlen a, b

$$\begin{aligned} & \sum_{v=2}^{2n-2} \frac{av+b}{2n-v} \binom{2n-1}{v} B_{2n-v} - \left(an + \frac{b}{2} - \frac{3a}{2} - \frac{b}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^{2n} (av+b) \binom{2n}{v} B_{2n-v} = \frac{a}{2n} \sum_{v=1}^{2n} v \binom{2n}{v} B_{2n-v} + \frac{b}{2n} \sum_{v=1}^{2n} \binom{2n}{v} B_{2n-v} \\ &= \frac{a}{2n} \sum_{v=1}^{2n} 2n \binom{2n-1}{v-1} B_{2n-v} + 0 = a \sum_{v=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{v} B_{2n-1-v} \\ &= a \binom{2n-1}{0} B_{2n-1} + \sum_{v=1}^{2n-1} \binom{2n-1}{v} B_{2n-1-v} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Es gilt somit für $n \geq 2$

$$\sum_{v=2}^{2n-2} \frac{av+b}{2n-v} \binom{2n-1}{v} B_{2n-v} = an + \frac{b}{2} - \frac{3a}{2} - \frac{b}{2n},$$

für $a = 1, b = -3$, also die Behauptung des Aufgabenstellers.

R. Wyss, Flumenthal

Bemerkung: I. Paasche und R. Wyss weisen darauf hin, dass sich durch Linearkombination bekannter Identitäten zwischen Bernoullizahlen beliebig viele weitere Formeln der in Aufgabe 813 angegebenen Art konstruieren liessen.

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, USA), K. Grün (Linz, A), A.A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), F. Mátyás (Eger, Ungarn), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 814. Es ist ein analytischer Ausdruck für den Grenzwert $K = \lim K_m$ der Folge (K_m) unregelmässiger Kettenbrüche

$$K_m = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2m-1}{2m} = \frac{1}{2 + \frac{3}{4 + \dots + \frac{2m-1}{2m}}}$$

anzugeben. Die Lösung soll mit elementaren Mitteln unter Ausschluss der Methode von Cesàro erfolgen.

H.-J. Kaiser, Berlin, DDR
P. Malischewski, Jena, DDR

Lösung der Aufgabensteller: Für den Zähler bzw. Nenner des m -ten Näherungsbruches $K_m = A_m/B_m$ von K gelten bekanntlich (siehe z.B. [1], §§ 2ff.) die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} A_m &= 2m A_{m-1} + (2m-1) A_{m-2}, & A_{-1} &= 1, & A_0 &= 0 \\ B_m &= 2m B_{m-1} + (2m-1) B_{m-2}, & B_{-1} &= 0, & B_0 &= 1, \quad m \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

denen man auch, wie sich leicht durch vollständige Induktion zeigen lässt, die Gestalt

$$A_m = (2m+1)A_{m-1} + (-1)^{m+1}, \quad B_m = (2m+1)B_{m-1} - (-1)^{m+1}$$

geben kann. Mit dem dadurch nahegelegten Ansatz

$$A_m = c_m (2m+1)!! \quad \text{mit} \quad (2m+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)$$

ergibt sich

$$c_m = c_{m-1} + \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!!}, \quad c_0 = 0,$$

also

$$c_m = \sum_{\nu=1}^m \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu+1)!!}$$

und somit

$$A_m = (2m+1)!! \sum_{\nu=1}^m \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu+1)!!} = (2m+1)!! \left[1 - \sum_{\nu=0}^m \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!!} \right].$$

Analog erhält man mit dem Ansatz $B_m = d_m (2m+1)!!$ für B_m den Ausdruck

$$B_m = (2m+1)!! \sum_{\nu=0}^m \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!!}.$$

Die Hilfsfunktion $y(x)$, definiert durch

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!!},$$

verhilft zu der Darstellung

$$K = \lim_{m \rightarrow \infty} K_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_m}{B_m} = \frac{1}{y(1)} - 1.$$

Wegen

$$y' = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu-1)!!} \quad \text{und} \quad xy = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu-1)!!}$$

genügt die Hilfsfunktion y der Differentialgleichung

$$y' + xy - 1 = 0,$$

deren Lösung sich in der Form

$$y(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} dt$$

angeben lässt und somit auf den gesuchten Ausdruck

$$K = \frac{\sqrt{e}}{\int_0^1 e^{x^2/2} dx} - 1$$

führt. Damit ist auch gleichzeitig eine interessante Darstellung des Integrals $\int_0^1 e^{x^2/2} dx$ gegeben.

LITERATURVERZEICHNIS

1 O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl. Stuttgart 1954.

Bemerkung: Nach P. Bundschuh lässt sich zeigen, dass K eine transzendente Zahl ist.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Jenni (Lausen), O. P. Lossers (Eindhoven, NL; 2 Lösungen), L. Kuipers (Mollens VS), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 815. Ein Kreuz sei die Vereinigungsmenge zweier in derselben Ebene liegender Rechtecke R_1, R_2 . Es gelte zudem die folgende Bedingung (B): Es gibt eine Richtung, zu der alle Rechteckseiten parallel oder senkrecht sind. Aus der Einheitskreisscheibe soll ein Kreuz $K = R_1 \cup R_2$ mit maximaler Fläche ausgeschnitten werden. Man zeige, dass für die Maximalfigur folgende Aussagen gelten:

- R_1 und R_2 sind kongruent.
- K teilt die Fläche des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates Q nach dem Goldenen Schnitt, $|K| : |Q| = \tau = (\sqrt{5} - 1) / 2$.
- Die Seitenlängen von R_1, R_2 stehen im Verhältnis τ .
- K ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar bei fester Zirkeleinstellung 1.

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Lösung: Es ist zunächst klar, dass für die Maximalfigur folgendes gelten muss: Alle vier Eckpunkte von R_i liegen für $i=1,2$ auf dem Rand ∂E der Einheitskreisscheibe E . Führt man nun rechtwinklige Koordinaten mit Ursprung im Mittelpunkt von E ein, so dass die unter (B) genannte Richtung durch eine Achsenrichtung gegeben ist, so sei $(a, (1-a^2)^{1/2})$ bzw. $(b, (1-b^2)^{1/2})$ der im ersten Quadranten auf

∂E gelegene Eckpunkt von R_1 bzw. R_2 , wobei o.B.d.A. noch $b \leq a$ vorausgesetzt werden darf. Die Funktion

$$f(a, b) := a(1 - a^2)^{1/2} + b(1 - b^2)^{1/2} - b(1 - a^2)^{1/2}, \quad (1)$$

ein Viertel der Fläche von K , hat in der kompakten Menge $M := \{(a, b) \mid 0 \leq b \leq a \leq 1\}$ der a, b -Ebene ein Maximum, das es zu ermitteln gilt. In einem Punkt (a, b) aus dem Innern \dot{M} von M kann f nur dann maximal sein, wenn dort die bekannten Bedingungen $f_a(a, b) = 0$, $f_b(a, b) = 0$ erfüllt sind, was hier äquivalent ist mit dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Gleichungen

$$2a^2 - ab = 1, \quad 1 - 2b^2 = (1 - a^2)^{1/2} (1 - b^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Durch Quadrieren erhält man aus der zweiten Gleichung $4b^4 - a^2b^2 = 3b^2 - a^2$ und hieraus mit Hilfe der ersten

$$0 = 4b^4 + 3ab^3 - 7a^2b^2 - a^3b + 2a^4 = (b^2 + ab - a^2)(4b^2 - ab - 2a^2).$$

Wir haben also gefunden: In $(a, b) \in \dot{M}$ ist f höchstens dann maximal, wenn $b^2 + ab - a^2 = 0$ oder $4b^2 - ab - 2a^2 = 0$ gilt, also wenn $b/a = \tau$ oder $b/a = \sigma := (1 + \sqrt{33})/8$ ist; aus der ersten Gleichung (2) folgt dann $a^2(2 - \tau) = 1$ oder $a^2(2 - \sigma) = 1$. Im ersten Fall hat man weiter $a^2 + b^2 = a^2(1 + \tau^2) = (1 + \tau^2)/(2 - \tau) = 1$ wegen $\tau^2 + \tau - 1 = 0$ und damit nach (1)

$$f(a, b) = 2ab - b^2 = a^2(2 - \tau)\tau = \tau \quad (= 0,618 \dots),$$

während man im zweiten Falle aus (1) nach leichten Umformungen $f(a, b) = (1 - \sigma)^{1/2} (2 - \sigma/2) / (2 - \sigma) = 0,540 \dots < \tau$ erhält. Da man $f(a, b) \leq 1/2$ für $(a, b) \in \partial M$ leicht nachprüft, erhält man die Maximalfigur genau dann, wenn $a = (2 - \tau)^{-1/2}$, $b = \tau(2 - \tau)^{-1/2}$ ist, womit die Teilaufgaben a, b, c gelöst sind.

Zum Nachweis von d genügt es nach dem bereits Bewiesenen zu zeigen: Eine Strecke der Länge $(2 - \tau)^{-1/2} = (1 + \tau)^{-1/2}$ ist mit Lineal und auf 1 fest eingestelltem Zirkel konstruierbar. Hierzu reicht es zu zeigen, dass $(1 + \tau^2)^{1/2}$ so konstruierbar ist; denn ist eine Strecke der Länge ρ gegeben, so kann mittels Strahlensatz vermöge $\rho : 1 = 1 : \rho^*$ eine Strecke der Länge $\rho^* = \rho^{-1}$ auf diese Weise konstruiert werden. Dass $(1 + \tau^2)^{1/2}$ mit den angegebenen Mitteln konstruierbar ist, ist klar, sobald dies für τ zutrifft; man nehme dann nämlich die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 1 bzw. τ . Dass τ in der gewünschten Weise konstruierbar ist, ist aber evident und gleichbedeutend damit, dass der «Goldene Schnitt» so durchführbar ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten H.-J. Kleck (Bern), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

Aufgabe 815A. Man löse Aufgabe 815 unter Verzicht auf die Bedingung (B).

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Solution: Evidently we must distinguish between the two cases:

1. there are vertices of R_1 that are not separated by vertices of R_2 (and conversely) on the unit circle,
2. the vertices of R_1 separate those of R_2 on the unit circle.

Obviously case 1 is a slight modification of problem 815: Two inscribed rectangles of the unit circle with fixed shapes have a parallelogram in common. The surface area of this parallelogram is minimal if $h_1 h_2 / \sin \alpha$ is minimal, i.e. if $\alpha = \pi/2$. This leads to the extremal case studied in problem 815, which had surface area $2\sqrt{5} - 2$.

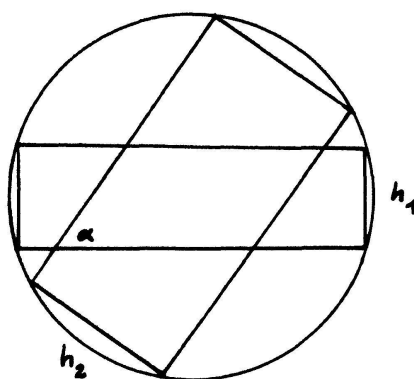


Figure 1

In case 2, the common part of the rectangles is an octagon. We shall minimize the total surface area of the complementary set of the ‘cross’, consisting of 8 ‘circle sectors’.

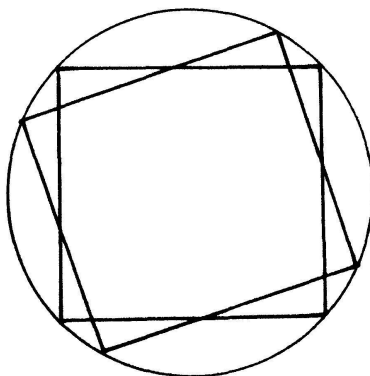


Figure 2

Let the vertices of R_1 and R_2 divide the circumference of the unit circle as sketched in figure 3. The surface area of the shaded domain equals

$$\frac{\beta - \sin \beta}{2} + 2 \sin^2 \beta / 2 \frac{\sin \alpha / 2 \sin \gamma / 2}{\sin(\alpha + \gamma) / 2}, \quad \text{etc.}$$

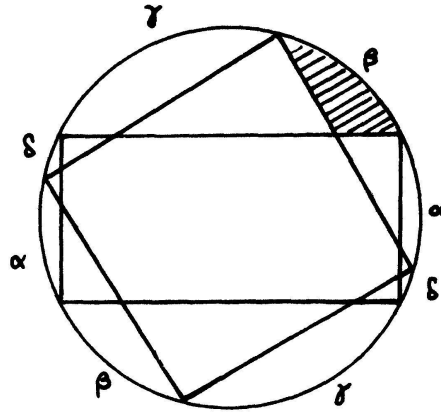


Figure 3

So the complementary surface area of $R_1 \cup R_2$ equals

$$\begin{aligned}
 G(a, \beta, \gamma, \delta) &:= (a + \beta + \gamma + \delta) - (\sin a + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta) \\
 &+ 4(\sin^2 \beta / 2 + \sin^2 \delta / 2) \frac{\sin a / 2 \sin \gamma / 2}{\sin(a + \gamma) / 2} \\
 &+ 4(\sin^2 a / 2 + \sin^2 \gamma / 2) \frac{\sin \beta / 2 \sin \delta / 2}{\sin(\beta + \delta) / 2},
 \end{aligned}$$

and we have to impose the condition $a + \beta + \gamma + \delta = \pi$. This trigonometric expression reduces to

$$\begin{aligned}
 G(a, \beta, \gamma, \delta) &= \pi - 2 \sin \frac{a + \gamma}{2} \cos \frac{a - \gamma}{2} - 2 \sin \frac{\beta + \delta}{2} \cos \frac{\beta - \delta}{2} \\
 &+ 2 \left(1 - \cos \frac{\beta + \delta}{2} \cos \frac{\beta - \delta}{2} \right) \frac{\cos \frac{a - \gamma}{2} - \cos \frac{a + \gamma}{2}}{\sin \frac{a + \gamma}{2}} \\
 &+ 2 \left(1 - \cos \frac{a + \gamma}{2} \cos \frac{a - \gamma}{2} \right) \frac{\cos \frac{\beta - \delta}{2} - \cos \frac{\beta + \delta}{2}}{\sin \frac{\beta + \delta}{2}}.
 \end{aligned}$$

Now we put $(a + \gamma) / 2 =: x$ (hence $(\beta + \delta) / 2 = \pi / 2 - x$) and furthermore $(a - \gamma) / 2 =: y$ and $(\beta - \delta) / 2 =: z$. The result is $(0 < x < \pi / 2, |y| < \pi / 2, |z| < \pi / 2)$:

$$\begin{aligned}
 G(a, \beta, \gamma, \delta) &= \pi + 2 \left(\frac{\cos y}{\sin x} + \frac{\cos z}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \cos y \cos z \right) \\
 &= \pi + 2 \left(\frac{\cos y}{\sin x} + \frac{\cos z}{\cos x} - \frac{1}{\sin x \cos x} - 2 \cos y \cos z \right).
 \end{aligned}$$

For the stationary points we put the partial derivatives equal to zero (x , y and z are independent).

$$\frac{2 \cos z \sin^3 x - 2 \cos y \cos^3 x + 2 \cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$$

$$2 \sin y \left(2 \cos z - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$$

$$2 \sin z \left(2 \cos y - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$$

and we find two solutions

a) $y = z = 0$, $x = \pi/4$ ($a = \beta = \gamma = \delta = \pi/4$).

b) $2 \cos z = 1/\sin x$, $2 \cos y = 1/\cos x$, $\cos 2x = 0$.

So $x = \pi/4$, $|y| = |z| = \pi/4$, ($\{a, \gamma\} = \{\beta, \delta\} = \{0, \pi/2\}$).

Obviously the case $a = \beta = \gamma = \delta = \pi/4$ is the extremal situation under the separation condition. In this case the 'cross' has surface area

$$|k| = 8 - 4\sqrt{2},$$

which turns out to be less than the extremum $2(\sqrt{5} - 1)$ we found under the non-separation condition.

Hence, the solution found in problem 815 also solves problem 815A.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Eine weitere Lösung sandte H. Wellstein (Flensburg, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni* 1980 an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 831. Es seien $u, v \geq 2$ natürliche Zahlen. Die rationale Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ habe die Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $q_n := a_{n+1}/a_n \in \{u, v\}$. Man zeige: Die Zahl

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$$

ist genau dann rational, wenn die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ periodisch ist.

J. Burr und P. Erdős

Aufgabe 832. Man bestimme die gemeinsamen Glieder der beiden durch

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 6, & a_{n+2} &= 6a_{n+1} - a_n, \\ b_1 &= 1, & b_2 &= 10, & b_{n+2} &= 10b_{n+1} - b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

definierten Folgen $(a_n), (b_n)$.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 833. Für alle $n \geq 0$ gelten die Polynomidentitäten

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k+x}{k} \binom{2n-2k+y}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k+x+y}{n-k}.$$

Dies ist zu zeigen.

I. Paasche, München, BRD

Literaturüberschau

K. Jänich: Einführung in die Funktionentheorie. IX und 239 Seiten. DM 19.80. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1977.

In dieser Einführung werden folgende Gegenstände aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen behandelt: Holomorphe Funktionen, Der Wirtinger-Kalkül, Der Cauchysche Integralsatz, Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz, Isolierte Singularitäten, Analytische Fortsetzung und Monodromiesatz, Die Umlaufzahlversion des Cauchyschen Integralsatzes, Der Residuen-Kalkül, Folgen holomorpher Funktionen, Satz von Mittag-Leffler, Produktsatz von Weierstrass, Riemannscher Abbildungssatz, Riemannsche Flächen, Algebraische Funktionen, Übungsaufgaben mit Hinweisen zur Lösung. Der Wert des vorliegenden Buches liegt in erster Linie in seiner klaren und sorgfältigen Darstellung. Besonders wertvoll sind die vielen geometrischen Veranschaulichungen, welche wesentlich zur guten Verständlichkeit des Textes beitragen.

Vom Leser des Buches werden etwa jene Grundkenntnisse erwartet, über die ein Mathematikstudent am Ende des ersten Studienjahres verfügt. K. Meier

M. Davis: Applied Nonstandard Analysis. XI und 181 Seiten. US \$21.55. John Wiley & Sons, New York 1977.

Jede Darstellung der Methoden der Nichtstandard Analysis, die sich an Nichtspezialisten wendet, hat mit einer Hauptschwierigkeit zu kämpfen: der Grundlegung des Gebiets. Der Autor des vorliegenden Werks, eines schmalen Bandes von 180 Seiten, löst diese Aufgabe in drei Schritten: erstens durch die Verwendung einer Mengenlehre mit Urelementen, zweitens durch die Einführung von Ultraprodukten und drittens durch die Verwendung des Übertragungsprinzips von Formeln bezüglich des Standarduniversums auf solche bezüglich des Nichtstandarduniversums. Das ist alles mehr oder weniger «standard», aber dem Autor, einem Meister der Exposition, gelingt es auf 40 Seiten, dem Leser die wesentlichen Grundzüge nahezubringen.

Der Name «Angewandt» im Titel des Buches darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Anwendung allesamt innermathematisch sind. Kapitel 3 entwickelt die elementare Analysis, die an der Wiege der