

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	33 (1978)
Heft:	5
Artikel:	Polyederfunktionale, die nicht translationsvariant, aber injektiv sind
Autor:	Kirsch, Arnold
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-32943

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 33

Heft 5

Seiten 105–128

10. September 1978

Polyederfunktionale, die nicht translationsinvariant, aber injektiv sind

Herrn Professor H. Hadwiger zum 70. Geburtstag

Im folgenden sei \mathfrak{N} zunächst die Menge aller *eigentlichen Polygone*, d. h. die Menge aller Vereinigungen von je endlich vielen abgeschlossenen und nicht entarteten Dreiecken. Offenbar ist \mathfrak{N} abgeschlossen bzgl. Vereinigungsbildung, nicht aber bzgl. Durchschnitts- und Differenzbildung. Versteht man jedoch die letztgenannten Operationen, in «unbewusster Abstraktion» (G. Aumann [1]), wie folgt:

$$A \cap' B = \text{abgeschlossene Hülle des offenen Kerns von } A \cap B,$$

$$A \setminus' B = \text{abgeschlossene Hülle von } A \setminus B,$$

dann ist $(\mathfrak{N}, \cup, \cap', \setminus')$, kurz \mathfrak{N} , ein abschnittskomplementärer distributiver Verband¹⁾ (mit Nullelement \emptyset , ohne Einselement); d. h. \mathfrak{N} ist abgeschlossen bzgl. der beschriebenen Operationen, und es gelten die vertrauten Regeln der Mengenalgebra.

Ein *Inhaltsfunktional* (oder: eine Inhaltsmasszahl) auf der Menge \mathfrak{N} ist nach H. Hadwiger [2] eine Abbildung Φ von \mathfrak{N} in \mathbb{R} , die *translationsinvariant* ist und darüber hinaus

einfach additiv: $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, falls $A \cap' B = \emptyset$;

(*nichtnegativ-*)*definit*²⁾: $\Phi(A) \geq 0$;

normiert: $\Phi(Q) = 1$ (Q das Einheitsquadrat).

Wir zeigen nun, dass man bei Verzicht auf Translationsinvarianz *injektive* Funk-

1) Hierzu etwa H. Hermes: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955 (insb. S. 48, 49).

2) Infolge der Beschränkung auf eigentliche Polygone ist Φ sogar positiv definit, d.h. aus $\Phi(A) = 0$ folgt $A = \emptyset$.

tionale auf \mathfrak{N} angeben kann, die alle übrigen Eigenschaften eines Inhaltsfunktionalen haben. Mit anderen Worten, wir beweisen den

Satz. *Es gibt injektive Abbildungen Φ von \mathfrak{N} in \mathbf{R} , die einfach additiv, definit und normiert sind.*

Zur Vorbereitung des Beweises erinnern wir an die Arbeit [1], in der (zur Illustration des Darstellungssatzes von Stone) zwei elementare Darstellungen von \mathfrak{N} als *Mengenverbände*, also mit ungeänderter Bedeutung der Mengenoperationen \cup , \cap , \setminus gegeben werden. Im Gegensatz zu G. Aumann interessiert uns primär diejenige Darstellung, bei der die Mengen, welche die eigentlichen Polygone³⁾ repräsentieren, selbst *Punktmengen* sind: Dabei besteht für $A \in \mathfrak{N}$ die repräsentierende Menge A^φ aus allen inneren Punkten von A und (falls $A \neq \emptyset$) den Punkten derjenigen Randstrecken von A , deren nach innen weisende Normalen einen Richtungswinkel zwischen 0 einschließlich und π ausschließlich haben; in ähnlicher Weise wird über die Eckpunkte verfügt ([1], S. 26, 27). Diese Darstellung φ ist, wie man sich nach [1] «leicht überlegt», ein Isomorphismus von \mathfrak{N} auf einen Punktmengenverband. Natürlich gilt $\emptyset^\varphi = \emptyset$. Man beachte ferner, dass im Falle $A \neq \emptyset$ das eigentliche Polygon A und damit auch die Punktmenge A^φ innere Punkte besitzt.

Zum *Beweis* des Satzes wählen wir eine abzählbare, in der Ebene dicht liegende Menge D von Punkten x_1, x_2, \dots (wobei $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$). Sodann definieren wir für jedes Polygon $A \in \mathfrak{N}$:

$$\Phi(A) = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i}, \quad \text{mit } c = \sum_{x_i \in Q^\varphi} 2^{-i}.$$

Da in Q^φ jedenfalls Punkte von D liegen, ist c streng positiv und die Zahl $\Phi(A)$ wohldefiniert. Es gilt $\Phi(\emptyset) = 0$. Im Falle $A \neq \emptyset$ enthält A^φ innere Punkte und folglich unendlich viele Punkte aus D ; die angeschriebenen Summen sind dann also unendliche Reihen mit streng positiven Gliedern.

Offenbar ist das Funktional Φ definit und normiert. Auch die *einfache Additivität* ist sofort zu sehen: Für $A, B \in \mathfrak{N}$ mit $A \cap' B = \emptyset$ hat man $(A \cup B)^\varphi = A^\varphi \cup B^\varphi$ und $A^\varphi \cap B^\varphi = (A \cap' B)^\varphi = \emptyset^\varphi = \emptyset$, also

$$\Phi(A \cup B) = c^{-1} \sum_{x_i \in (A \cup B)^\varphi} 2^{-i} = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i} + c^{-1} \sum_{x_i \in B^\varphi} 2^{-i} = \Phi(A) + \Phi(B).$$

Nun zur *Injektivität*: Es sei $A \neq B$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \setminus B \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge $(A \setminus B)^\varphi = A^\varphi \setminus B^\varphi$ innere Punkte, also auch Punkte aus D . Es folgt $(A^\varphi \setminus B^\varphi) \cap D = (A^\varphi \cap D) \setminus (B^\varphi \cap D) \neq \emptyset$, also $A^\varphi \cap D \neq B^\varphi \cap D$. Das bedeutet: Die Summen $\sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i}$ und $\sum_{x_i \in B^\varphi} 2^{-i}$ stimmen nicht in allen Gliedern

überein und haben folglich verschiedene Werte. Hierzu beachte man, dass diese

3) Bei Aumann: Die «elementargeometrischen Figuren».

Summen als nichtabbrechende (oder identisch verschwindende) Dualbrüche interpretierbar sind: Zwei solche haben verschiedene Werte, sobald sie nicht an allen Stellen übereinstimmen. Somit folgt $\Phi(A) \neq \Phi(B)$.

Als eine bemerkenswerte *Konsequenz* des hiermit bewiesenen Satzes erwähnen wir: Φ ist wegen der Definitheit und Additivität monoton: d.h. aus $A \subset B$ (\subset bezeichne die strenge Inklusion) folgt jedenfalls $\Phi(A) \leq \Phi(B)$. Wegen der Injektivität folgt nun weiter $\Phi(A) < \Phi(B)$; d.h. Φ ist *streng monoton*. Nach Vorgabe von Φ ist somit durch $A \prec B \Leftrightarrow \Phi(A) < \Phi(B)$ eine *strenge lineare Ordnung* \prec in \mathfrak{N} definiert, welche die bereits vorhandene (nicht lineare) Ordnungsrelation \subset in \mathfrak{N} respektiert: Aus $A \subset B$ folgt $A \prec B$. Damit ist eine bekannte Existenzaussage (die Fortsetzbarkeit jeder Ordnung zu einer linearen Ordnung) für den speziellen Fall der Inklusion eigentlicher Polygone in einer sehr konkreten Weise, gleichsam mittels «Punktbewertung» (hierzu [3, 4]), nachgewiesen.

Im Hinblick auf die Überschrift dieser Note sei schliesslich bemerkt, dass unsere Überlegungen gültig bleiben, wenn \mathfrak{N} die Menge aller *eigenlichen Polyeder*, für beliebige Dimension k , bedeutet. Hierfür hat man sich nur klarzumachen, dass auch in diesem Fall ein Isomorphismus φ von \mathfrak{N} auf einen Punktmenzenverband existiert, derart dass mit jedem nichtleeren Polyeder A aus \mathfrak{N} auch A^φ innere Punkte besitzt.

Arnold Kirsch, Kassel

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 G. Aumann: Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen? El. Math. 7, 25–28 (1952).
- 2 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
- 3 A. Kirsch: Lässt sich jede «gerechte» Rangordnung durch eine Punktbewertung erzeugen? Math.-Phys. Semesterber. 15, 94–101 (1968).
- 4 A. Kirsch: «Gerechte» lineare Ordnungen und Punktbewertungen. Der Mathematikunterricht 15/1, 64–84 (1969).

Rektifizierbare vierdimensionale Simplices

Herrn Prof. H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Übersicht

Zwei eigentliche Polyeder A, B heissen *zerlegungsgleich*, geschrieben $A \sim B$, wenn sie im Sinne der Elementargeometrie in Teilpolyeder A_1, \dots, A_n bzw. B_1, \dots, B_n so zerlegt werden können, dass A_i mit B_i kongruent ist (für $i = 1, \dots, n$). Insbesondere nennen wir mit Goldberg [5] jedes Polyeder A , das zu einem Würfel *zerlegungsgleich* ist, *rektifizierbar*. Ein Interesse an der Aufsuchung rektifizierbarer Polyeder liegt