

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1978)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Es gibt nämlich eine Kurve aus (2) mit  $\psi = \text{konst.}$ , die in  $V$  beginnt und  $D$  durchläuft. Gemäss (17) berechnet man  $x^{**}$ . Die Achsenparallele  $x = x_0^{**}$  ( $x_0^{**} > x_D$ !) schneidet die Zylinderkurve unten genau einmal. Wegen der Monotonie von  $x^{**}$  [mit Hilfe von (17) und (2) zu errechnen] kann rechts von dieser Parallelen keine Kurve aus (2) verlaufen, und somit liegt auch der Enveloppenbogen links. Damit ist die Randeigenschaft der Zylinderkurve bis in sehr grosse Nähe von  $S$  bewiesen.

## V. Schlussbetrachtung

Der äussere Bildrand unseres Kegelstumpfproblems ist in der vollen Klasse aller konvexen Rotationskörper ohne Bedeutung, sind doch alle Extremalkörper bekannt ([1], § 28). Was aber den inneren Bildrand betrifft, so vermute ich, dass er mit Ausnahme des Bogens  $SU$  für die volle Klasse seine Gültigkeit beibehält. Diese Vermutung stützt sich auf ein Teilresultat (Fig. 2) sowie auf gesicherte Extremaleigenschaften von Kegeln<sup>3)</sup>.

H. Bieri, Wabern (Köniz)

3) In einer noch unveröffentlichten Note konnte ich zeigen, dass im Intervall  $8/\pi^2 < x \leq 0,842153$  mit  $0 < a \leq a^* = 0,431365$  symmetrische Kugellinsen, hernach im Intervall  $0,842153 < x \leq 0,857102$  symmetrische Kappenkörper der speziellen Linse mit  $a = a^*$  und  $0 < \beta \leq 23,528356^\circ$  notwendige Bedingungen für ein Maximum von  $V$  erfüllen und somit mit grosser Wahrscheinlichkeit das fehlende Stück des inneren Bildrandes liefern werden.

# Kleine Mitteilungen

## Über eine Primzahlkongruenz

### 1. Einleitung

In [1] wird eine Matrix  $A$  folgendermassen definiert:

**Definition 1.1.** *p sei eine Primzahl;  $A = (a_{ij})$  ist die Matrix, deren Elemente durch folgendes Rekursionsschema gegeben sind:*

$$a_{i,1} = i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$a_{i,k} = i \sum_{j=1}^i a_{j,k-1}, \quad k > 1 \quad \text{und} \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Es wird dann bewiesen:

**Theorem 1.2.** Alle Elemente von  $A$  unterhalb der Nebendiagonalen sind durch  $p$  teilbar.

Die Autoren fragen nach einem Beweis ihres Satzes unter Benutzung von Matrizenrechnung. In der vorliegenden Note soll ein einfacher Beweis dieser Art mitgeteilt werden.

## 2. Der Beweis

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p-1 & p-1 & p-1 & & p-1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p-1 \end{pmatrix}.$$

Es wird sofort klar, dass die Spalten von  $A$  gerade durch  $v, Mv, M^2v, \dots, M^{p-2}v$  gegeben sind. Beachtet man, dass  $v$  die erste Spalte von  $A$  ist, so lässt sich dies auch so ausdrücken: die Spalten von  $A$  sind gegeben durch die erste Spalte der Matrizen  $M, M^2, M^3, \dots, M^{p-1}$ . Da uns die Kongruenzen mod  $p$  interessieren, wollen wir die Matrixelemente als Elemente des Primkörpers der Charakteristik  $p$ ,  $F_p$ , auffassen.

**Satz 2.1.**  $M$  ist (über  $F_p$ ) diagonalisierbar und hat die  $p-1$  verschiedenen Eigenwerte  $1, 2, 3, \dots, p-1$ .

Beweis: Für  $k=1, 2, 3, \dots, p-1$  ist  $\det(M-kI)=0$ . Dabei bezeichnet  $I$  die  $(p-1) \times (p-1)$ -Einheitsmatrix.

**Korollar 2.2.**  $M^{p-1}=I$ .

Beweis:  $M$  ist aufgrund von 2.1 zu

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 \end{pmatrix}$$

ähnlich, und  $M^{p-1}=D^{p-1}=I$ .

Wie erwähnt wollen wir auch niedrigere Potenzen von  $M$  kennenlernen:

**Korollar 2.3.**  $M^k$  hat Nullen auf und unterhalb der  $(p-k)$ ten Subdiagonalen ( $k=2, 3, \dots, p-1$ ).

Beweis: Für  $k=p-1$  ist das bereits in 2.2 enthalten. Wir zeigen nun: ist  $x$  ein Spaltenvektor mit der Eigenschaft, dass die letzten  $i$  Komponenten von  $Mx$  gleich 0 sind, so sind die letzten  $i-1$  Komponenten von  $x$  gleich 0:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{p-i} \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}, Mx = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2(x_1 + x_2) \\ \vdots \\ (p-i-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_{p-i-1}) \\ (p-i)(x_1 + x_2 + \cdots + x_{p-i}) \\ \vdots \\ \vdots \\ (p-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_{p-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{p-i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also  $(p-i)(x_1 + \cdots + x_{p-i}) = 0$  und somit  $x_1 + \cdots + x_{p-i} = 0$ ; ferner  $(p-i+1)(x_1 + \cdots + x_{p-i} + x_{p-i+1}) = 0 = (p-i+1)x_{p-i+1}$ , also  $x_{p-i+1} = 0$  usw.

Damit ist nun auch Satz 1.2 bewiesen. Durch Betrachtung nicht nur der ersten Spalte in  $M, M^2, \dots$  ergeben sich natürlich weitere Resultate, die über 1.2 hinausgehen.

Paul R. Hafner, The University of Auckland, New Zealand

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L.J. Morley and A. Bishop: A prime congruence theorem. El. Math. 32, 91–93 (1977).

## Aufgaben

**Aufgabe 786.** Es seien  $f, g$  multiplikative zahlentheoretische Funktionen, ferner

$$F(m) = \sum_{d|m} f(d), \quad G(n) = \sum_{d|n} g(d); \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Zu gegebenen natürlichen Zahlen  $a, b, m, n$  bezeichne  $r$  bzw.  $s$  den grössten Teiler von  $a$  bzw.  $b$ , welcher relativ prim zu  $m$  bzw.  $n$  ist. Schliesslich seien  $\varphi, \psi$  zwei durch die Beziehung