

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1979)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$x^2 - Axy + By^2 = 0$$

for integers x and y if and only if $x = y = 0$. Therefore by theorem 1 for non-negative integers x, y , we have $f(x, y) = 0$ if and only if $y = 0$, $f(x, y) = y > 0$ if and only if x and $y > 0$ are two consecutive terms of the sequence R , and $f(x, y) < 0$ in any other cases.

Remark: One can easily see that theorem 1 is valid for cases $A = 1, B = 1$ and $A = 2, B = 1$, but sequence R is degenerate in these cases. In case $A = 3, B = 1$ theorem 1 is false since $x = 2, y = 1$ is a solution of equation (1) and 2 is not a term of sequence R .

Péter Kiss, Teachers' Training College, Eger, Hungary

REFERENCES

- 1 James P. Jones: Diophantine representation of the Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.* **13**, 84–88 (1975).
- 2 James P. Jones: Diophantine representation of the Lucas numbers. *Fibonacci Quart.* **14**, 134 (1976).

Kleine Mitteilungen

Eine merkwürdige Familie von beweglichen Stabwerken

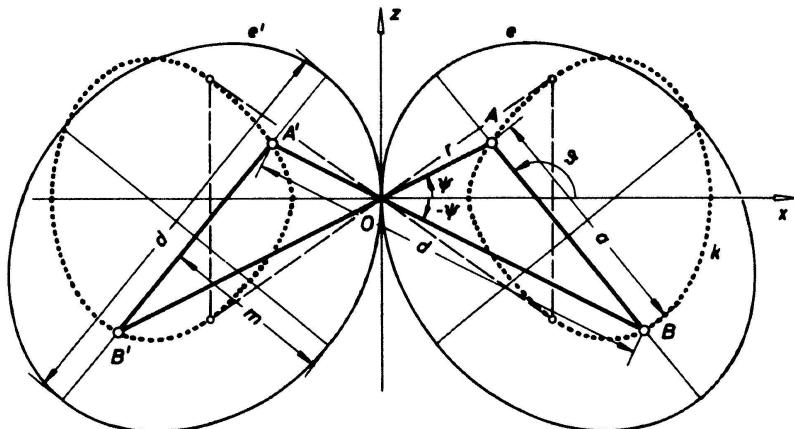
1. Sei $ABA'B'$ ein *gelenkiges Antiparallelogramm* mit den Seitenlängen $AB = A'B' = a$ und $AB' = A'B = d > a$. Wird es in seiner Ebene so bewegt, dass der Schnittpunkt O der Langseiten und die Symmetriearchse z festbleiben (Fig. 1), dann rollt bekanntlich eine Ellipse e mit den Brennpunkten A, B und der Hauptachse d auf einer kongruenten Ellipse e' mit den Brennpunkten A', B' gleitungslos ab, wie die Betrachtung des gemeinsamen Linienelements (O, z) lehrt; diese Tatsache bildet die kinematische Grundlage für elliptische Zahnräder [2]. Alle vier Gelenke des Antiparallelogramms wandern dabei auf einer gemeinsamen, aus zwei kongruenten Ovalen bestehenden Bahnkurve 6. Ordnung, wie in [5] gezeigt wurde.

Bezeichnet $r = OA$ den Radiusvektor des Punktes A und ψ den Richtungswinkel, gemessen von der zur z -Achse normalen x -Achse aus, so hat A die kartesischen Koordinaten $x = r \cos \psi, z = r \sin \psi$ und B die Koordinaten $\bar{x} = (d - r) \cos \psi, \bar{z} = (r - d) \sin \psi$. Die auf $AB = a$ bezügliche Distanzformel liefert dann für die *Bahnsextik* k die Polargleichung

$$r(d - r) \cos^2 \psi = m^2 \quad \text{mit} \quad 4m^2 = d^2 - a^2, \quad (1)$$

welche auf die kartesische Gleichung

$$(x^2 + z^2)(x^2 + m^2)^2 = d^2 x^4 \quad (2)$$



Figur 1

führt. Gleichzeitiger Tausch von r mit $d - r$ und ψ mit $-\psi$ lässt erkennen, dass k auch vom Punkt B durchlaufen wird; aus Symmetriegründen sind auch A' und B' an k gebunden. Die Kurve k ist monozirkular und besitzt im Ursprung O einen isolierten Doppelpunkt mit isotropen Wendetangenten; der Fernpunkt der z -Achse ist vierfacher Punkt mit den Asymptoten $x = \pm mi$.

Der gleichfalls von der x -Achse aus gezählte Neigungswinkel ϑ der Kurzseiten AB und $A'B'$ hängt mit jenem der Langseiten vermöge

$$a \cdot \sin \vartheta = d \cdot \sin \psi \quad (3)$$

zusammen. Hieraus folgt $\sin \psi_{\max} = a/d$.

2. Betrachtet man nun zwei kongruente Antiparallelogramme $A_1B_1A'_1B'_1$ und $A_2B_2A'_2B'_2$, die aus dem obigen durch Drehung um die z -Achse um die Winkel $\pm \varphi$ hervorgehen, so können die Gelenkskoordinaten im erweiterten Achsenkreuz $(O; x, y, z)$ angesetzt werden mit

$$\begin{aligned} A_1(r \cos \psi \cos \varphi, r \cos \psi \sin \varphi, r \sin \psi), \\ B_1((d-r) \cos \psi \cos \varphi, (d-r) \cos \psi \sin \varphi, (r-d) \sin \psi); \end{aligned} \quad (4)$$

für A_2 und B_2 ist φ durch $-\varphi$ zu ersetzen, für A'_i und B'_i sind bei x und y die Vorzeichen umzukehren.

Für die als Manteldiagonalen in einem rechteckigen Pyramidenstumpf auftretenden Strecken $A_1B_2 = A_2B_1 = A'_1B'_2 = A'_2B'_1 = b$ und $A_1B'_2 = A_2B'_1 = A'_1B_2 = A'_2B_1 = c$ findet man über die Distanzformeln mit Benützung von (4) und (1) die Ausdrücke

$$b^2 = a^2 \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 \varphi, \quad c^2 = a^2 \sin^2 \varphi + d^2 \cos^2 \varphi. \quad (5)$$

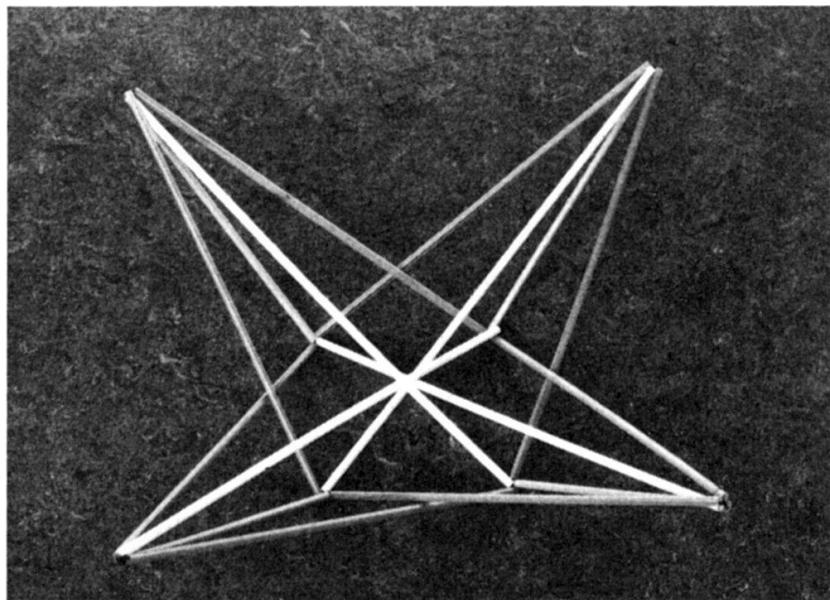
Bei festgehaltenem φ haben diese Strecken konstante Längen und können daher durch *Stäbe* materialisiert werden, ohne die Bewegung der beiden Antiparallelogramme zu behindern. – Ausgehend von der Stellung $\vartheta = \pi/2$ hat man daher den

Satz 1. *Werden von einem Quader zwei gegenüberliegende Seitenflächen entfernt und alle verbleibenden Kanten und Flächendiagonalen sowie die Raumdiagonalen durch*

gelenkig verbundene Stäbe materialisiert, so entsteht ein 16gliedriges Stabwerk, das bei festgehaltenem Raumdiagonalenschnitt eine zwangsläufige Verformung gestattet, in deren Verlauf die acht Knoten auf zwei ebenen und zueinander kongruenten Kurven 6. Ordnung vom Typ (2) wandern.

Im Zuge der Deformation stellen sich für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ zwei platte (untereinander kongruente) Grenzformen ein.

Ein beliebiges Stabwerk der vorliegenden Struktur mit acht vierfachen Gelenksknoten und 16 Stäben hätte den vollen Freiheitsgrad $F = 8 \cdot 3 - 16 = 8$. zieht man die den kongruenten Verlagerungen im Raum entsprechenden 6 Einheiten ab, so bleibt ein Deformationsgrad $f = 2$, was noch keinen Zwangslauf bedeutet. Verlangt man zusätzlich, dass die vier Hauptdiagonalen stets einen Punkt O gemeinsam haben sollen, was durch eine geeignete Schliesse zu erzwingen wäre und fünf weitere Bedingungen auferlegt¹⁾, so würde der Verformungsgrad auf $f = -3$ sinken; ein solches Stabwerk wäre also starr. Die Beweglichkeit des Stabwerks aus Satz 1 beruht demnach auf seinen speziellen Abmessungen.



Figur 2

Bei dem in Figur 2 abgebildeten, von einem Würfel abgeleiteten Studienmodell aus Plastik-Trinkhalmen, die mittels durchgezogener Zwirnfäden verknüpft wurden, erwies sich die besagte Schliesse im Zentralknoten als überflüssig, da sich die Diagonalstäbe gegenseitig ausreichend stützten.

3. In naheliegender Erweiterung kann man offenbar auch $n > 2$ durch Drehung um die gemeinsame Symmetriearchse z auseinander hervorgehende Antiparallelogramme $A_iB_iA'_iB'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) betrachten. Auch hier wird wegen (5) eine simul-

1) Sollen einander zwei Stäbe schneiden, so bedeutet dies eine einfache Bedingung, die sich etwa durch das Verschwinden des von den beiden Stäben aufgespannten Tetraedervolumens ausdrücken lässt. Für jeden zusätzlichen Stab durch den Schnittpunkt treten zwei weitere derartige Bedingungen hinzu.

tane Deformation möglich sein, bei welcher sämtliche Abstände $A_iB_j = A'_iB'_j$ und $A_iB'_j = A'_iB_j$ erhalten bleiben. Damit hat man ein bewegliches Stabwerk aus $4n^2$ Gliedern mit $4n$ Knoten, welches in der Mittelstellung $\vartheta = \pi/2$ aus den Mantelkanten und Diagonalen eines geraden $2n$ -seitigen Prismas besteht, das einem Drehzylinder eingeschrieben ist. – Nach Entfernung aller Knoten A'_i und B'_j sowie der von ihnen ausgehenden Stäbe verbleibt ein reduziertes Stabwerk aus nur mehr n^2 Gliedern mit $2n$ Knoten. Demnach gilt

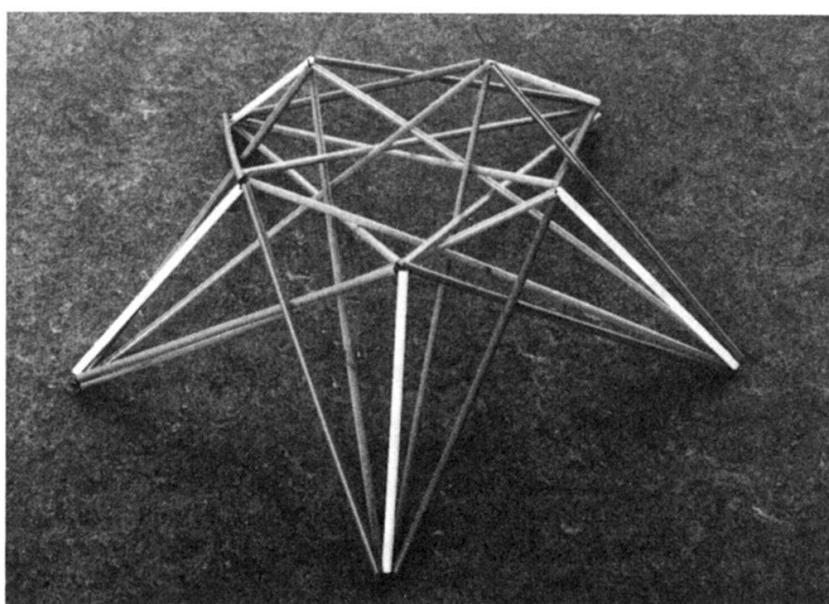
Satz 2. *Werden bei einem geraden n -seitigen Prisma, das einem Drehzylinder eingeschrieben ist, alle Ecken des einen Basispolygons mit sämtlichen Ecken des anderen durch starre Stäbe gelenkig verbunden, so entsteht ein bewegliches Stabwerk aus n^2 Gliedern mit $2n$ Knoten, das eine zwangsläufige Verformung gestattet, bei welcher sämtliche Knoten auf untereinander kongruenten ebenen Bahnkurven 6. Ordnung der Gattung (2) wandern.*

Ein beliebiges Stabwerk der betrachteten Struktur hätte den vollen Freiheitsgrad $F = 6n - n^2$ und den Deformationsgrad

$$f = 6n - n^2 - 6. \quad (6)$$

Für $n \geq 5$ wird $f \leq -1$, was Starrheit bedeuten würde. Die doch vorhandene Beweglichkeit der vorliegenden Stabwerke besteht daher wieder nur aufgrund der speziellen Abmessungen. Ein aus einem regelmässigen fünfseitigen Prisma abgeleitetes Modell zeigt Figur 3.

Für $n = 6$ hat man $f = -6$. Werden die sechs Hauptdiagonalen weggelassen, so entsteht ein reduziertes Stabwerk mit $f' = 0$, das dennoch zwangsläufig beweglich ist. Entfernung der zwölf Nebendiagonalen erhöht den Deformationsgrad auf $f'' = 6$; wie ein von einem regelmässigen sechsseitigen Prisma abgeleitetes Modell gezeigt hat, scheint trotzdem die gegenseitige Stützung der verbliebenen Haupt- und



Figur 3

Manteldiagonalen auszureichen, um die zu erwartende hohe Beweglichkeit auf eine zwangsläufige einzuschränken. – Wählt man speziell die Abmessungen $a:b:c:d = 1:\sqrt{3}:\sqrt{7}:3$ [die den Relationen (5) mit $\varphi = \pi/6$ genügen], so bilden die Manteldiagonalen in der Mittelstellung $\vartheta = \pi/2$ zwei orthogonale Sechsecke, nämlich Kantenzüge auf zwei Würfeln mit der Seitenlänge b . Ein solches Sechseck ist insofern bemerkenswert, als die Knoten mit *Zylindergelenken* versehen werden könnten. Dieses von Kunze und Stachel in [1] untersuchte «Würfelgetriebe» gab den Anstoss zur Untersuchung [5] und damit letztlich auch für die vorliegende Mitteilung.

4. Der durch Satz 2 erfasste Sachverhalt ist nur ein einfacher Sonderfall eines viel allgemeineren Phänomens, das im modernen Vermessungswesen von Bedeutung ist. Dort ist nämlich der klassischen Triangulation, die vorwiegend auf Winkel-messungen beruht, seit den Fortschritten der elektronischen Entfernungsmessung in der sogenannten *Trilateration* ein Konkurrent erwachsen, der grundsätzlich mit Distanzmessungen allein auskommen könnte. Hier gilt beispielsweise, wie in [3] gezeigt wurde, die zur Vermeidung von Ausnahmesituationen wichtige Feststellung: Werden von beliebig vielen, der Lage nach unbekannten Punkten eines *Kegelschnitts* c aus sämtliche Distanzen zu einer beliebig hohen Anzahl von ebenfalls unbekannten, beliebig im Raum verteilten Zielpunkten gemessen, so liegt eine «gefährliche Konfiguration» vor, weil die sonst bei hinreichender Zahl von Messdaten mögliche Bestimmung der gegenseitigen Lage aller Stand- und Zielpunkte auf eine stetige Schar von unendlich vielen Lösungen führt. Ein entsprechendes Modell, in welchem die gemessenen Distanzen maßstabsgerecht durch starre, gelenkig verbundene Stäbe materialisiert sind, wird demnach eine kontinuierliche Deformation gestatten.

Für den Fall eines *Kreises* c wurde dieses Verhalten in [4] beschrieben. Die vorliegenden speziellen Konfigurationen, insbesondere die von regelmässigen Prismen abgeleiteten, zeichnen sich durch eine ausgesprochen ästhetische Wirkung aus. Die Herstellung einschlägiger Modelle mag eine anregende Aufgabe im Handfertigkeitsunterricht bieten.

5. Von geometrischem Interesse ist vielleicht noch die Untersuchung der bei der Formänderung des Stabwerks auftretenden *Bahnflächen*, welche die zur z -Achse windschiefen Stäbe überstreichen. Hierzu genügt es, etwa die Verbindungsgerade g der Punkte A_1 und B_2 gemäss (4) zu betrachten. Wird zur Abkürzung $r \cos \psi = u$ und $r \sin \psi = v$ gesetzt, so haben diese Punkte mit Rücksicht auf (1) die Koordinaten

$$\begin{aligned} A_1: \quad & x_1 = u \cos \varphi, \quad y_1 = u \sin \varphi, \quad z_1 = v; \\ B_2: \quad & x_2 = \frac{m^2}{4} \cos \varphi, \quad y_2 = -\frac{m^2}{4} \sin \varphi, \quad z_2 = -\frac{m^2 v}{u^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Grössen u und v sind dabei durch die (2) entsprechende Beziehung

$$(u^2 + v^2)(u^2 + m^2)^2 = d^2 u^4 \quad (8)$$

gekoppelt. Das bedeutet

$$v = \frac{u\sqrt{Q}}{(u^2 + m^2)} \quad \text{mit} \quad Q = d^2 u^2 - (u^2 + m^2)^2. \quad (9)$$

Für die Plücker-Koordinaten der Gerade g findet man über (7):

$$\begin{aligned} p_1 &= (u^2 - m^2) \cos \varphi, & p_4 &= 0, \\ p_2 &= (u^2 + m^2) \sin \varphi, & p_5 &= \frac{-2m^2u}{u^2 + m^2} \sqrt{Q} \cos \varphi, \\ p_3 &= \sqrt{Q}, & p_6 &= 2m^2u \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Ermittlung der Schnittpunkte der Strahlfläche (10) mit einer Geraden läuft auf die Auflösung einer Gleichung der Bauart $\sum a_i p_i = 0$ nach u hinaus; dies führt auf eine algebraische Gleichung 8. Grades, woraus zu schliessen ist, dass es sich bei der Fläche um eine *Regelfläche 8. Grades* handelt.

Das Verschwinden von p_4 besagt, dass die Erzeugenden der Fläche die x -Achse treffen, was auch unmittelbar einzusehen ist. Der durch $x:y:z = p_1:p_2:p_3$ bestimmte *Richtkegel* erweist sich als *quadratisch*; Elimination von u führt auf seine Gleichung

$$\begin{aligned} ax^2 - \beta y^2 + \gamma z^2 &= 0 \quad \text{mit} \\ a &= d^2 \sin^2 \varphi, \quad \beta = a^2 \cos^2 \varphi, \quad \gamma = m^2 \sin^2 2\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Weiterhin prüft man unschwer nach, dass die Flächenerzeugenden den *hyperbolischen Zylinder*

$$\frac{x^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi} = m^2 \quad (12)$$

berühren. Mit Hilfe der drei festgestellten Leitgebilde – x -Achse, Fernkegelschnitt des Richtkegels (11), Leitzylinder (12) – ist die Flächenordnung 8 zu bestätigen und sind die Symmetrien bezüglich aller drei Koordinatenebenen zu erkennen. Die x -Achse erweist sich dabei als vierfache Leitgerade, überdies existiert eine vierfache Erzeugende in der Ferngerade der xz -Ebene. Die Berührungsgeraden der Regelfläche mit dem Leitzylinder (12) wird zufolge einer elementaren Hyperbeleigenschaft von der Stabmitte durchlaufen und ist eine Raumkurve 8. Ordnung, bestehend aus zwei Achterschleifen.

W. Wunderlich, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 S. Kunze und H. Stachel: Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe. El. Math. 29, 25–32 (1974).
- 2 W. Wunderlich: Ebene Kinematik. Hochschultaschenbücher, Bd. 447. Mannheim 1970.
- 3 W. Wunderlich: Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten. Sber. öst. Akad. Wiss. 186, 263–280 (1977).
- 4 W. Wunderlich: Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels. El. Math. 32, 115–117 (1977).
- 5 W. Wunderlich: Windschiefe Gelenksechsecke mit schneidenden Diagonalen. Rad. Jugosl. Akad. Zagreb 1974, 115–127.