

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 34 (1979)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Extrapolationsverfahren in der numerischen Analysis  
**Autor:** Ade, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33805>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Elementarmathematik und Didaktik

## Extrapolationsverfahren in der numerischen Analysis

In den vergangenen Jahren wurden viele Vorschläge gemacht, die Mathematik an den Gymnasien praxisorientierter und anwendungsbezogener zu gestalten. Daher wurden auch immer wieder Fragestellungen der numerischen Mathematik daraufhin untersucht, ob sie für die Schule geeignet sind. In diesen Rahmen gehört auch diese Note. Es geht um das für das numerische Rechnen fundamentale Prinzip der sogenannten Richardson-Extrapolation zur Genauigkeitssteigerung. Die Grundidee dieser Vorgehensweise kann man, an geeigneten Beispielen illustriert, durchaus in der Schule verdeutlichen. Damit lernt der Schüler eine Methode kennen, die heute bei fast allen aus dem Bereich der Analysis stammenden numerischen Aufgabenstellungen zur Anwendung kommt.

### 1. Einleitung

Neben dem axiomatisch-deduktiven Aspekt der Mathematik spielt der konstruktive Aspekt eine nicht weniger bedeutsame Rolle. Konstruktive Methoden sind Verfahren, welche durch Ausführung von endlich vielen rationalen Rechenoperationen die Lösung mathematischer Probleme mit beliebiger Genauigkeit liefern. Die numerische Analysis beschäftigt sich mit der Theorie solcher konstruktiver Methoden. Seit etwa 40 Jahren – mit dem Beginn der Entwicklung elektronischer Rechenanlagen, welche die Rechengeschwindigkeit um das Millionenfache gesteigert haben – hat die numerische Mathematik gegenüber früheren Zeiten ein völlig neues Gesicht bekommen. Hauptgegenstände der numerischen Analysis sind: a) die Bereitstellung von Algorithmen der verschiedensten Art zur Lösung mathematischer Probleme, b) die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der von solchen Algorithmen gelieferten Zahlenfolgen sowie etwa c) die Frage nach dem Fehler, den man begeht, wenn man den Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht. Dabei kann man sich prinzipiell auf zwei ganz verschiedene Standpunkte stellen: Einmal kann man sich fragen, wie gross der Fehler höchstens ist, man interessiert sich für eine Aussage der Form  $|u - u(h)| < \text{cst} \cdot h^p$ , wo  $u$  die exakte Lösung des Problems,  $u(h)$  eine Näherungslösung in Abhängigkeit von einem die Approximation beschreibenden Parameter  $h$  ist und  $p \in \mathbb{R}$ , zum andern kann man sich fragen, wie sich der Fehler asymptotisch verhält, d.h. man interessiert sich für eine Aussage der Form

$$|u - u(h)| = O(h^p) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Das Extrapolationsprinzip, das im folgenden beschrieben werden soll, liefert eine Möglichkeit, die Konvergenz der durch einen Algorithmus gelieferten Näherungsfolge zu beschleunigen, falls eine asymptotische Fehleraussage bekannt ist. Wir wollen die Fragestellung zunächst am Beispiel studieren:

## 2. Beispiele

### 2.1 Näherungsweise Berechnung von $\pi$

Archimedes hat schon etwa 250 v. Chr. Schranken für die transzendente Zahl  $\pi$  angegeben, indem er die Umfänge regulärer, dem Einheitskreis ein- bzw. umbeschriebener Polygone berechnet hat. Unter Verwendung von 96seitigen Polygonen zeigte er  $3(10/71) < \pi < 3(1/7)$ . Diese Vorgehensweise wollen wir nun etwas genauer untersuchen:

Für den Umfang des regelmässigen  $n$ -seitigen Polygons, das dem Einheitskreis einbeschrieben ist, gilt  $2n \cdot \sin(\pi/n)$ . Wir betrachten den halben Umfang  $T_n := n \cdot \sin(\pi/n)$  bzw. mit  $h := (1/n)$  die Grösse  $T(h) = (1/h) \cdot \sin \pi h$ . Wir wollen nun diese Umfänge nicht ausrechnen, sondern deren Abweichung von  $\pi$  studieren. Dazu bedienen wir uns der für alle reellen Argumente konvergenten Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion. Man erhält damit

$$T(h) = \pi - \frac{\pi^3}{3!} \cdot h^2 + \frac{\pi^5}{5!} \cdot h^4 - + \dots$$

Für  $h < 1$ , also  $n > 1$ , ist offenbar  $T(h) < \pi$ , somit ist  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton zunehmende Folge unterer Schranken für den halben Umfang des Einheitskreises, d. h. für  $\pi$ .

Für den Umfang des regelmässigen,  $n$ -seitigen, dem Einheitskreis umbeschriebenen Polygons erhält man ebenfalls auf elementargeometrischem Wege  $2n \cdot \tan(\pi/n)$ . Wir bezeichnen den halben Umfang mit  $T'_n := n \cdot \tan(\pi/n)$  bzw.  $T'(h) = (1/h) \cdot \tan \pi h$  mit  $h := (1/n)$ . Unter Verwendung der Potenzreihenentwicklung für die Tangensfunktion erhält man

$$T'(h) = \pi + \frac{\pi^3}{3} \cdot h^2 + \frac{2\pi^5}{15} \cdot h^4 + \dots \quad \text{für } h < \frac{1}{2}.$$

Die Reihe konvergiert für  $h < 1/2$ , somit stellt  $(T'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge oberer Schranken für  $\pi$  dar.

Eine Auswertung der archimedischen Vorgehensweise liefert für  $n=96$  die Zahl  $\pi$  auf 2 Dezimalen (Archimedes – 250), für  $n=2^{30}$  die Zahl  $\pi$  auf 15 Dezimalen (Romanus 1593), für  $n=2^{62}$  die Zahl  $\pi$  auf 35 Dezimalen (Ludolph van Ceulen 1610). Um die angegebene Genauigkeitssteigerung zu erreichen, ist also ein riesiger Rechenaufwand nötig.

Die naheliegende Frage nach der Verbesserung der Konvergenz führte schon im Jahre 1654 Huyghens auf die folgende Idee, die dem Extrapolationsprinzip zugrunde liegt:

Betrachte

$$T(h) = \pi + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_i h^{2i} + \dots$$

sowie

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \pi + a_1 \frac{h^2}{4} + a_2 \frac{h^4}{16} + \cdots + a_i \frac{h^{2i}}{2^{2i}} + \cdots$$

und bilde

$$T_1(h) := \frac{1}{3} \left( 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) \right) = \pi - \frac{1}{4} a_2 h^4 - \frac{5}{16} a_3 h^6 - \cdots$$

Mit den obigen Koeffizienten in der  $h$ -Entwicklung von  $T$  heisst dies:

$$T_1(h) = \pi - \frac{1}{480} \cdot \pi^5 \cdot h^4 - \frac{5}{16 \cdot 7!} \cdot \pi^7 \cdot h^6 - \cdots$$

und damit ist der  $h^2$ -Term eliminiert, der Fehler  $T_1(h) - \pi$  ist also noch  $O(h^4)$  für  $h \rightarrow 0$ . Man bekommt für  $n = 2^{30}$  damit  $T_1(1/2^{30})$ , und das bedeutet, man bekommt  $\pi$  schon auf fast 35 Dezimalen genau. Das Huyghenssche Vorgehen beschleunigt somit die Konvergenz gewaltig.

Eine Wiederholung des beschriebenen Vorgehens bietet sich geradezu an, man erhält:

$$T_2(h) := \frac{1}{15} \left( 2^4 \cdot T_1\left(\frac{h}{2}\right) - T_1(h) \right) = \pi - \frac{1}{64 \cdot 7!} \cdot \pi^7 \cdot h^6 - \cdots$$

und erkennt, dass der Fehler in  $T_2(h)$  noch von der Ordnung  $h^6$  ist.

## 2.2 Numerische Integration

Gegeben sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f \in C^{2m-2}[a, b]$ ,  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  sei in  $n$  Teilintervalle geteilt mit  $h := (b-a)/n$  durch  $x_0 = a, x_1 = a+h, \dots, x_n = a+nh = b$ . Gesucht sei eine Näherung für  $I := \int_a^b f(x) dx$ .

Zur numerischen Integration werde die Trapezregel benutzt, die man bekanntlich dadurch erhält, dass man  $f$  in den  $n$  Teilintervallen von  $[a, b]$  linear durch Polynome interpoliert und dann exakt integriert. Mit  $f(x_i) = f_i = f(a+ih)$  lautet die Trapezregel:

$$T(h) = \frac{1}{2} h (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) .$$

Mit Hilfe der Euler-MacLaurinschen Summenformeln ( $\sim 1740$ ) kann man zeigen:

$$\int_a^b f(x) dx - T(h) = - \sum_{i=1}^m \frac{B_{2i}}{(2i)!} \cdot h^{2i} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] + R_{2m+2}$$

mit  $R_{2m+2} = O(h^{2m+2})$  und  $B_i$  die Bernoullischen Zahlen.

Es gilt somit:

$$T(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_m h^{2m} + O(h^{2m+2}) ,$$



d. h. der Fehler  $T(h) - I$  ist bestimmt durch die Potenz  $h^2$ .

Beispiel:  $f(x) = \exp(-x^2)$ ,  $[a, b] = [0, 1/2]$ . Man erhält für  $n = 1$ , d. h.  $h = h_0 = 1/2$ :  $T(h_0) = 0,4447$ ; für  $n = 2$ , d. h.  $h = h_0/2 = 1/4$ :  $T(h_0/2) = 0,4572$  an Stelle von 0,4613 auf 4 Dezimalen.

Die Huyghenssche Idee zur Genauigkeitssteigerung der Trapezregel bedeutet, dass man in der obigen Entwicklung nach  $h$ -Potenzen den führenden  $h^2$ -Term durch Linearkombination der Ausdrücke für  $h$  und  $h/2$  eliminiert. Man bildet also mit

$$T(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_m h^{2m} + O(h^{2m+2})$$

und

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I + a_1 \frac{h^2}{2^2} + a_2 \frac{h^4}{2^4} + \dots + a_m \frac{h^{2m}}{2^{2m}} + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+2}\right)$$

$$\begin{aligned} T_1(h) &:= \frac{1}{3} \left( 4 T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) \right) = I - \frac{1}{4} a_2 h^4 - \frac{5}{16} a_3 h^6 - \dots \\ &\quad - \frac{1}{3} \left( \frac{2^{-2m+2} - 1}{2^{2m}} \right) a_{2m} h^{2m} + O(h^{2m+2}). \end{aligned}$$

Dies aber ist, wie man leicht zeigen kann, gerade die bekannte Simpsonregel, nämlich jene Quadraturformel, die dadurch entsteht, dass man  $f$  in  $[x_i, x_{i+1}]$  durch ein quadratisches Polynom interpoliert und dann exakt integriert.

Auf das obige Zahlenbeispiel angewandt, liefert dieses Vorgehen der Genauigkeitssteigerung für  $n = 1$ , d. h.  $h_0 = 1/2$ , den Näherungswert  $T_1(h_0) = 0,4614$ .

Dieses Vorgehen kann man nun in bekannter Weise fortsetzen, indem man jeweils mit zwei verschiedenen  $h$ -Werten arbeitet. Man kann das Verfahren allerdings noch effektiver machen, indem man eine unendliche Folge verschiedener  $h$ -Werte in die Betrachtung einbezieht. Dieser Gedanke stammt von Romberg 1955 [6]. Man geht dabei folgendermassen vor: Man teilt  $[a, b]$  in 1, 2, 4, 8, ... Teilintervalle und berechnet  $I$  mittels der Trapezregel für diese Teilintervalle, dabei erhält man folgende Näherungswerte für  $h = b - a$ :

$$T(h), \quad T\left(\frac{h}{2}\right), \quad T\left(\frac{h}{4}\right), \dots,$$

allgemein:

$$T\left(\frac{h}{2^i}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Durch Linearkombination nach der Vorschrift von oben wird nun aus je zwei aufeinanderfolgenden Näherungen eine neue Folge, die  $T_1$ -Folge, gebildet:

$$T_1(h), \quad T_1\left(\frac{h}{2}\right), \quad T_1\left(\frac{h}{4}\right), \dots,$$

allgemein:

$$T_1\left(\frac{h}{2^i}\right) = \frac{4T\left(\frac{h}{2^{i+1}}\right) - T\left(\frac{h}{2^i}\right)}{2^2 - 1}, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

Die Fortsetzung liefert eine  $T_2$ -Folge:

$$T_2(h), \quad T_2\left(\frac{h}{2}\right), \quad T_2\left(\frac{h}{4}\right), \dots$$

und schliesslich eine  $T_k$ -Folge mit

$$T_k\left(\frac{h}{2^i}\right) = \frac{2^{2k} T_{k-1}\left(\frac{h}{2^{i+1}}\right) - T_{k-1}\left(\frac{h}{2^i}\right)}{2^{2k} - 1}, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

Nach jeder Linearkombination ist die Verbesserung des Fehlers zwei  $h$ -Potenzen, der Fehler in den  $T_k$  ist somit von der Ordnung  $h^{2k+2}$ . Auf unser Beispiel angewandt, liefert dies:

$T\left(\frac{h}{2^i}\right)$	$T_1\left(\frac{h}{2^i}\right)$	$T_2\left(\frac{h}{2^i}\right)$	$T_3\left(\frac{h}{2^i}\right), \dots$
0,4447			
0,4572	0,4614		
0,4603	0,4613	0,4613	
0,4610	0,4613	0,4613	0,4613
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

### 3. Allgemeines Prinzip der Extrapolation

Eine unbekannte Grösse  $a_0$  wird durch eine Grösse  $T(h)$ ,  $h > 0$ , approximiert, und es gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = a_0$ .

Es sei bekannt, dass  $T$  für  $h \rightarrow 0$  eine asymptotische Entwicklung besitzt der Form

$$T(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_{m-1} h^{m-1} + R_m(h), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

mit  $|R_m(h)| < C_m h^m$  für  $h > 0$ , wobei  $a_1, a_2, \dots, C_1, C_2, \dots$  Konstanten unabhängig von  $h$  seien.

Der Algorithmus der Extrapolation lautet nun: Man wähle eine Nullfolge  $(r^i h_0)_{i \in \mathbb{N}_0}$  reeller Zahlen mit  $0 < r < 1$ ,  $h_0 > 0$  und bilde für  $i = 0, 1, 2, \dots$  die Grössen

$$T_{i,0} := T(r^i h_0), \quad T_{i,k+1} := \frac{T_{i,k} - r^{k+1} T_{i-1,k}}{1 - r^{k+1}}, \quad k = 0(1)(i-1).$$

Für  $r^i = 1/2^i$  erhält man gerade die Grössen des zweiten Beispiels, wenn man beachtet, dass man dort eine Entwicklung nach Potenzen von  $h^2$  hat.

Zur Durchführung von Handrechnungen ordnet man die Werte zweckmässigerweise in Form einer sogenannten Tafel an:

$T_{0,0}$					
$T_{1,0}$	$T_{1,1}$				
$T_{2,0}$	$T_{2,1}$	$T_{2,2}$			
$T_{3,0}$	$T_{3,1}$	$T_{3,2}$	$T_{3,3}$		
$T_{4,0}$	$T_{4,1}$	$T_{4,2}$	$T_{4,3}$	$T_{4,4}$	
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Eine genauere Untersuchung zeigt nun, dass die Tafel – und damit der Algorithmus – die folgenden wichtigen Eigenschaften besitzt (siehe [1]):

- a) Die Werte in jeder Spalte streben gegen  $a_0$ .
- b) Die Werte in jeder Diagonalen streben gegen  $a_0$ .
- c) Die Werte in der  $(k+1)$ -Spalte streben schneller gegen  $a_0$  als die Werte in der  $k$ -Spalte in dem folgenden Sinne:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_{i,k+1} - a_0}{T_{i,k} - a_0} = 0.$$

- d) Für jeden festen Wert von  $k \geq 0$  gilt:

$$T_{i,k} = a_0 + (-1)^n a_{k+1} r^{-(k/2)(k+1)} (r^i h_0)^{k+1} + O((r^i h_0)^{k+2}).$$

- e) Bei geometrischer Schrittweitenfolge (wie sie oben betrachtet wurde) gilt: Falls die Werte in der ersten Spalte mit Fehlern behaftet sind, deren Beträge  $< \varepsilon$  sind, so ist der resultierende Fehler im Schema nirgends grösser als  $2\varepsilon$  (der Algorithmus ist also numerisch stabil).

Die folgenden Ausführungen sollen deutlich machen, was hinter dem Extrapolationsalgorithmus steht. Man betrachte die  $m+1$ -Werte  $T_{i,0} := T(r^i h_0)$ ,  $i = 0(1)m$  und dazu die  $m+1$ -Paare:  $(h_0, T_{0,0})$ ,  $(h_0 r, T_{1,0})$ , ...,  $(h_0 r^m, T_{m,0})$ . Durch diese  $m+1$ -Punkte lege man nun das (wegen paarweise verschiedener Stützstellen) eindeutig bestimmte Lagrangesche Interpolationspolynom  $P_m$  vom Grade  $m$ . In dem Ansatz  $P_m(h) = b_0 + b_1 h + \dots + b_m h^m$  sind dann die Koeffizienten  $b_0, \dots, b_m$  aus der Interpolationsforderung  $P_m(h_0 r^i) = T_{i,0}$  für  $i = 0(1)m$  zu bestimmen.

Nun extrapoliere man auf den Wert  $h=0$ , d.h. man ermittle den Wert des Interpolationspolynoms  $P_m$  an der Stelle  $h=0$  ausserhalb des Stützstellenintervalls und erhält damit in  $P_m(h=0)$  eine Näherung für  $T(0)$ .

Wiederholt man die Konstruktion solcher Interpolationspolynome für dieselben Stützstellen, aber nacheinander die Stützwerte  $T_{i,1}$ ,  $T_{i,2}$ ,  $T_{i,3}$ , ... mit  $i=0, 1, 2, \dots$ , so erhält man eine Folge von Interpolationspolynomen und nach Extrapolation auf  $h=0$  eine Folge von Näherungswerten für  $T(0)$ .

Wendet man zur Berechnung der Werte dieser Interpolationspolynome an der Stelle  $h=0$  (die ja keine Stützstelle ist) den Algorithmus von Neville (1934) an, so erhält man gerade das obige Schema.

#### Bemerkungen:

a) Die ganze Vorgehensweise ist noch erheblicher Verallgemeinerungen fähig [1, 2, 4, 6]: Man kann etwa viel allgemeinere Schrittweiten-Nullfolgen zulassen; die asymptotische Entwicklung – auf der das ganze Vorgehen beruht – braucht nicht nur ganze  $h$ -Potenzen zu enthalten; anstatt Polynominterpolation kann man auch rationale Interpolation anwenden.

b) Historisch gesehen gehen die ersten Ansätze dieser Methode zurück auf Huyghens 1654, Sheppard 1900, Milne 1903. Die erste systematische Untersuchung und Anwendung auf viele Aufgabenstellungen stammt von Richardson 1927 (Richardson-Extrapolation). Zur selben Zeit haben sich auch Bogoljuboff und Kryloff mit dieser Vorgehensweise beschäftigt. 1955 nahm Romberg die Idee wieder auf und iterierte die Richardson-Extrapolation bei Anwendung auf die numerische Integration. Ab 1960 wurden viele grundlegenden Arbeiten, insbesondere zur Fehleranalyse des Verfahrens, veröffentlicht, vor allem von Bauer, Rutishauser, Stiefel, Stoer, Bulirsch.

### 4. Numerische Bedeutung der Extrapolationsverfahren

Die Methode der Extrapolation stellt eine Möglichkeit dar, die Näherungen  $T(h)$  einer Grösse  $a_0$  zu verbessern, falls eine asymptotische Entwicklung bekannt ist. Nun wird man vielleicht fragen, warum diese aufwendige Vorgehensweise. Warum lässt man nicht einfach  $h$  gegen Null gehen, d.h. nimmt eine beliebige Verkleinerung der Schrittweite vor? Dann wird der Fehler zwischen exakter Lösung und Näherungslösung – der sogenannte Diskretisierungsfehler – natürlich kleiner. Aber für die Numerik kommt nun ein entscheidender, neuer Gesichtspunkt ins Spiel: Seit 1955 [5] ist nämlich bekannt, dass sich mit  $h \rightarrow 0$  der Rundungsfehler im allgemeinen erheblich vergrößert.

Die Extrapolationsverfahren haben folgende numerische Vorteile:

- a) Sie verkleinern den Diskretisierungsfehler durch sukzessive Elimination von  $h$ -Potenzen in der asymptotischen Entwicklung.
- b) Sie vergrößern im allgemeinen (bei geeigneter Auswahl der Schrittweiten-Nullfolgen) den Rundungsfehler nicht.
- c) Der Arbeitsaufwand ist kleiner als bei Rechnung mit beliebig kleinen Schrittweiten  $h$ .

Insgesamt stellen die Extrapolationsverfahren für sehr viele Probleme den einfachsten und zugleich günstigsten Weg zur Verbesserung von Näherungslösungen

dar. Sie werden mit grossem Erfolg angewendet bei der numerischen Behandlung von einfachen und mehrfachen Integralen, Anfangs-, Rand- und Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, Differentiationsaufgaben usw.

## 5. Einige Anwendungen des allgemeinen Extrapolationsprinzips

5.1. Sei wieder eine unbekannte Grösse  $a_0$  durch eine Grösse  $T(h)$ ,  $h > 0$ , approximiert mit  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = a_0$ , und es gelte

$$T(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + O(h^6),$$

wobei  $a_1, a_2$  Konstanten unabhängig von  $h$  seien.  
Betrachtet man nun

$$T(2h) = a_0 + 4a_1 h^2 + 16a_2 h^4 + O(h^6)$$

sowie

$$T(3h) = a_0 + 9a_1 h^2 + 81a_2 h^4 + O(h^6)$$

und eliminiert die Grössen  $a_1$  und  $a_2$ , so erhält man

$$a_0 = \frac{1}{10} \{ 15 \cdot T(h) - 6 \cdot T(2h) + T(3h) \} + O(h^6).$$

5.2. Betrachtet man nun noch einmal die näherungsweise Berechnung von  $\pi$  im Beispiel 2.1, so gilt für den halben Umfang des dem Einheitskreis eingeschriebenen, regelmässigen,  $n$ -seitigen Polygons

$$T(h) = \frac{1}{h} \cdot \sin \pi h = \pi - \frac{\pi^3}{3!} \cdot h^2 + \frac{\pi^5}{5!} \cdot h^4 + O(h^6).$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} T\left(h = \frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 2, & T\left(h = \frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \sqrt{3}, \\ T\left(h = \frac{1}{6}\right) &= 6 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 3. \end{aligned}$$

Für  $a_0 = \pi$  erhält man damit aufgrund von Abschnitt 5.1 mit  $h = 1/6$

$$a_0 = \frac{1}{10} \left\{ 15 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3} + 2 \right\} + O(h^6) = 3,1411 + O(h^6),$$

also einen besseren Näherungswert für  $\pi$  als der von Archimedes mittels des 96seitigen Polygons gewonnene Wert.

5.3. Durch Extrapolation kann die transzendente Zahl  $e$  mit wenig Rechenaufwand auf 3 Dezimalen genau mittels der Beziehung  $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ ,  $h > 0$ , gewonnen werden.

Im Sinne von Abschnitt 3 muss für  $T(h) := (1+h)^{1/h}$  zunächst gezeigt werden, dass die Voraussetzung zur Extrapolation auf Schrittweite Null erfüllt ist, d.h. dass eine Entwicklung der Form

$$T(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_{m-1} h^{m-1} + O(h^m)$$

existiert, mit  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_0 = e$ ,  $a_1, a_2, \dots$  von  $h$  unabhängigen Konstanten.

Es gilt bekanntlich

$$\ln(1+h)^{1/h} = \frac{1}{h} \cdot \ln(1+h) = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + O(h^4),$$

somit

$$\begin{aligned} T(h) &= (1+h)^{1/h} = \exp\left(\frac{1}{h} \cdot \ln(1+h)\right) = \exp\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + O(h^4)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{h}{2}\right)^3 + O(h^4)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{11}{24} \cdot h^2 - \frac{7}{16} \cdot h^3 + O(h^4)\right). \end{aligned}$$

Wählt man nun  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = 1/2$ ,  $h_2 = 1/4$ ,  $h_3 = 1/8$ ,  $h_4 = 1/16$ , also, in der Bezeichnung von Abschnitt 3, den Wert  $r = 1/2$ , so erhält man mit

$$T(h_0 = 1) = (1+1)^1 = 2,$$

$$T\left(h_1 = \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25,$$

$$T\left(h_2 = \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,4414 \quad (\text{aus der Binomialentwicklung berechnet}),$$

$$T\left(h_3 = \frac{1}{8}\right) = \left(1 + \frac{1}{8}\right)^8 = 2,5658 \quad (\text{logarithmisch berechnet}),$$

$$T\left(h_4 = \frac{1}{16}\right) = \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{16} = 2,6379 \quad (\text{logarithmisch berechnet})$$

wegen

$$T_{i,1} = 2 \cdot T_{i,0} - T_{i-1,0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$T_{i,2} = \frac{1}{3} (4 \cdot T_{i,1} - T_{i-1,1}), \quad i = 2, 3, \dots$$

$$T_{i,3} = \frac{1}{7} (8 \cdot T_{i,2} - T_{i-1,2}), \quad i = 3, 4, \dots$$

$$T_{i,4} = \frac{1}{15} (16 \cdot T_{i,3} - T_{i-1,3}), \quad i = 4, 5, \dots$$

die Tafel

$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$	$T_{i,4}$
2,0000				
2,2500	2,5000			
2,4414	2,6328	2,6771		
2,5658	2,6902	2,7093	2,7139	
2,6379	2,7100	2,7166	2,7176	2,7178

also  $|e - 2,7178| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ .

5.4. Eine physikalische Grösse  $x$  sei vom Druck  $p$  eines Gases in der folgenden Weise abhängig

$$x(p) = a_0 + a_1 p^2 + a_2 p^3 + a_3 p^6,$$

wobei  $a_0, a_1, a_2, a_3$  reelle, nichtverschwindende Konstanten seien.  
Aus der Messreihe

$p$ in mm Hg	0,8	0,4	0,2	0,1	0,05
$x$ in Einheiten	740	487	475	485	489

bestimme man näherungsweise  $x$  im Vakuum, d. h.  $x(p=0) = a_0$ .  
Durch dreimalige Richardson-Extrapolation erhält man aufgrund von

$$a_0 = \frac{1}{3} \left( 4 \cdot x\left(\frac{p}{2}\right) - x(p) \right) + O(p^3)$$

bzw.

$$a_0 = \frac{1}{7} \left( 8 \cdot x\left(\frac{p}{2}\right) - x(p) \right) + O(p^6)$$

bzw.

$$a_0 = \frac{1}{127} \left( 128 \cdot x \left( \frac{p}{2} \right) - x(p) \right)$$

die folgende Tafel:

740			
487	402,7		
475	471,0	480,8	
485	488,3	490,8	491,6
489	490,3	490,6	490,6

und damit für  $x(p=0)$  näherungsweise den Wert 491 Einheiten.

Hans Ade, Universität Mainz

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 F.L. Bauer, H. Rutishauser und E. Stiefel: New aspects in numerical quadrature. Proc. Symp. Appl. Math. 15 AMS, Providence R.I., 199–218 (1963).
- 2 R. Bulirsch: Bemerkungen zur Romberg-Integration. Num. Math. 6, 6–16 (1964).
- 3 P. Henrici: Elemente der numerischen Analysis, Bd. 2. BI-Hochschultaschenbücher 562.
- 4 D.C. Joyce: Survey of extrapolation processes in numerical analysis. SIAM Rev. 13, 435–490 (1971).
- 5 Z. Kopal: Numerical analysis. Chapman and Hall, London 1955.
- 6 W. Romberg: Vereinfachte numerische Integration. Kgl. Norske Vid. Selsk. Forh. 28, 30–36 (1955).

## Tip für das Zeichnen von Ellipsen

Beim Zeichnen einer Ellipse zieht man gerne die Scheitelkrümmungskreise heran. Das Überbrücken der noch klaffenden Lücken mit dem Kurvenlineal ist manchmal heikel, insbesondere bei grösserem Maßstab. Als bequeme Zwischenpunkte empfehlen sich vor allem die Enden der konjugierten Durchmesser gleicher Länge. Die zugehörigen Tangenten bilden einen der Ellipse umschriebenen Rhombus, dessen Ecken leicht zu finden sind, indem man die Halbachsen  $a$  und  $b$  vom Mittelpunkt aus auf das  $\sqrt{2}$ -fache streckt, was mit dem Stechzirkel rasch und ohne Hilfslinien geschehen kann; die Berührungspunkte halbieren die Seiten und sind nachträglich durch Ziehen der Mittellinien festzustellen. – Bei Platzmangel mag man die Schnittstellen der Rhombuseiten mit den Scheiteltangenten verwenden; man erhält sie, wenn man von den Ecken des Scheiteltangentenrechtecks aus die Strecken  $a\sqrt{2}$  bzw.  $b\sqrt{2}$  abträgt (Figur).

Weniger bekannt ist anscheinend, dass sich auch die Krümmungskreise schnell hinzufügen lassen, die eine vorzügliche Zeichenhilfe bieten. Der zu einem der