

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 34 (1979)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Über zwei besondere Eigenschaften von Dreiecksflächernetzen  
**Autor:** Powarzynski, Roland  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33812>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

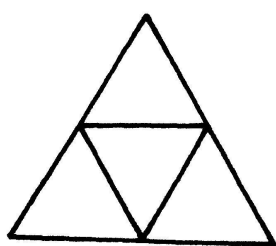
Das rechte Glied verschwindet genau dann, wenn  $A_4$  auf dem Umkreis von  $\Delta_4$  liegt: dann ist  $F'_4 = 0$  nach dem Satz von Wallace. O. Bottema, Delft

## LITERATURVERZEICHNIS

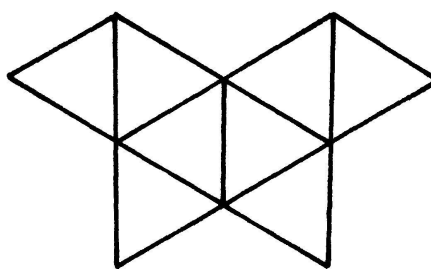
- 1 W. Wunderlich: Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten. Sber. öst. Akad. Wiss. 186, 263–280 (1977).
- 2 R.A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry, S. 139–140. Dover Publications, New York 1960.

## Über zwei besondere Eigenschaften von Dreiecksflächernetzen

1. Als Dreiecksflächner sollen im folgenden Polyeder bezeichnet werden, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Polyedern sind z.B. Tetraeder und Oktaeder. Von ihnen kann man sich ein Papiermodell herstellen, indem man die in Abb. 1a und 1b wiedergegebenen Figuren auf ein Stück Papier zeichnet, sie entlang der Randstrecken ausschneidet, sie längs der inneren Strecken faltet und je zwei Randstrecken geeignet miteinander verklebt. Aus diesem Grund heissen die Figuren Tetraedernetz bzw. Oktaedernetz.



a)



b)

Abb. 1

In [1] bewies M. Jeger, dass es bei Verwendung von Papier mit ununterscheidbaren Seiten elf verschiedene Oktaedernetze gibt. Er nutzte dabei die Tatsache aus, dass es ebenso viele solche Netze gibt wie (in bezug auf die volle Symmetriegruppe) inäquivalente Gerüste des Eckpunkt-Kanten-Graphen des Oktaeders. Im folgenden wird gezeigt, dass ein solch eindeutiger Zusammenhang nicht bei allen Dreiecksflächnern gegeben ist, denn es gibt Dreiecksflächner, bei denen Schnitte entlang den Kanten inäquivalenter Gerüste zu demselben Netz (als Figur betrachtet) führen. Bei solchen Netzen ist daher – wie auch in der Literatur üblich – eine zusätzliche Angabe erforderlich, welche Kanten (bzw. Ecken) beim Zusammenkleben zu identifizieren sind.

Weiterhin wird gezeigt, dass diese Forderung auch noch aus einem anderen Grund sinnvoll sein kann: Es gibt nämlich Netze von Dreiecksflächnern, die zu verschiedenen Körpern zusammengeklebt werden können.

2. Wir untersuchen zunächst Netze des Tetraederzwillings, d.h. der aus zwei Tetraedern zusammengesetzten Doppelpyramide. Diese ist – bis auf Ähnlichkeit –

der einzige Dreiecksflächner mit sechs Flächen. Man kann nun wie folgt vorgehen: Bezeichnet man – wie üblich – alle Figuren aus sechs (jeweils mit einer ganzen Seite) aneinanderhängenden gleichseitigen Dreiecken als Dreieckssechslinge, dann ist jedes Tetraederzwillingsnetz ein solcher Dreieckssechsling. Das Umgekehrte ist nicht der Fall: Von den zwölf in Abb.2 dargestellten Dreieckssechslingen scheiden

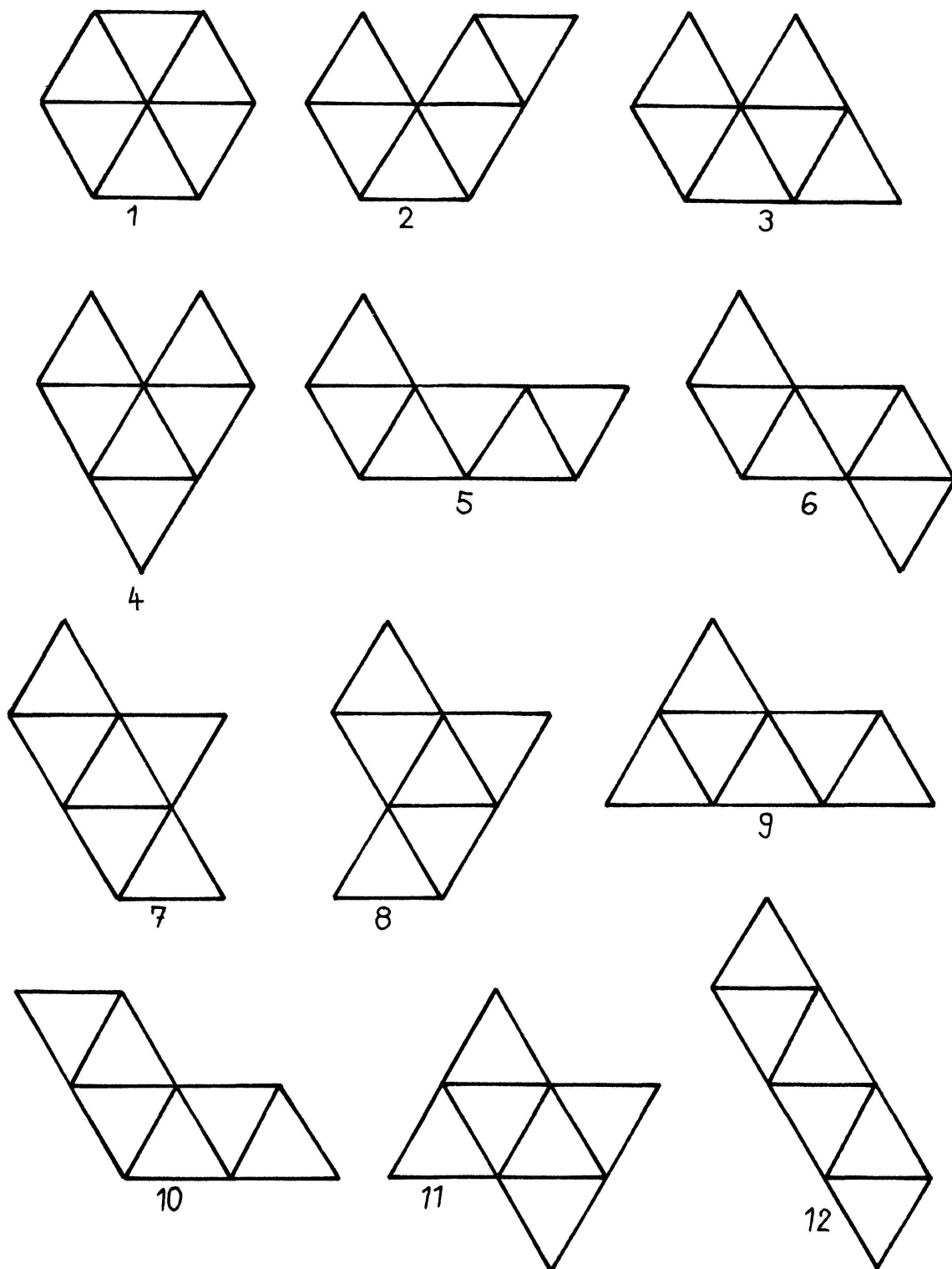


Abb. 2

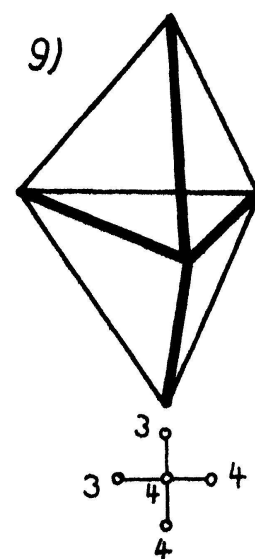
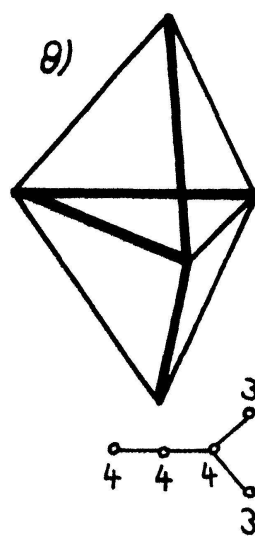
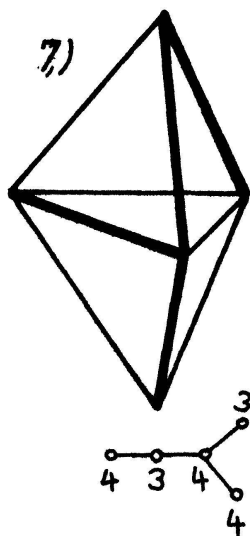
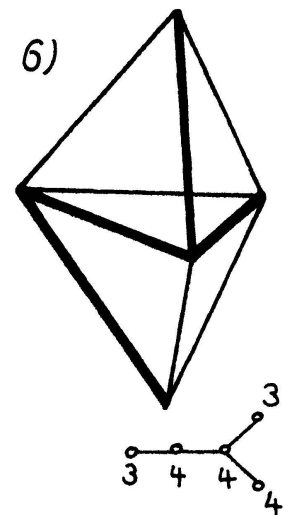
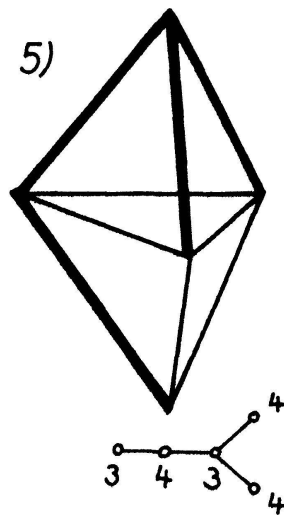
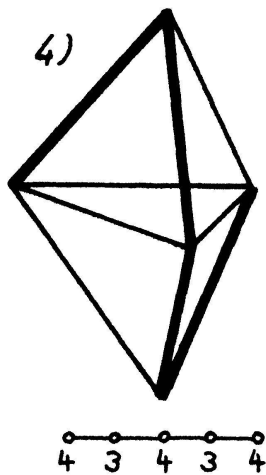
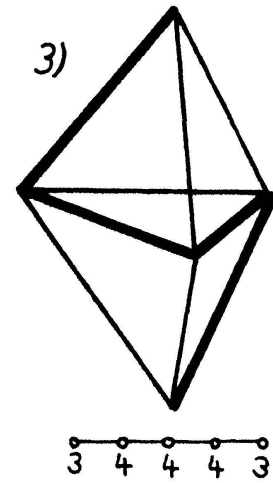
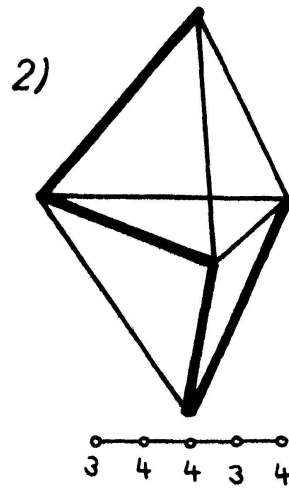
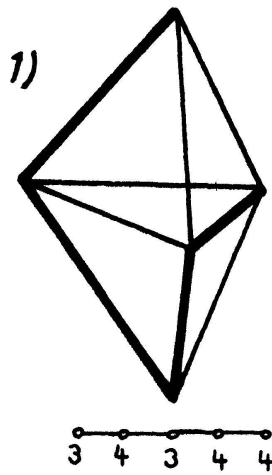


Abb. 3

vier (Nrn. 1–4) aus, da sie Ecken enthalten, an denen mehr als vier Dreiecke zusammenstossen. Die restlichen acht lassen sich zu einem Tetraederzwilling zusammenbauen.

Bei der anderen – in [1] benutzten – Methode, bei der man zu einem gegebenen Körper ein Körpernetz bekommt, schneidet man ein Flächenmodell des Körpers entlang seinen Kanten geeignet auf, bis man die Oberfläche in der Ebene ausbreiten kann. Der aus den Schnittkanten bestehende Teilgraph des Eckpunkt-Kanten-Graphen des Körpers ist ein Gerüst dieses Graphen (vgl. [1]). Die verschiedenen Gerüste des Tetraederzwillingsgraphen sind in Abb. 3 durch dick gezeichnete Linien angegeben und jeweils darunter in der üblichen Baumdarstellung (die Ecken sind nur durch ihre Eckengrade bezeichnet, da aufgrund der Symmetrie Ecken mit gleichem Grad nicht unterschieden zu werden brauchen).

Bemerkenswert ist das unterschiedliche Ergebnis beider – aufgrund der Erfahrung mit Würfelnetzen als gleichwertig erscheinenden – Vorgehensweisen: acht von den Sechslingen kommen als Netze in Frage, aber neun verschiedene Schnitte gibt es. Der Grund liegt darin, dass zwei verschiedene Schnitte (Nrn. 2, 6) denselben Sechsling ergeben bzw. – was dasselbe ist – dass derselbe Sechsling auf zwei

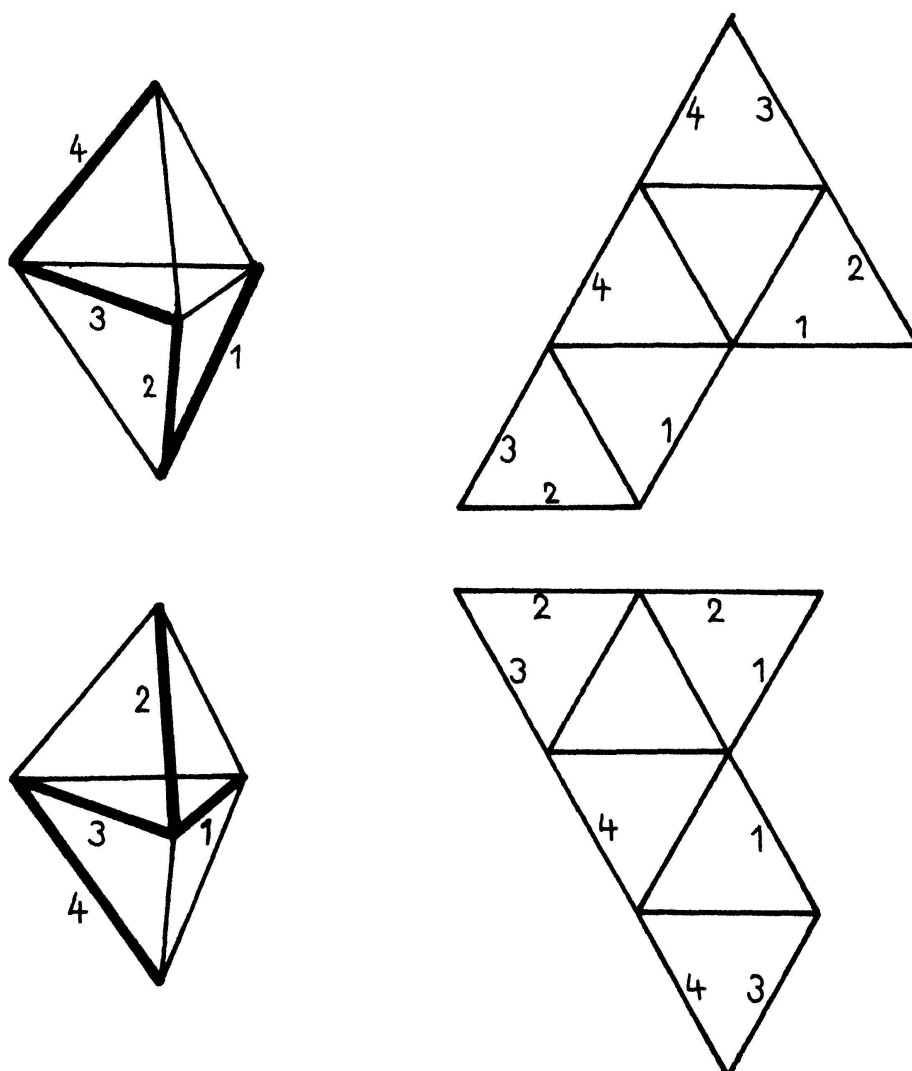


Abb. 4

verschiedene Arten zum Tetraederzwilling gefaltet werden kann. Dabei gibt es ein Kantenpaar, das in beiden Fällen zusammengeklebt wird. Nur für das Aneinanderfügen der restlichen vier freien Kanten gibt es zwei Möglichkeiten, die aber denselben Körper ergeben (Abb.4). Es ist daher nötig, die als Netze gezeichneten Figuren um eine Bezeichnung zu ergänzen, aus der hervorgeht, welche Strecken (oder Ecken) beim Falten identifiziert werden.

3. Als nächstes betrachten wir Dreiecksflächner mit acht Seitenflächen. Da es hier zwei wesentlich verschiedene gibt – Oktaeder und Tetraederdrilling –, bietet sich bei dieser Flächenzahl erstmals die Möglichkeit, einen Dreiecksachtling zu finden, aus dem beide Körper gefaltet werden können. Es stellt sich heraus, dass von den elf Dreiecksachtlingen, die Oktaedernetze sind, die sieben in Abb.5 dargestellten auch

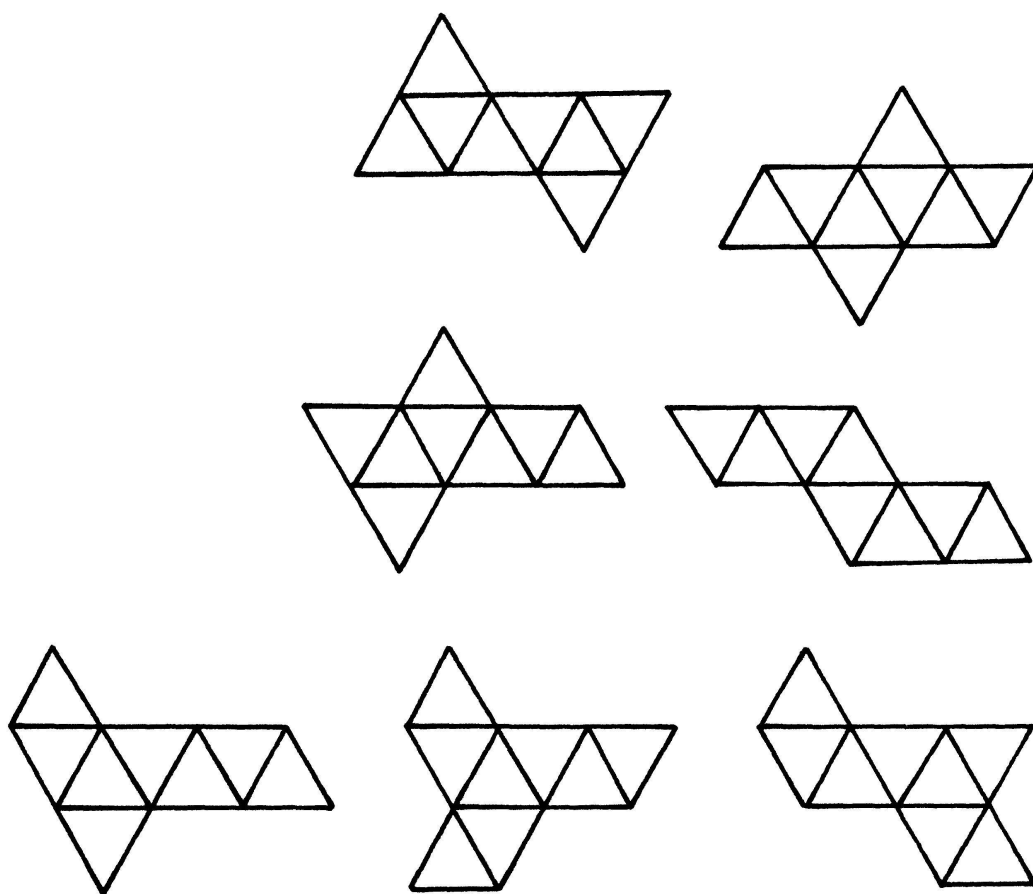


Abb. 5

zu einem Tetraederdrilling gefaltet werden können. Eine Sonderstellung nimmt der in Abb.6 gezeigte Dreiecksachtling ein: Heftet man erst die mit 1, dann die mit 2 bezeichneten Strecken zusammen, so gibt es zwei Fortsetzungsmöglichkeiten, die in diesem Fall zu zwei verschiedenen Körpern führen: 3/3a zum Oktaeder, 3/3b zum Tetraederdrilling. Fängt man aber an, indem man die mit A bzw. B bezeichneten Strecken aneinanderheftet, so lässt sich dieser Anfang auf zwei verschiedene Arten zum Tetraederdrilling fortsetzen. Man sieht auch, dass zwei verschiedene Schnitte

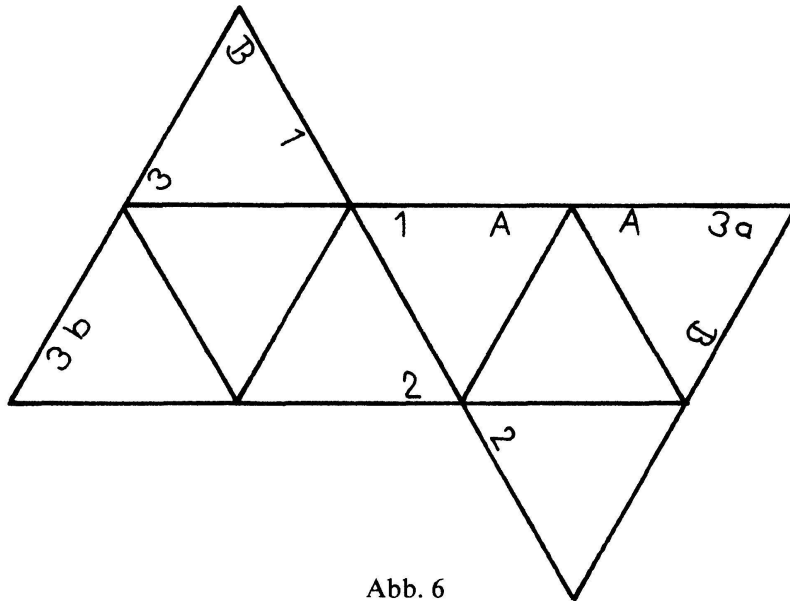


Abb. 6

dazugehören: In einem Fall ist die Kante, die allen drei Tetraedern angehört, nicht aufgeschnitten.

Wir haben also folgende Erkenntnisse gewonnen, die sich beide an der Figur der Abb. 6 demonstrieren lassen: Kann man aus einer Figur einen Körper falten, so

- ist dies nicht immer nur auf eine Art möglich,
- gibt es möglicherweise noch andere Körper, die man aus der gleichen Figur falten kann.

Das Netz der Abb. 6 ist nicht das einzige, das auf verschiedene Weise zum Tetraederdrilling gefaltet werden kann. Abb. 7 zeigt ein weiteres mit dieser Eigenschaft, das aufgrund seiner besonderen Form «Parallelogrammnetz» genannt werden soll.

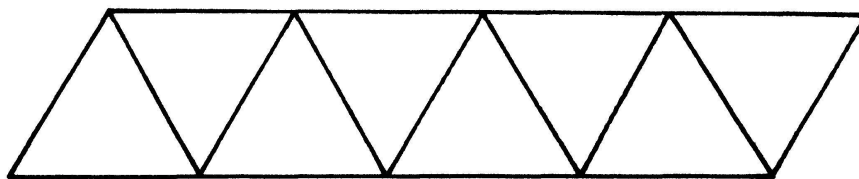


Abb. 7

4. Die bisherigen Ergebnisse können Ausgangspunkt einer Reihe neuer Fragestellungen sein, so z.B.: Welche Dreiecksflächner mit zehn Dreiecken lassen sich aus dem entsprechenden Parallelogrammnetz falten? Als Antwort findet man folgenden bemerkenswerten Sachverhalt: Es lassen sich aus ihm genau alle nichtkonvexen Dreieckszehnfächner, die vier Tetraedervierlinge, falten, nicht aber der einzige konvexe Dreieckszehnfächner, die pentagonale Doppelpyramide. Hier schliessen sich u.a. zwei weitere Fragen an, mit denen wir unsere Ausführungen schliessen wollen, ohne auf die Antwort einzugehen:

- a) Gibt es ein Netz, aus dem man alle Dreieckszehnfächner falten kann?  
 b) Können alle Tetraedermehrlinge aus Parallelogrammnetzen gefaltet werden?

Roland Powarzynski und Hartmut Spiegel, Worms, BRD

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders. *El. Math.* 30, Heft 4, 73–96 (1975).

## Aufgaben

**Aufgabe 813.** Man beweise, dass für alle natürlichen  $n \geq 2$

$$\sum_{v=2}^{2n-2} \frac{v-3}{2n-v} \binom{2n-1}{v} B_{2n-v} = n-3 + \frac{3}{2n}.$$

Dabei bezeichnet  $B_k$  die  $k$ -te Bernoullizahl.

P. Addor, Bern

**Lösung:** Verwenden wir der Reihe nach

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n-1} = 0 \quad (n \geq 2)$$

und

$$\frac{1}{2n-v} \binom{2n-1}{v} = \frac{1}{2n} \binom{2n}{v} \quad (0 \leq v \leq 2n-1),$$

die bekannte Rekursionsformel der Bernoullizahlen

$$\sum_{v=1}^m \binom{m}{v} B_{m-v} = 0 \quad (m \geq 2) \quad \text{für } m=2n \text{ und } m=2n-1$$

und endlich noch

$$v \binom{2n}{v} = 2n \binom{2n-1}{v-1} \quad (1 \leq v \leq 2n),$$

so ist für beliebige reelle Zahlen  $a, b$