

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 34 (1979)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Eine Erweiterung der Stewartschen Formel  
**Autor:** Bottema, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33811>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Elementarmathematik und Didaktik

### Eine Erweiterung der Stewartschen Formel

1. In einer geodätischen Arbeit [1] benutzte W. Wunderlich das folgende Lemma: Wenn die vier Punkte  $A_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) in der Ebene  $U$  liegen und  $A$  ein fünfter Punkt ausserhalb  $U$  ist, dann besteht eine lineare Beziehung zwischen den Quadraten der Entfernungen  $AA_i=r_i$ , wobei die Koeffizienten der  $r_i^2$  von den  $A_i$ , aber nicht von  $A$  abhängen. Für dieses Lemma soll ein anderer Beweis sowie die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen mitgeteilt werden.

2. Sei  $OXYZ$  ein rechtwinkliges Achsenkreuz;  $U$  habe die Gleichung  $z=0$ ,  $O$  sei die Normalprojektion von  $A$  auf  $U$ ,  $OX$  und  $OY$  beliebig in  $U$ ,  $A_i=(x_i, y_i)$ ,  $\overline{OA}=h$ . Dann ist

$$r_i^2 = h^2 + x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

Bezeichnet  $F_1$  den Flächeninhalt des (orientierten) Dreiecks  $A_2A_3A_4$ , dann ist

$$2F_1 = D_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Die Inhalte von  $A_1A_3A_4$ ,  $A_1A_2A_4$  und  $A_1A_2A_3$  seien entsprechend  $F_2, F_3, F_4$ . Aus  $|1 \ x_i \ y_i \ 1| = 0, i=1, 2, 3, 4$ , folgt

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 0. \quad (3)$$

Wir nehmen an, dass keine drei Punkte  $A_i$  kollinear sind; dann ist  $F_i \neq 0, i=1, 2, 3, 4$ . Multiplikation von (1) mit  $F_1, -F_2, F_3, -F_4$  und Summierung gibt

$$F_1 r_1^2 - F_2 r_2^2 + F_3 r_3^2 - F_4 r_4^2 = \frac{1}{2} D, \quad (4)$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Wir zeigen, dass auch  $D$  nur von den vier Punkten  $A_i$  abhängt und nicht von  $A$  oder  $O$ . Der Umkreis  $C_1$  von  $A_2A_3A_4$  hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_i^2 + y_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad i = 2, 3, 4. \quad (6)$$

Der Koeffizient von  $x^2+y^2$  in (6) ist  $D_1$ ; die Gleichung (6) wird also normiert, wenn man durch  $D_1$  teilt. Substituiert man danach  $x_1, y_1$ , dann erhält man bekanntlich die Potenz  $m_1$  von  $A_1$  in bezug auf  $C_1$ . Wir haben also  $D/2 = m_1 F_1$ . Weiterhin ist  $m_1 F_1 = -m_2 F_2 = m_3 F_3 = -m_4 F_4$ . Wir bemerken noch, dass das rechte Glied in (4) dann und nur dann verschwindet, wenn die Punkte  $A_i$  auf einem Kreis liegen.

3. Man kann (4) zu einem Satz im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E_n$  erweitern: gehören die  $(n+1)$  Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  einer  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperebene  $U$  von  $E_n$  an und ist  $A$  ein Punkt ausserhalb  $U$  und  $\overline{AA}_i = r_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ), dann gilt

$$F_1 r_1^2 - F_2 r_2^2 + \dots + (-1)^n F_{n+1} r_{n+1}^2 = (-1)^{k+1} m_k F_k. \quad (7)$$

Dabei ist  $F_i$  der Inhalt des (als nichtsingulär vorausgesetzten) Simplexes  $S_i$ , das entsteht, wenn man aus der Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$  den Punkt  $A_i$  entfernt;  $k$  ist eine beliebige Zahl aus  $\{1, 2, \dots, (n+1)\}$ , und  $m_k$  ist die Potenz von  $A_k$  in bezug auf die  $S_k$  umschriebene Hypersphäre  $C_k$ .

4. Der Satz gilt übrigens auch für  $n=2$ . Sind  $A_1, A_2, A_3$  drei Punkte auf der  $X$ -Achse  $U$  in  $E_2$  und ist  $A$  ein Punkt ausserhalb  $U$ , dann hat man  $F_1 = A_3 A_2 = x_2 - x_3$ ,  $F_2 = A_3 A_1$ ,  $F_3 = A_2 A_1$  (mit  $F_1 - F_2 + F_3 = 0$ ); das rechte Glied von (7) lautet nun

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) = A_2 A_3 \cdot A_3 A_1 \cdot A_1 A_2,$$

so dass

$$A_3 A_2 \cdot A A_1^2 + A_1 A_3 \cdot A A_2^2 + A_2 A_1 \cdot A A_3^2 + A_3 A_2 \cdot A_1 A_3 \cdot A_2 A_1 = 0. \quad (8)$$

Dies ist die sogenannte Stewartsche Formel der Elementargeometrie.

5. Für  $n=3$  kann man dem rechten Glied von (4) noch eine andere Gestalt geben.  $A_4$  sei ein Punkt in der Ebene  $U$  des Dreiecks  $\Delta_4 = A_1 A_2 A_3$  vom Inhalt  $F_4$ ,  $M_4$  der Umkreismittelpunkt,  $R_4$  der Umkreisradius und  $F'_4$  der Inhalt des Fusspunktdreiecks von  $A_4$  in bezug auf  $\Delta_4$ . Dann ist nach einer Formel von Gergonne [2]

$$F'_4 = F_4 \frac{R_4^2 - M_4 A_4^2}{4 R_4^2} = -\frac{m_4 F_4}{4 R_4^2} \quad (9)$$

und deshalb

$$F_1 \cdot A A_1^2 - F_2 \cdot A A_2^2 + F_3 \cdot A A_3^2 - F_4 \cdot A A_4^2 = 4 R_4^2 F'_4. \quad (10)$$

Das rechte Glied verschwindet genau dann, wenn  $A_4$  auf dem Umkreis von  $\Delta_4$  liegt: dann ist  $F'_4 = 0$  nach dem Satz von Wallace. O. Bottema, Delft

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Wunderlich: Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten. Sber. öst. Akad. Wiss. 186, 263–280 (1977).
- 2 R.A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry, S. 139–140. Dover Publications, New York 1960.

#### Über zwei besondere Eigenschaften von Dreiecksflächernetzen

1. Als Dreiecksflächner sollen im folgenden Polyeder bezeichnet werden, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Polyedern sind z. B. Tetraeder und Oktaeder. Von ihnen kann man sich ein Papiermodell herstellen, indem man die in Abb. 1a und 1b wiedergegebenen Figuren auf ein Stück Papier zeichnet, sie entlang der Randstrecken ausschneidet, sie längs der inneren Strecken faltet und je zwei Randstrecken geeignet miteinander verklebt. Aus diesem Grund heissen die Figuren Tetraedernetz bzw. Oktaedernetz.

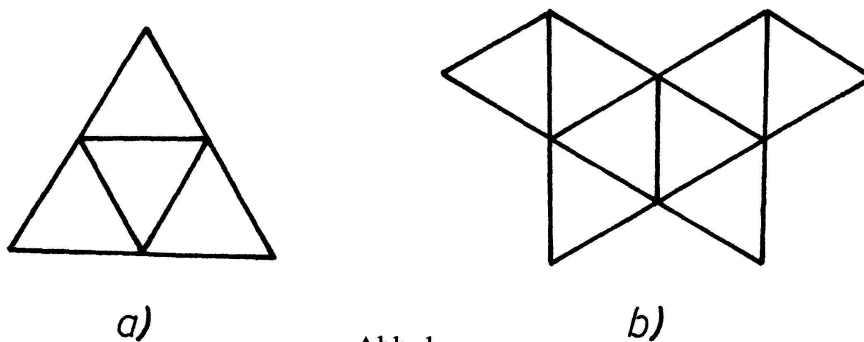


Abb. 1

In [1] bewies M. Jeger, dass es bei Verwendung von Papier mit ununterscheidbaren Seiten elf verschiedene Oktaedernetze gibt. Er nutzte dabei die Tatsache aus, dass es ebenso viele solche Netze gibt wie (in bezug auf die volle Symmetriegruppe) inäquivalente Gerüste des Eckpunkt-Kanten-Graphen des Oktaeders. Im folgenden wird gezeigt, dass ein solch eindeutiger Zusammenhang nicht bei allen Dreiecksflächnern gegeben ist, denn es gibt Dreiecksflächner, bei denen Schnitte entlang den Kanten inäquivalenter Gerüste zu demselben Netz (als Figur betrachtet) führen. Bei solchen Netzen ist daher – wie auch in der Literatur üblich – eine zusätzliche Angabe erforderlich, welche Kanten (bzw. Ecken) beim Zusammenkleben zu identifizieren sind.

Weiterhin wird gezeigt, dass diese Forderung auch noch aus einem anderen Grund sinnvoll sein kann: Es gibt nämlich Netze von Dreiecksflächnern, die zu verschiedenen Körpern zusammengeklebt werden können.

2. Wir untersuchen zunächst Netze des Tetraederzwillings, d. h. der aus zwei Tetraedern zusammengesetzten Doppelpyramide. Diese ist – bis auf Ähnlichkeit –