

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1978)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\begin{aligned}
\text{Var}[W_n] &= \text{Var}[U_n] + \frac{1}{4} \text{Var}[V_n] + E[U_n V_n] - E[U_n] E[V_n] \\
&= 2n\pi^{-1} \int_0^1 [\ln(q)]^2 [1-q^2]^{-1/2} dq - n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + n(2\pi)^{-1} \int_0^1 [\ln(1-q^2)]^2 [1-q^2]^{-1/2} dq - n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + 2n(\pi)^{-1} \int_0^1 [\ln(q)] [\ln(1-q^2)] [1-q^2]^{-1/2} dq - 2n[\ln(2)]^2 \\
&= n\pi^2[6]^{-1} - 2n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + n(2\pi^{1/2})^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} \left( v^{-1} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) [\Gamma(v+1)]^{-1} \left[ \psi(v+1) - \psi\left(v + \frac{1}{2}\right) \right] \right) \\
&= n\sigma_{BA}^2.
\end{aligned}$$

For the transformations the formulae (6.3.2), (6.3.3), (6.4.2), (6.4.4) and (23.2.24) of [1], p. 258, 260, 807, and the formulae (4.256), [4.261(17)] and [4.261(21)] of [3], p. 539, 541, were used.

F. Streit, Genève

## REFERENCES

- 1 M. Abramowitz and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York 1970.
- 2 J. Bertrand: Calcul des probabilités, p. 4–5. Gauthier-Villars, Paris 1907.
- 3 I.S. Gradshteyn and I.W. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York 1965.
- 4 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, chap. 6. Springer, Berlin 1957.
- 5 M.G. Kendall and P.A.P. Moran: Geometrical Probability, p. 9, 10. Griffin, London 1963.
- 6 E.L. Lehmann: Testing Statistical Hypotheses, p. 63–68. Wiley, New York 1966.
- 7 L.A. Santaló: Integral Geometry and Geometric Probability. Addison-Wesley, Reading 1976.
- 8 L. Schmetterer: Einführung in die mathematische Statistik, p. 127. Springer, Wien 1966.
- 9 F. Streit: On Methods and Problems of Geometrical Stochastics. Bull. ISI 46(2), 600–605 (1976).
- 10 B.L. van der Waerden: Mathematische Statistik, p. 251–258. Springer, Berlin 1965.

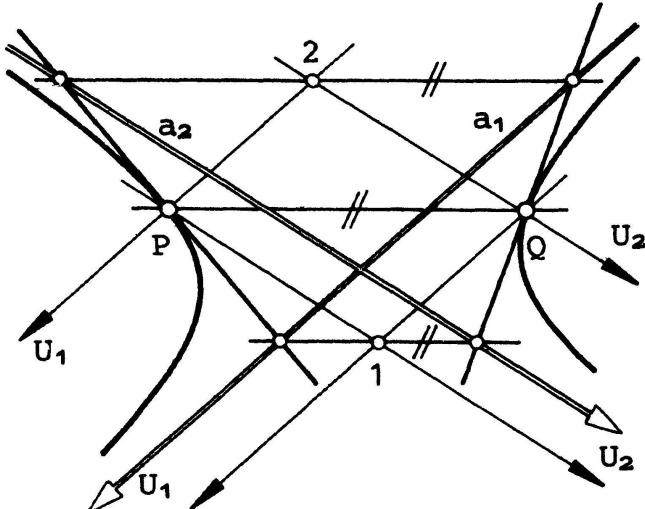
## Kleine Mitteilungen

### Eine Asymptotenkonstruktion der Hyperbel

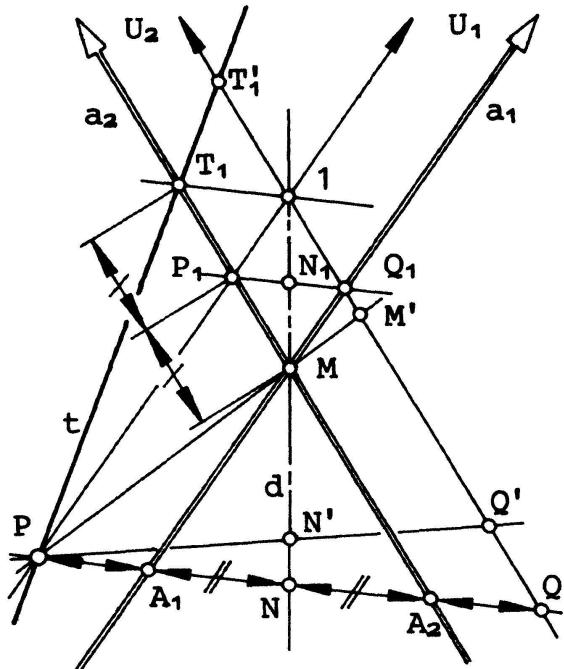
Den allgemein bekannten affinen Eigenschaften der Hyperbel<sup>1)</sup> sei mit diesem Beitrag noch eine weitere hinzugefügt, die zur raschen Konstruktion der Asymptoten einer Hyperbel herangezogen werden kann. Diese Eigenschaft lautet:

1) Siehe Literaturangabe.

Werden die Endpunkte  $P, Q$  einer Hyperbelsehne mit den Fernpunkten  $U_1, U_2$  der Hyperbel verbunden und durch die Restschnitte 1, 2 der Verbindungsgeraden Parallelen zu  $PQ$  gelegt, so treffen diese Parallelen die Tangenten von  $P, Q$  in Punkten der Asymptoten  $a_1, a_2$  (Fig. 1).



Figur 1



Figur 2

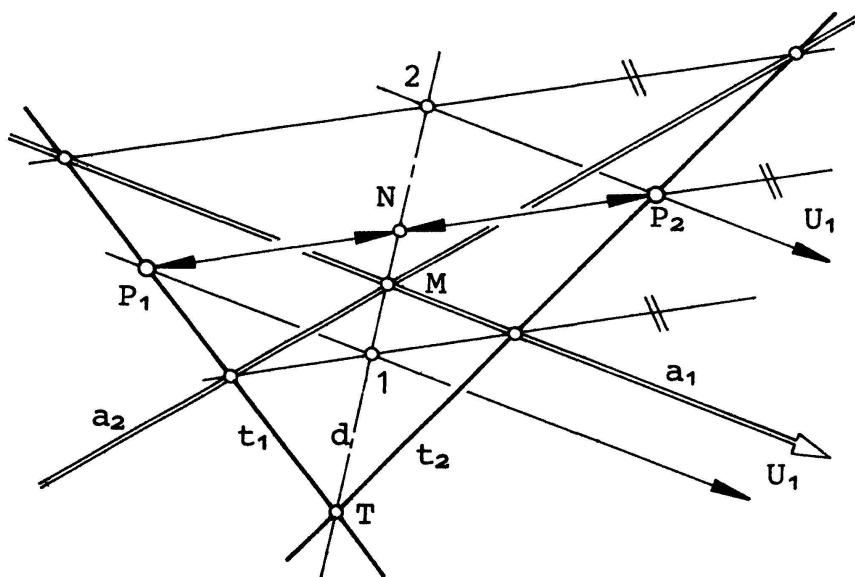
Für diese Eigenschaft folgt nun ein *elementarer Beweis*:

Der zur Sehne  $PQ$  konjugierte Durchmesser  $d$  enthält den Sehnenmittelpunkt  $N$  (Fig. 2). Trifft  $PQ$  die Asymptoten  $a_1, a_2$  in  $A_1, A_2$ , so gilt bekanntlich  $\overline{PA}_1 = \overline{A_2Q}$ . Bei Streckung von  $A_1$  nach  $P$  aus  $N$  gelangen die Asymptoten  $a_1, a_2$  nach  $PU_1$  bzw.  $QU_2$  und damit der Hyperbelmittelpunkt  $M$  in den Schnittpunkt 1 von  $PU_1$  mit  $QU_2$ ; 1 liegt daher auch auf  $d$ . Ist  $P_1$  Schnittpunkt von  $PU_1$  mit  $a_2$ ,  $Q_1$  Schnittpunkt von  $QU_2$  mit  $a_1$ , so liegt mit  $MP_1Q_1$  ein Parallelogramm vor, dessen Mittelpunkt  $N_1$  Schnittpunkt von  $d$  mit  $P_1Q_1$  ist. Wegen  $\overline{P_1N_1} = \overline{N_1Q_1}$  und  $\overline{PN} = \overline{NQ}$  sind die Sehnen  $PQ$  und  $P_1Q_1$  zentrisch ähnlich bezüglich 1 zugeordnet, d.h.  $P_1Q_1$  liegt parallel zu  $PQ$ . (Anm.: Die Parallelität von  $PQ$  und  $P_1Q_1$  lässt sich auch ohne Verwendung der zentrischen Ähnlichkeit allein mittels der Strahlensätze folgern. Bei indirekter Annahme  $PQ \nparallel P_1Q_1$  gäbe es nämlich eine zu  $P_1Q_1$  parallele von  $PQ$  verschiedene Gerade durch  $P$ , aus welcher von 1P, d und 1Q ebenfalls längengleiche Strecken  $\overline{PN'}$  und  $\overline{N'Q'}$  ausgeschnitten werden. Daraus folgt  $1Q = QQ' \parallel d$ , was einen Widerspruch bedeutet.) Bekanntlich wird das innerhalb der Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente durch den Berührpunkt halbiert. Bei Projektion dieser längengleichen Tangentenstrecken längs einer Asymptote auf die andere erhält man daher wieder längengleiche Strecken. Für den Schnittpunkt  $T_1$  von  $a_2$  mit  $t$  gilt daher  $\overline{MP_1} = \overline{P_1T_1}$ . Berücksichtigt man ausserdem noch  $\overline{MN_1} = \overline{N_11}$ , so folgt daraus  $T_11 \parallel P_1Q_1$ .

Bemerkung: Seien  $T'_1$  und  $M'$  die Projektionen von  $T_1, M$  aus  $P$  auf  $QU_2$ , so ist  $\overline{T'_11} = \overline{IM'}$ . Die Übertragung der Strecke  $\overline{T'_11}$  nach  $1M'$  liefert daher mit  $PM'$  einen weiteren Hyperbeldurchmesser.

Die Verwendbarkeit dieser Hyperbeleigenschaft zur Konstruktion der Asymptoten wird nun anhand zweier Beispiele gezeigt.

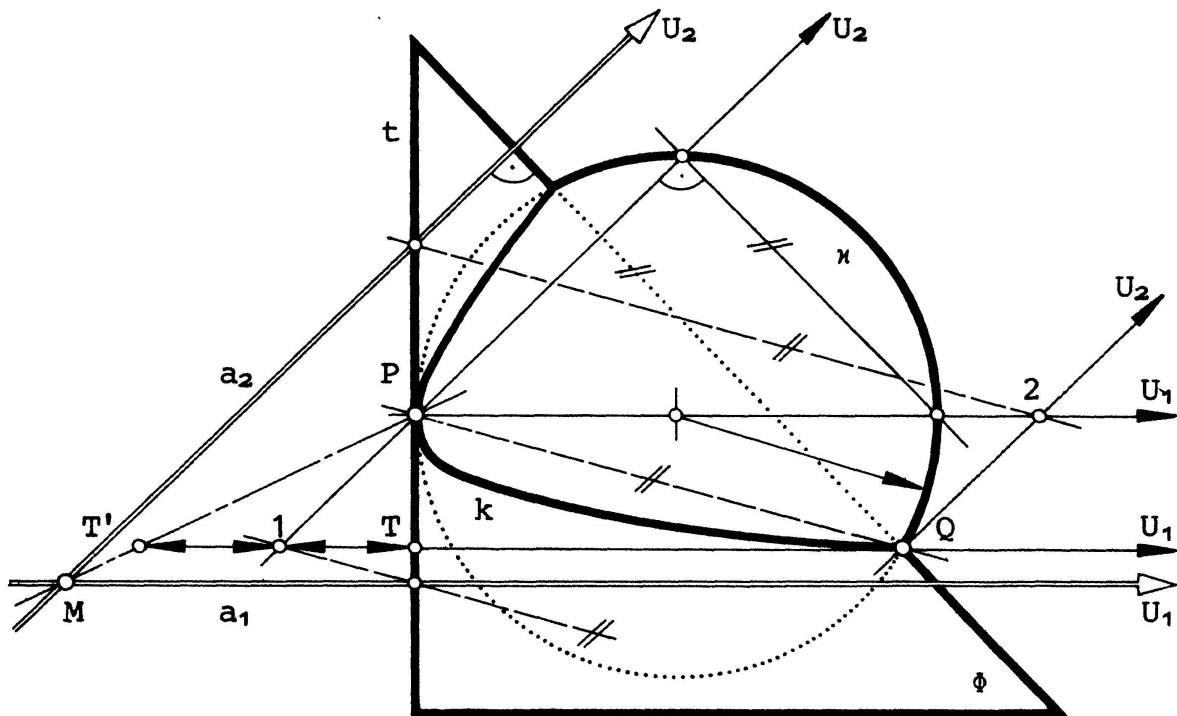
**Beispiel 1.** Von einer Hyperbel sind zwei Linienelemente  $(P_1, t_1), (P_2, t_2)$  sowie ein Fernpunkt  $U_1$  bekannt. Der durch den Tangentenschnittpunkt  $T$  und den Mittelpunkt  $N$  der Sehne  $P_1P_2$  bestimmte zu  $P_1P_2$  konjugierte Durchmesser  $d$  trifft  $P_1U_1$  und  $P_2U_1$  in 1, 2 (Fig. 3). Werden nun durch 1, 2 die Parallelen zu  $P_1P_2$  gelegt und diese mit  $t_1, t_2$  zum Schnitt gebracht, dann liegen mit den noch fehlenden beiden Verbindungsgeraden der vier Schnittpunkte die Asymptoten  $a_1, a_2$  vor.



Figur 3

**Beispiel 2.** Eine Kugel  $\kappa$  und ein schiefer Kreiskegel  $\Phi$  mögen eine gemeinsame Symmetrieebene  $\pi$  besitzen und sich in einem Punkt  $P$  berühren (Fig. 4). Die Durchdringungskurve von  $\kappa$  und  $\Phi$  erscheint dann im Normalriss auf  $\pi$  i. a. als doppelt überdeckte Kurve 4.0., also als ein Kegelschnitt  $k$ . Zur Bestimmung der Fernpunkte von  $k$  bringt man zwei kongruente und in parallelen Ebenen liegende Kreisschnitte von  $\kappa$  und  $\Phi$  durch eine geeignete Schiebung zur Deckung. Nach Ausübung der Schiebung zerfällt die Durchdringungskurve in ein Kreispaar,  $k$  selbst in ein Paar asymptotenparalleler Geraden; somit erhält man die Hyperbelfernpunkte  $U_1, U_2$ . Die Kegelerzeugende  $t$  durch  $P$  bildet zusammen mit  $P$  ein Linienelement von  $k$ . Zwei weitere Hyperelpunkte liefert der Schnitt der zweiten in  $\pi$  liegenden Kegelerzeugenden mit dem in  $\pi$  liegenden Kugelgrosskreis; für die folgende Konstruktion wird jedoch nur einer dieser Schnittpunkte  $Q$  benötigt. Man legt nun durch die beiden Restschnitte 1, 2 der Verbindungsgeraden von  $P, Q$  mit  $U_1, U_2$  die Parallelen zu  $PQ$  und sucht deren Schnittpunkte mit  $t$ ; damit hat man je einen Punkt der Asymptoten  $a_1, a_2$  gefunden. Wird der Schnittpunkt  $T$  von  $QU_1$  mit  $t$  an 1 nach  $T'$  gespiegelt, so ist mit  $PT'$  auch ein Durchmesser von  $k$  bekannt.

Bemerkung: Man beachte, dass die gezeigte Asymptotenkonstruktion die Kenntnis



Figur 4

des Hyperbelmittelpunkts  $M$  nicht voraussetzt und daher auch dann verwendet werden kann, wenn  $M$  auf der Zeichenfläche unerreichbar sein sollte.

H. Hohenberger, Graz

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 F. Hohenberg: Konstruktive Geometrie in der Technik, 3. Aufl., S. 57f. Wien 1966.
- 2 K. Strubecker: Einführung in die Höhere Mathematik, Bd. 1, S. 413f. München 1966.
- 3 K. Strubecker: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, 2. Aufl., S. 220. Göttingen 1967.
- 4 W. Wunderlich: Darstellende Geometrie 1, S. 74f. Wien 1966.

#### Vanishing sums of roots of unity

The following theorem is well known {see [4] and [7]. Related results are contained in [3] and [5]. It was considerably sharpened by Conway and Jones ([1], theorem 5)}.

*Denote by  $p_1$  the least prime divisor of the integer  $q > 1$ . If  $n < p_1$ , then any  $n$  distinct  $q$ -th roots of unity  $\rho_1, \dots, \rho_n$  are linearly independent over the field  $\mathbf{Q}$  of rational numbers.*

In this note a further proof is given, which could be called arithmetical.  
Assume that

$$b_1\rho_1 + \cdots + b_n\rho_n = 0, \quad b_v \in \mathbf{Q}. \quad (1)$$

Denote by  $\zeta$  a primitive  $q$ -th root of unity. Applying the automorphisms of the Galois group of the field extension  $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$  to equation (1), we get

$$\beta(k) := b_1 \rho_1^k + \cdots + b_n \rho_n^k = 0, \quad (2)$$

if  $k$  is any integer prime to  $q$ . Hence

$$f(u) := \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^q \zeta^{uk} \beta(k) = 0 \quad (3)$$

for any integer  $u$ . On the other hand, if  $\rho_v = \exp(2\pi i a_v \cdot 1/q)$  and  $\zeta = \exp(2\pi i \cdot 1/q)$ , we deduce from (2), that

$$f(u) = \sum_{v=1}^n b_v \cdot c_q(a_v + u), \quad (4)$$

where

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} n\right) = \sum_{d|(q,n)} d \mu\left(\frac{q}{d}\right)$$

denotes Ramanujan's sum. The properties of Ramanujan's sum, needed in this note (essentially the multiplicativity of  $q \mapsto c_q$ ) may be found in [2]. Without loss of generality assume  $|b_1| = \max_v |b_v|$ , and choose  $u \equiv -a_1 \pmod{q}$ .

The  $a_v$  are different modulo  $q$ , therefore

$$-a_1 + a_v \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{for } v = 2, \dots, n.$$

Thus, for any  $v \geq 2$ , there is a prime power<sup>1)</sup>  $p^r \parallel q$  such that at most the power  $p^{r-1}$  divides  $u + a_v$ . Notice that

$$c_{p^r}(n) = \begin{cases} \varphi(p^r) & \text{if } p^r \mid n, \\ -p^{r-1} & \text{if } p^{r-1} \parallel n, \\ 0 & \text{if } p^{r-1} \nmid n, \end{cases}$$

whence by the multiplicativity of  $c_q$

$$|c_q(u + a_v)| \leq p^{r-1} \cdot \varphi\left(\frac{q}{p^r}\right) \leq \frac{\varphi(q)}{p-1} \leq \frac{\varphi(q)}{p_1-1} \quad (6)$$

for  $v = 2, \dots, n$ . From (3), (4) and (6) we obtain

1)  $p^r \parallel q$  means:  $p^r$  divides  $q$ , but  $p^{r+1}$  does not.

$$\begin{aligned}
0 &= |f(u)| \geq |b_1| c_q(q) - |b_1| \cdot \sum_{v=2}^n |c_q(a_v - a_1)| \\
&\geq |b_1| \cdot \left\{ \varphi(q) - \frac{n-1}{p_1-1} \cdot \varphi(q) \right\} \\
&\geq |b_1| \cdot \varphi(q) \cdot \frac{1}{p_1-1}.
\end{aligned}$$

Therefore  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ , and the theorem is proved.

Wolfgang Schwarz, Frankfurt am Main

Š. Porubský informed me that another simple proof of the theorem of this note and a discussion of its connections with covering systems is given in M. Newman: Roots of unity and covering sets. Math. Ann. 191, 279–282 (1971).

#### REFERENCES

- 1 J.H. Conway and A.J. Jones: Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity). Acta Arith. 30, 229–240 (1976).
- 2 G.H. Hardy and E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford 1968.
- 3 H.B. Mann: On linear relations between roots of unity. Mathematika, Lond. 12, 107–117 (1965).
- 4 L. Rédei: Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerungen des Hauptsatzes von Hajós. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16, 329–373 (1965).
- 5 I.J. Schoenberg: A note on the cyclotomic polynomial. Mathematika, Lond. 11, 131–136 (1964).
- 6 B.L. van der Waerden: Algebra I. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1966.
- 7 E. Wittmann: Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln. El. Math. 26, 42–43 (1971).

## Elementarmathematik und Didaktik<sup>1)</sup>

### Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck

Die folgende Aufgabe, die in der Thematik und in den Behandlungsmethoden mehrfach verallgemeinerungsfähig ist, bis hin zur Nutzung in manchen Anwendungsbereichen, kann auch bereits für sich Interesse finden, sowohl als Frage wie auch wegen der Eigenart des Ergebnisses.

**Aufgabe.** Gegeben sei in der euklidischen Ebene ein beliebiges Dreieck  $ABC$ . Gesucht ist eine in dem Sinne optimale Kreisfläche  $K$ , dass zwischen ihr und der Dreiecksfläche  $D$  die symmetrische Differenz

$$(K \cup D) \setminus (K \cap D)$$

möglichst kleinen Flächeninhalt  $F$  hat.

---

1) Die für diese Sparte bestimmte Erweiterung des Umfangs von 2 Heften pro Jahrgang um je 8 Seiten wird durch die Deutschschweizerische Mathematik-Kommission (DMK) des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer (VSMP) finanziert.