Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 33 (1978)

Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Wie erwähnt wollen wir auch niedrigere Potenzen von M kennenlernen:

Korollar 2.3. *M^k hat Nullen auf und unterhalb der $(p-k)$ten Subdiagonalen* $(k=2, 3, \ldots, p-1)$.

Beweis: Für $k=p-1$ ist das bereits in 2.2 enthalten. Wir zeigen nun: ist x ein Spaltenvektor mit der Eigenschaft, dass die letzten i Komponenten von Mx gleich 0 sind, so sind die letzten $i-1$ Komponenten von x gleich 0:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{p-1} \end{pmatrix}, \quad Mx=\begin{pmatrix} x_1 \\ 2(x_1+x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (p-i-1)(x_1+x_2+\cdots+x_{p-i-1}) \\ (p-i)(x_1+x_2+\cdots+x_{p-i}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (p-1)(x_1+x_2+\cdots+x_{p-1}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{p-i-1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $(p-i)(x_1+\cdots+x_{p-i})=0$ und somit $x_1+\cdots+x_{p-i}=0$; ferner $(p-i+1)(x_1+\cdots+x_{p-i}+x_{p-i+1})=0=(p-i+1)x_{p-i+1}$, also $x_{p-i+1}=0$ usw. Damit ist nun auch Satz 1.2 bewiesen. Durch Betrachtung nicht nur der ersten Spalte in M, M^2, ... ergeben sich natürlich weitere Resultate, die über 1.2 hinausgehen.

Paul R. Hafner, The University of Auckland, New Zealand

LITERATURVERZEICHNIS

1 L.J. Morley and A. Bishop: A prime congruence theorem. El. Math. *32*, 91-93 (1977).

Aufgaben

Aufgabe 786. Es seien f, g multiplikative zahlentheoretische Funktionen, ferner

$$F(m)=\sum_{d/m} f(d), \qquad G(n)=\sum_{d/n} g(d); \qquad m, n \in \mathbf{N}.$$

Zu gegebenen natürlichen Zahlen a, b, m, n bezeichne r bzw. s den grössten Teiler von a bzw. b, welcher relativ prim zu m bzw. n ist. Schliesslich seien φ, ψ zwei durch die Beziehung

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m) x^m}{1-x^m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n) y^n}{1-y^n} = \sum_{m,n=1}^{\infty} F(am) G(bn) x^m y^n$$

definierte zahlentheoretische Funktionen. Man zeige, dass

$$\varphi(m) \cdot \psi(n) = F(r) G(s) f(am/r) g(bn/s).$$

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung mit Verallgemeinerung: Für $i=1, \ldots, k$ seien f_i multiplikative zahlentheoretische Funktionen, ferner sei $F_i(m_i) = \sum_{d_i/m_i} f_i(d_i)$ für $m_i \in \mathbf{N}$. Zu gegebenen natürlichen Zahlen a_i, m_i bezeichne r_i den grössten Teiler von a_i, welcher relativ prim zu m_i ist. Schliesslich seien $\varphi_1 \ldots, \varphi_k$ k durch die Beziehung

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{m_i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(m_i) x_i^{m_i}}{1-x_i^{m_i}} \right) = \sum_{m_1, \ldots, m_k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} F_i(a_i m_i) \right) x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} \tag{1}$$

definierte zahlentheoretische Funktionen. Dann gilt:

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(m_i) = \prod_{i=1}^{k} \left(F_i(r_i) f_i(a_i m_i / r_i) \right).$$

Beweis: Mit der Festsetzung $\Phi_i(m_i) = \sum_{d_i/m_i} \varphi_i(d_i)$ ist wegen

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{d_i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(d_i) x_i^{d_i}}{1-x_i^{d_i}} \right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{d_i=1}^{\infty} \varphi_i(d_i) \sum_{t_i=1}^{\infty} x_i^{d_i t_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{m_i=1}^{\infty} x_i^{m_i} \sum_{d_i/m_i} \varphi_i(d_i) \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{m_i=1}^{\infty} \Phi_i(m_i) x_i^{m_i} \right) = \sum_{m_1, \ldots, m_k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m_i) \right) x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k}$$

und wegen (1): $\prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m_i) = \prod_{i=1}^{k} F_i(a_i m_i)$ für alle $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbf{N}^k$. Hieraus gewinnt man mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformel

$$\sum_{d_1/m_1} \cdots \sum_{d_k/m_k} \prod_{i=1}^{k} \left(\mu(d_i) F_i(a_i m_i / d_i) \right) = \sum_{d_1/m_1} \cdots \sum_{d_k/m_k} \prod_{i=1}^{k} \left(\mu(d_i) \Phi_i(m_i/d_i) \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{d_i/m_i} \mu(d_i) \Phi_i(m_i/d_i) \right) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(m_i); \tag{2}$$

dabei bezeichnet μ die Möbiussche Funktion. Da r_i der grösste Teiler von a_i ist, der prim zu m_i ist, ist $a_i = r_i a_i'$, $(r_i, m_i) = 1$ und r_i maximal. Wäre $(r_i, a_i') > 1$ für ein i, so gäbe es eine Primzahl p_i mit $p_i \mid r_i$ und $p_i \mid a_i'$; dann wäre $p_i \nmid m_i$ und also $p_i r_i$ ein Teiler von a_i mit $(p_i r_i, m_i)=1$ entgegen der Maximalität von r_i. Da f_i multiplikativ ist, ist bekanntlich auch F_i multiplikativ; wegen $(r_i, a_i' m_i/d_i)=1$ für alle $d_i \in \mathrm{N}$ mit $d_i | m_i$ ist nach (2)

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(m_i)=\left(\prod_{i=1}^{k} F_i(r_i)\right) \sum_{d1/m1} \cdots \sum_{dk/mk} \prod_{i=1}^{k} \left(\mu(d_i) F_i(a_i' m_i/d_i)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{k} \left(F_i(r_i) \sum_{di/mi} \mu(d_i) F_i(a_i' m_i/d_i)\right) . \tag{3}$$

Wir beachten hier, dass im letzten Ausdruck

$$\sum_{di/mi} \cdots = \sum_{di/a_i' m_i} \cdots$$

ist. Denn für $a_i'=1$ ist dies klar; ist $a_i'>1$, so ist aber $a_i' | m_i$ wegen der Maximalität von r_i und aus $d_i | a_i' m_i$, $d_i \nmid m_i$ folgt, dass d_i nicht quadratfrei ist, und also, dass $\mu(d_i)=0$ gilt. Mit dieser Bemerkung und der Möbiusschen Umkehrformel folgt aus (3) aber

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(m_i)=\prod_{i=1}^{k} \left(F_i(r_i) f_i(a_i' m_i)\right)=\prod_{i=1}^{k} \left(F_i(r_i) f_i(a_i m_i/r_i)\right) .$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte J. Steinig (Genf).

Aufgabe 787. Ein konvexes n-Eck P_n soll durch Diagonalen in ein Viereck und $n-4$ Dreiecke zerlegt werden. Sei $z(n,k)$ die Anzahl der Zerlegungen, bei denen genau k Vierecksseiten mit Seiten von P_n übereinstimmen. Man bestimme $z(n,k)$. Die Gesamtzahl aller Zerlegungen ist dann $z(n)=\sum_{k=0}^{4} z(n,k)$; man bestimme $z(n)$ auch direkt.

J. Binz, Bern

Lösung: Es werde als bekannt vorausgesetzt, dass die n-te Catalan-Zahl

$$C_n=\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

die Anzahl der Zerlegungen eines konvexen n-Ecks in Dreiecke angibt. Wir bestimmen $z(n,k)$ der Reihe nach für $k=4, 3, 2, 1, 0$.
$k=4$: Unmittelbar einzusehen ist

$$z(n,4)=1 \quad \text{für} \quad n=4, \qquad z(n,4)=0 \quad \text{für} \quad n>4 .$$

$k=3$: Es lassen sich n-mal drei aufeinanderfolgende Seiten von P_n auswählen, und jeweils bleibt ein (n-2)-Eck in Dreiecke zu zerlegen. Daher gilt

$$z(n,3)=n\,C_{n-2}, \qquad n\geqslant 5.$$

$k=2$: Zwei benachbarte Seiten von P_n (n Möglichkeiten) lassen sich durch einen Eckpunkt zu einem Viereck ergänzen. Es bleiben ein i-Eck und ein $(n-i)$-Eck in Dreiecke zu zerlegen, wofür es $C_i\,C_{n-i}$ Möglichkeiten gibt $(3\leqslant i\leqslant n-3)$. Zwei nicht benachbarte Seiten bestimmen auch ein Viereck für $z(n,2)$. Ebenfalls sind jeweils ein i-Eck und ein $(n-i)$-Eck in Dreiecke zu zerlegen, wobei aber jeder Fall doppelt gezählt wird (von jeder der Seiten von P_n aus einmal).

Insgesamt ist

$$z(n,2)=\left(n+\frac{n}{2}\right)(C_3\,C_{n-3}+C_4\,C_{n-4}+\cdots+C_{n-3}\,C_3).$$

Mit Hilfe der bekannten Rekursionsformel

$$C_{n+1}=\sum_{k=2}^{n} C_k\,C_{n+k-2}$$

vereinfacht sich dies zu

$$z(n,2)=\frac{3}{2}n(C_{n-1}-2\,C_{n-2}), \qquad n\geqslant 5.$$

$k=1$: Wird zu einer der n Seiten von P_n die von einem ihrer Eckpunkte ausgehende, ein i-Eck abschneidende Diagonale hinzugewählt, so ergeben sich $2\,C_i z(n+2-i,2)/3\,(n+2-i)$ Möglichkeiten. Die Summe für alle i mit $3\leqslant i\leqslant n-3$ ergibt

$$z(n,1)=n(C_n-4\,C_{n-1}+3\,C_{n-2}), \qquad n\geqslant 5.$$

$k=0$: Es lässt sich n-mal eine Diagonale auswählen, die ein i-Eck abschneidet. Dieses hat C_i Zerlegungen in Dreiecke, der Rest besitzt $z(n+2-i,1)/(n+2-i)$ Zerlegungen in Dreiecke und in ein Viereck mit der gewählten Diagonale als Seite. Jeder Fall wird viermal gezählt (von jeder Seite des Vierecks aus). Summation über i mit $3\leqslant i\leqslant n-3$ ergibt

$$\begin{aligned} z(n,0)&=\frac{1}{4}n(C_{n+1}-6\,C_n+10\,C_{n-1}-4\,C_{n-2})\\ &=\frac{1}{2}\left(-(n+3)\,C_n+5n\,C_{n-1}-2n\,C_{n-2}\right), \qquad n\geqslant 5. \end{aligned}$$

Die Summe aller Zerlegungsanzahlen ist also

$$z(n)=\sum_{k=0}^{4} z(n,k)=\frac{1}{2}(n-3)\,C_n=\binom{2n-5}{n-4}.$$

Da P_n durch $n-3$ Diagonalen in Dreiecke zerlegt wird, kann in jeder der C_n Zerlegungen $(n-3)$-mal eine Diagonale entfernt werden, und es bleibt eine gewünschte Zerlegung in Dreiecke und ein Viereck übrig. Jedes Viereck entsteht durch Wegnahme einer von zwei Diagonalen des Vierecks, so dass jede Zerlegung doppelt gezählt wird. Aus $2\,z(n)=(n-3)\,C_n$ folgt letzteres Resultat direkt.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

A. Cayley: On the Partitions of a Polygon. Proc. London Math. Soc. *XXII*, 237-262 (1891), oder Coll. Math. Papers *XIII*, 93-113.

T.P. Kirkman: On the k-partitions of the r-gon and r-ace. Phil. Trans. *147*, 225 (1857).

Weitere Lösungen sandten J. Suck (Bochum, BRD) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 788. Im ebenen Dreieck mit den Seiten a,b,c mögen sich die Winkelhalbierende w_a, die Schwerelinie m_b und die Höhe h_c in einem Punkte schneiden.

1. Welche Anordnungsbeziehungen zwischen den Masszahlen von a,b,c sind möglich?
2. Welche von den 3 Innenwinkeln α,β,γ können $\geq 90°$ sein?
3. Man bestimme unter der Voraussetzung, dass das Dreieck spitzwinklig ist, die bestmögliche untere Schranke für den Winkel α.

W. Florow, München, BRD

Lösung: Es sei $w_a=\overline{AA'}$, $m_b=\overline{BB'}$, $h_c=\overline{CC'}$. Wegen $|BA'|:|A'C|=c:b$ und $|CB'|=|B'A|$ folgt aus dem Satz von Ceva: $|AC'|:|C'B|=b:c$. Da A', B' innere Punkte von $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ sind, ist C' auch innerer Punkt von $\overline{AB}$. Daher ist $|AC'|=bc/(b+c)$ und

$$\cos\alpha=\frac{b}{b+c}. \tag{1}$$

Sei S der Schnittpunkt der Geraden AC mit der durch B gehenden Parallelen g zu CC'. Dann ist $\cos\alpha=c/|AS|$, wegen (1) also $|AS|=b+c$ und $|SC|=c$. Daraus folgt eine einfache Konstruktion für den Ort der Eckpunkte C aller Dreiecke mit der in der Aufgabe genannten Eigenschaft, bei fester Seite $\overline{AB}=c$. Es handelt sich um einen Ast der Konchoide des Nikomedes, für die A Rückkehrpunkt und g Asymptote ist. Auf dem anderen Ast dieser Konchoide liegen übrigens die Ecken C' jener Dreiecke über $\overline{AB}$, bei denen die Aussenwinkelhalbierende von A sowie m_b und h_c konkurrent sind.

Aus einer Figur ersieht man unmittelbar, dass nur folgende drei Fälle eintreten können:

$$\gamma < 60° < \alpha < \beta < 90°, \quad \text{also} \quad c < a < b;$$
$$\gamma = \alpha = \beta = 60°, \quad \text{also} \quad c = a = b;$$
$$\gamma > 60° > \alpha > \beta, \quad \text{also} \quad c > a > b.$$

Demnach kann nur γ ein rechter oder ein stumpfer Winkel sein. Für $\gamma = 90°$ ist $b/c = \cos\alpha$. Damit ergibt sich aus (1)

$$\cos\alpha \quad (\cos\alpha + 1) = 1,$$

woraus man

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 51{,}82729°$$

als grösste untere Schranke für α im spitzwinkligen Dreieck ABC erhält.

K. Grün, Linz, A

Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Freiburg, BRD), J.T. Groenmann (Groningen, NL), L. Kuipers (Mollens VS), I. Paasche (München, BRD), M. Vowe (Therwil BL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1978* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 804. Man bestimme die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze eines regulären Ikosaeders. [Vgl. M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders. El. Math. *30,* 73-83 (1975).]

Ch. Hippenmeyer, Basel

Aufgabe 805. Man bestimme für $z \in C$ mit $\mathrm{Re}(z) \neq 0$

$$g = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sum_{m=0}^{[n/2]}\binom{n}{2m}z^m\right)\left(\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2m+1}z^m\right)^{-1}\right\}.$$

L. Hämmerling, Aachen, BRD

Aufgabe 806. Die Funktionen $f, g: [0,1] \to \mathbf{R}$ seien Rieman-integrabel, und f sei monoton fallend. Ferner sei

$$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x g(t)\,dt \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1].$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare, monoton wachsende und konvexe Funktion $\Phi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$\int_0^x \Phi(f(t))\,dt \leqslant \int_0^x \Phi(g(t))\,dt \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1].$$

Dies ist zu zeigen.

Aufgabe 806A. Man beweise die Aussage von Aufgabe 806 für beliebige monoton wachsende, konvexe Funktionen Φ.

C. Bandle, Basel

Literaturüberschau

G. Krabbe: Operational Calculus. 349 Seiten. $8.95. Plenum Publ. Corp., New York 1975.
Das Buch beinhaltet eine interessante Erweiterung der klassischen Operatorkalküle. Es ist für den an mathematischen Problemen der Ingenieurwissenschaften interessierten Leser verschiedenster Fachrichtungen geschrieben. Dementsprechend werden die mathematischen Objekte in einer gut verständlichen Sprache beschrieben und die Ideen an zahlreichen wichtigen Anwendungen illustriert. K. Weber

A basic Library List for Four-Year Colleges. Herausgegeben von der Mathematical Association of America (MAA). 110 Seiten, $4.50. 2. Auflage, 1976. ISBN 0-88385-423-6.
Die MAA hat vor einigen Jahren eine Kommission eingesetzt, der die Herausgabe eines Verzeichnisses einführender englischer Literatur für die verschiedensten Gebiete der Mathematik aufgetragen ist. Die Liste ist erstmals 1965 erschienen; in der nun vorliegenden 2. Auflage ist sie auf rund 700 Titel angewachsen. Die MAA hat damit für Studierende und für akademische Lehrer eine äusserst wertvolle Orientierungshilfe geschaffen. Es wäre zu wünschen, dass die Idee zur Herausgabe eines solchen Verzeichnisses auch im europäischen Raume mit seiner anders gearteten Hochschulstruktur aufgegriffen wird. M. Jeger

R.B. Holmes: Geometric Functional Analysis and its Applications. X und 246 Seiten. DM 39.10. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975.
Der Autor behandelt in diesem Buch die geometrischen Aspekte der Funktionalanalysis, welche zur Hauptsache auf dem Begriff der Konvexität beruhen. Vorausgesetzt werden einige Kenntnisse aus der linearen Algebra, der Topologie und der Masstheorie. Das Buch kann von Studenten höherer Semester mit Erfolg gelesen werden. Es kann jedoch auch als Basis für ein Nachdiplomstudium dienen. Dabei spricht es sowohl den in der reinen Mathematik tätigen Leser an, als auch den eher anwendungsorientierten. Für den letzteren dürfte es insbesondere interessant sein, da zahlreiche Fragen der angewandten Mathematik, welche im Rahmen der geometrischen Funktionalanalysis mit Erfolg behandelt werden können, vom Autor besonders berücksichtigt worden sind. Als Beispiele seien Probleme der Approximationstheorie und der Optimierungstheorie erwähnt. An mehr als 200 Beispielen, von denen einige recht anspruchsvoll sind, kann der Leser stets den Stand seines Wissens überprüfen. K. Weber