

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1978)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\begin{aligned}
\text{Var}[W_n] &= \text{Var}[U_n] + \frac{1}{4} \text{Var}[V_n] + E[U_n V_n] - E[U_n]E[V_n] \\
&= 2n\pi^{-1} \int_0^1 [\ln(q)]^2 [1-q^2]^{-1/2} dq - n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + n(2\pi)^{-1} \int_0^1 [\ln(1-q^2)]^2 [1-q^2]^{-1/2} dq - n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + 2n(\pi)^{-1} \int_0^1 [\ln(q)] [\ln(1-q^2)] [1-q^2]^{-1/2} dq - 2n[\ln(2)]^2 \\
&= n\pi^2 [6]^{-1} - 2n[\ln(2)]^2 \\
&\quad + n(2\pi^{1/2})^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} \left(v^{-1} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) [\Gamma(v+1)]^{-1} \left[\psi(v+1) - \psi\left(v + \frac{1}{2}\right) \right] \right) \\
&= n\sigma_{BA}^2.
\end{aligned}$$

For the transformations the formulae (6.3.2), (6.3.3), (6.4.2), (6.4.4) and (23.2.24) of [1], p. 258, 260, 807, and the formulae (4.256), [4.261 (17)] and [4.261 (21)] of [3], p. 539, 541, were used.

F. Streit, Genève

REFERENCES

- 1 M. Abramowitz and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York 1970.
- 2 J. Bertrand: Calcul des probabilités, p. 4-5. Gauthier-Villars, Paris 1907.
- 3 I.S. Gradshteyn and I.W. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, New York 1965.
- 4 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, chap. 6. Springer, Berlin 1957.
- 5 M.G. Kendall and P.A.P. Moran: Geometrical Probability, p. 9, 10. Griffin, London 1963.
- 6 E.L. Lehmann: Testing Statistical Hypotheses, p. 63-68. Wiley, New York 1966.
- 7 L.A. Santaló: Integral Geometry and Geometric Probability. Addison-Wesley, Reading 1976.
- 8 L. Schmetterer: Einführung in die mathematische Statistik, p. 127. Springer, Wien 1966.
- 9 F. Streit: On Methods and Problems of Geometrical Stochastics. Bull. ISI 46 (2), 600-605 (1976).
- 10 B.L. van der Waerden: Mathematische Statistik, p. 251-258. Springer, Berlin 1965.

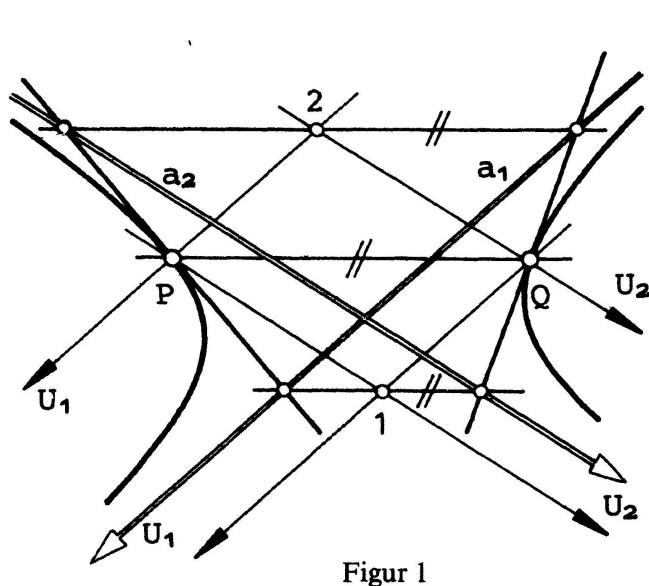
Kleine Mitteilungen

Eine Asymptotenkonstruktion der Hyperbel

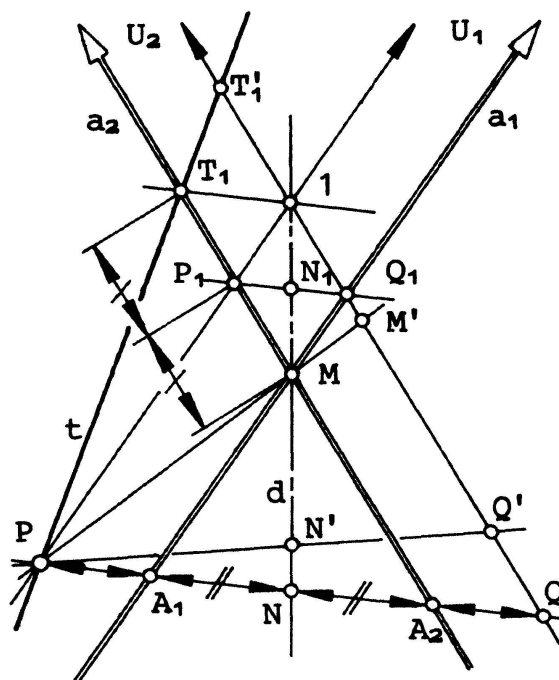
Den allgemein bekannten affinen Eigenschaften der Hyperbel¹⁾ sei mit diesem Beitrag noch eine weitere hinzugefügt, die zur raschen Konstruktion der Asymptoten einer Hyperbel herangezogen werden kann. Diese Eigenschaft lautet:

1) Siehe Literaturangabe.

Werden die Endpunkte P, Q einer Hyperbelsehne mit den Fernpunkten U_1, U_2 der Hyperbel verbunden und durch die Restschnitte 1, 2 der Verbindungsgeraden Parallele zu PQ gelegt, so treffen diese Parallelen die Tangenten von P, Q in Punkten der Asymptoten a_1, a_2 (Fig. 1).



Figur 1



Figur 2

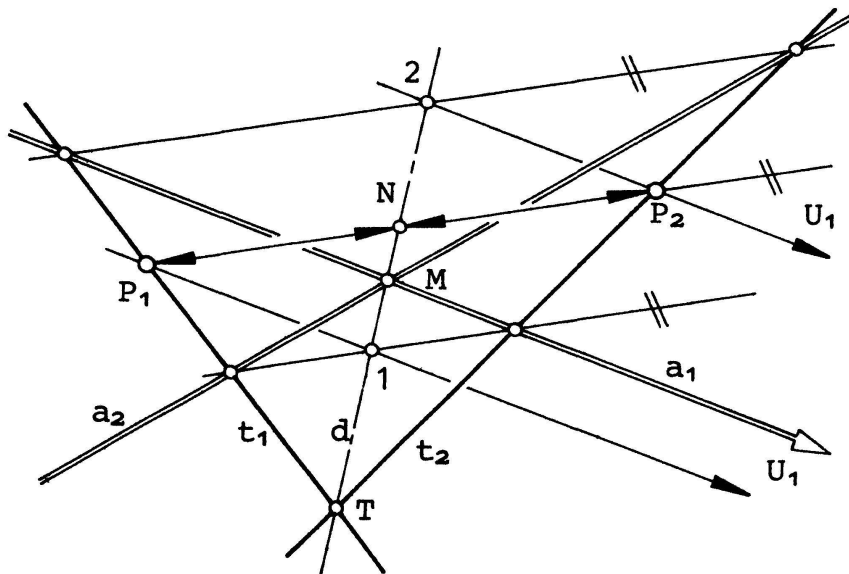
Für diese Eigenschaft folgt nun ein *elementarer Beweis*:

Der zur Sehne PQ konjugierte Durchmesser d enthält den Sehnenmittelpunkt N (Fig. 2). Trifft PQ die Asymptoten a_1, a_2 in A_1, A_2 , so gilt bekanntlich $\overline{PA_1} = \overline{A_2Q}$. Bei Streckung von A_1 nach P aus N gelangen die Asymptoten a_1, a_2 nach PU_1 bzw. QU_2 und damit der Hyperbelmittelpunkt M in den Schnittpunkt 1 von PU_1 mit QU_2 ; 1 liegt daher auch auf d . Ist P_1 Schnittpunkt von PU_1 mit a_2 , Q_1 Schnittpunkt von QU_2 mit a_1 , so liegt mit MP_1Q_1 ein Parallelogramm vor, dessen Mittelpunkt N_1 Schnittpunkt von d mit P_1Q_1 ist. Wegen $\overline{P_1N_1} = \overline{N_1Q_1}$ und $\overline{PN} = \overline{NQ}$ sind die Sehnen PQ und P_1Q_1 zentrisch ähnlich bezüglich 1 zugeordnet, d. h. P_1Q_1 liegt parallel zu PQ . (Anm.: Die Parallelität von PQ und P_1Q_1 lässt sich auch ohne Verwendung der zentrischen Ähnlichkeit allein mittels der Strahlensätze folgern. Bei indirekter Annahme $PQ \nparallel P_1Q_1$ gäbe es nämlich eine zu P_1Q_1 parallele von PQ verschiedene Gerade durch P , aus welcher von $1P, d$ und $1Q$ ebenfalls längengleiche Strecken $\overline{PN'}$ und $\overline{N'Q'}$ ausgeschnitten werden. Daraus folgt $1Q = QQ' \parallel d$, was einen Widerspruch bedeutet.) Bekanntlich wird das innerhalb der Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente durch den Berührungspunkt halbiert. Bei Projektion dieser längengleichen Tangentenstrecken längs einer Asymptote auf die andere erhält man daher wieder längengleiche Strecken. Für den Schnittpunkt T_1 von a_2 mit t gilt daher $\overline{MP_1} = \overline{P_1T_1}$. Berücksichtigt man ausserdem noch $\overline{MN_1} = \overline{N_11}$, so folgt daraus $T_11 \parallel P_1Q_1$.

Bemerkung: Seien T'_1 und M' die Projektionen von T_1, M aus P auf QU_2 , so ist $\overline{T'_11} = \overline{1M'}$. Die Übertragung der Strecke $\overline{T'_11}$ nach $\overline{1M'}$ liefert daher mit PM' einen weiteren Hyperbeldurchmesser.

Die Verwendbarkeit dieser Hyperbeleigenschaft zur Konstruktion der Asymptoten wird nun anhand zweier Beispiele gezeigt.

Beispiel 1. Von einer Hyperbel sind zwei Linienelemente (P_1, t_1) , (P_2, t_2) sowie ein Fernpunkt U_1 bekannt. Der durch den Tangentenschnittpunkt T und den Mittelpunkt N der Sehne P_1P_2 bestimmte zu P_1P_2 konjugierte Durchmesser d trifft P_1U_1 und P_2U_1 in 1, 2 (Fig.3). Werden nun durch 1, 2 die Parallelen zu P_1P_2 gelegt und diese mit t_1, t_2 zum Schnitt gebracht, dann liegen mit den noch fehlenden beiden Verbindungsgeraden der vier Schnittpunkte die Asymptoten a_1, a_2 vor.



Figur 3

Beispiel 2. Eine Kugel κ und ein schiefer Kreiskegel Φ mögen eine gemeinsame Symmetrieebene π besitzen und sich in einem Punkt P berühren (Fig.4). Die Durchdringungskurve von κ und Φ erscheint dann im Normalriss auf π i. a. als doppelt überdeckte Kurve 4.0., also als ein Kegelschnitt k . Zur Bestimmung der Fernpunkte von k bringt man zwei kongruente und in parallelen Ebenen liegende Kreisschnitte von κ und Φ durch eine geeignete Schiebung zur Deckung. Nach Ausübung der Schiebung zerfällt die Durchdringungskurve in ein Kreispaar, k selbst in ein Paar asymptotenparalleler Geraden; somit erhält man die Hyperbelfernpunkte U_1, U_2 . Die Kegelerzeugende t durch P bildet zusammen mit P ein Linienelement von k . Zwei weitere Hyperbelpunkte liefert der Schnitt der zweiten in π liegenden Kegelerzeugenden mit dem in π liegenden Kugelgrosskreis; für die folgende Konstruktion wird jedoch nur einer dieser Schnittpunkte Q benötigt. Man legt nun durch die beiden Restschnitte 1, 2 der Verbindungsgeraden von P, Q mit U_1, U_2 die Parallelen zu PQ und sucht deren Schnittpunkte mit t ; damit hat man je einen Punkt der Asymptoten a_1, a_2 gefunden. Wird der Schnittpunkt T von QU_1 mit t an 1 nach T' gespiegelt, so ist mit PT' auch ein Durchmesser von k bekannt.

Bemerkung: Man beachte, dass die gezeigte Asymptotenkonstruktion die Kenntnis

Denote by ς a primitive q -th root of unity. Applying the automorphisms of the Galois group of the field extension $\mathbf{Q}(\varsigma)/\mathbf{Q}$ to equation (1), we get

$$\beta(k) := b_1 \rho_1^k + \cdots + b_n \rho_n^k = 0, \quad (2)$$

if k is any integer prime to q . Hence

$$f(u) := \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^q \varsigma^{uk} \beta(k) = 0 \quad (3)$$

for any integer u . On the other hand, if $\rho_v = \exp(2\pi i a_v \cdot 1/q)$ and $\varsigma = \exp(2\pi i \cdot 1/q)$, we deduce from (2), that

$$f(u) = \sum_{v=1}^n b_v \cdot c_q(a_v + u), \quad (4)$$

where

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} n\right) = \sum_{d|(q,n)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right)$$

denotes Ramanujan's sum. The properties of Ramanujan's sum, needed in this note (essentially the multiplicativity of $q \mapsto c_q$) may be found in [2]. Without loss of generality assume $|b_1| = \max_v |b_v|$, and choose $u \equiv -a_1 \pmod{q}$.

The a_v are different modulo q , therefore

$$-a_1 + a_v \not\equiv 0 \pmod{q} \quad \text{for } v = 2, \dots, n.$$

Thus, for any $v \geq 2$, there is a prime power¹⁾ $p^r \parallel q$ such that at most the power p^{r-1} divides $u + a_v$. Notice that

$$c_{p^r}(n) = \begin{cases} \varphi(p^r) & \text{if } p^r | n, \\ -p^{r-1} & \text{if } p^{r-1} \parallel n, \\ 0 & \text{if } p^{r-1} \nmid n, \end{cases}$$

whence by the multiplicativity of c_q

$$|c_q(u + a_v)| \leq p^{r-1} \cdot \varphi\left(\frac{q}{p^r}\right) \leq \frac{\varphi(q)}{p-1} \leq \frac{\varphi(q)}{p_1-1} \quad (6)$$

for $v = 2, \dots, n$. From (3), (4) and (6) we obtain

¹⁾ $p^r \parallel q$ means: p^r divides q , but p^{r+1} does not.

$$\begin{aligned}
0 = |f(u)| &\geq |b_1| c_q(q) - |b_1| \cdot \sum_{v=2}^n |c_q(a_v - a_1)| \\
&\geq |b_1| \cdot \left\{ \varphi(q) - \frac{n-1}{p_1-1} \cdot \varphi(q) \right\} \\
&\geq |b_1| \cdot \varphi(q) \cdot \frac{1}{p_1-1}.
\end{aligned}$$

Therefore $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, and the theorem is proved.

Wolfgang Schwarz, Frankfurt am Main

Š. Porubský informed me that another simple proof of the theorem of this note and a discussion of its connections with covering systems is given in M. Newman: Roots of unity and covering sets. Math. Ann. 191, 279–282 (1971).

REFERENCES

- 1 J.H. Conway and A.J. Jones: Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity). Acta Arith. 30, 229–240 (1976).
- 2 G.H. Hardy and E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford 1968.
- 3 H.B. Mann: On linear relations between roots of unity. Mathematika, Lond. 12, 107–117 (1965).
- 4 L. Rédei: Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerungen des Hauptsatzes von Hajós. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16, 329–373 (1965).
- 5 I.J. Schoenberg: A note on the cyclotomic polynomial. Mathematika, Lond. 11, 131–136 (1964).
- 6 B.L. van der Waerden: Algebra I. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1966.
- 7 E. Wittmann: Über verschwindende Summen von Einheitswurzeln. El. Math. 26, 42–43 (1971).

Elementarmathematik und Didaktik¹⁾

Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck

Die folgende Aufgabe, die in der Thematik und in den Behandlungsmethoden mehrfach verallgemeinerungsfähig ist, bis hin zur Nutzung in manchen Anwendungsbereichen, kann auch bereits für sich Interesse finden, sowohl als Frage wie auch wegen der Eigenart des Ergebnisses.

Aufgabe. Gegeben sei in der euklidischen Ebene ein beliebiges Dreieck ABC . Gesucht ist eine in dem Sinne optimale Kreisfläche K , dass zwischen ihr und der Dreiecksfläche D die symmetrische Differenz

$$(K \cup D) \setminus (K \cap D)$$

möglichst kleinen Flächeninhalt F hat.

1) Die für diese Sparte bestimmte Erweiterung des Umfangs von 2 Heften pro Jahrgang um je 8 Seiten wird durch die Deutschschweizerische Mathematik-Kommission (DMK) des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer (VSMP) finanziert.