Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 33 (1978)

Heft: 3

Artikel: Extremaleigenschaften rotationssysmmetrischer Kegelstümpfe im gewöhnlichen Raum. 2. Teil

Autor: Bieri, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32941

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Extremaleigenschaften rotationssymmetrischer Kegelstümpfe im gewöhnlichen Raum (2. Teil)

Nachdem im 1. Teil dieser Arbeit (vgl. El. Math., Bd. 33, S. 7–14) die Ergebnisse dargelegt wurden, folgt hier nun die in Aussicht gestellte Beweisführung.

Unter Ausnützung der Ähnlichkeitsinvarianz von (1) berechnet man:

$$x = \frac{8(L^2-1)}{[\pi L - (\pi \sec\psi - 2\,\mathrm{tg}\,\psi \cdot \psi - 2)]^2},$$

$$z = \frac{2(3L^2 - 6\sec\psi \cdot L + 4\sec^2\psi - 1)^2}{(L^2-1)^3}. \tag{2}$$

$l = 1, 2L =$ reduzierte Meridiankurvenlänge,
$\psi =$ Winkel zwischen Rotationsachse und Seitenlinie,
$\psi = 0 \to$ Zylinder, $L = L_0 = \sec\psi + \mathrm{tg}\,\psi \to$ Kegel,
$L = 1, \psi = 0 \to$ Strecken,
$L \to \infty$, ψ beliebig $\to$ Kreisscheiben,
$0 \leqq \psi \leqq \pi/2$, $\sec\psi = \cos\psi^{-1}$, $1 \leqq L_0 \leqq L < \infty$.

Das Extremalproblem wird als Abbildungsproblem aufgefasst, wobei in erster Linie der Rand des Bildes $\bar{C}$ interessiert. Nun sind diese Randpunkte entweder Bilder von Randpunkten von $G(L,\psi)$ oder dann Bilder von inneren Punkten von G mit verschwindender Funktionaldeterminante. $G(L,\psi)$ ist nicht beschränkt. Dieser Umstand bietet keine ernsthafte Schwierigkeit, handelt es sich doch bloss um eine Singularität der Parameterdarstellung, die sofort beseitigt werden kann.
Nun gilt mit der Substitution

$$\boxed{L = \lambda \cdot \sec\psi\,^{2)}} \tag{3}$$

$$\Phi \equiv \frac{\partial(x,z)}{\partial(L,\psi)} = -A(\psi)\cdot\lambda^3 + B(\psi)\cdot\lambda^2 - C(\psi)\cdot\lambda + D(\psi). \tag{4}$$

$A(\psi) = 3\sec^2\psi\,[2\psi + \sin(2\psi) - \pi\sin\psi]$,
$B(\psi) = 6\sec^2\psi\,[2\psi(2-\sin^2\psi) + \sin(2\psi) - \pi\sin\psi]$,
$C(\psi) = \sec^2\psi\,[\psi(22\sin^2\psi - 30) + \pi\sin\psi\,(1+3\sin^2\psi) + \sin(2\psi)\,(3\sin^2\psi - 7)]$,
$D(\psi) = 2[6\psi + 3\sin(2\psi) + \pi\sin\psi]$,

$$A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 0,$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2};\quad B\left(\frac{\pi}{2}\right) = 9\pi;\quad C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\pi;\quad D\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\pi. \tag{5}$$

2) Diese Substitution hat den Zweck, Monotonie zu erzwingen. Es hat sich als zweckmässig erwiesen, sie nicht schon in (2) einzuführen.

$$\Phi(\lambda,0)=0;\ \Phi\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right)=-3\lambda^3+18\lambda^2-32\lambda+16,$$

$$\Phi\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right)=0\rightarrow\lambda_1=\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})\sim 0{,}8453,$$

$$\lambda_2=2,$$

$$\lambda_3=\frac{2}{3}(3+\sqrt{3})\sim 3{,}1546. \tag{6}$$

Man braucht noch:

$$\Phi_0=\frac{\partial\Phi(\lambda,\psi)}{\partial\lambda}=-3A(\psi)\cdot\lambda^2+2B(\psi)\cdot\lambda-C(\psi). \tag{7}$$

Im Intervall $0\leqq\psi\leqq\pi/2$ sind

$A(\psi)$ und $B(\psi)$ monoton wachsend und konvex,
$C(\psi)$ und $D(\psi)$ monoton wachsend und konkav. (8)

Als Kernstück der Beweisführung folgt nun die Aufstellung und vollständige Diskussion der Diskriminanten von Φ und Φ_0, die wir Ψ und Ψ_0 nennen. Es ist:

$$\begin{aligned}
&\Psi(\psi)\equiv P(\psi)-Q(\psi),\\
&\qquad P(\psi)=B^2C^2+18ABCD,\\
&\qquad Q(\psi)=4B^3D+4AC^3+27A^2D^2,\\
&\Psi_0(\psi)=B^2-3AC,\\
&\Psi(0)=\Psi_0(0)=0;\ \Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=48\pi^4,\ \Psi_0\left(\frac{\pi}{2}\right)=9\pi^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

P und Q sind monoton, was aber für Ψ keineswegs zutrifft. Die Informationen des Computers ermöglichen die Erstellung eines aufschlussreichen, allerdings nicht maßstabgetreuen Schaubildes (Fig. 4). Diese Informationen sind nun durch scharfe Aussagen zu ersetzen. Dies erfolgt in drei Schritten.

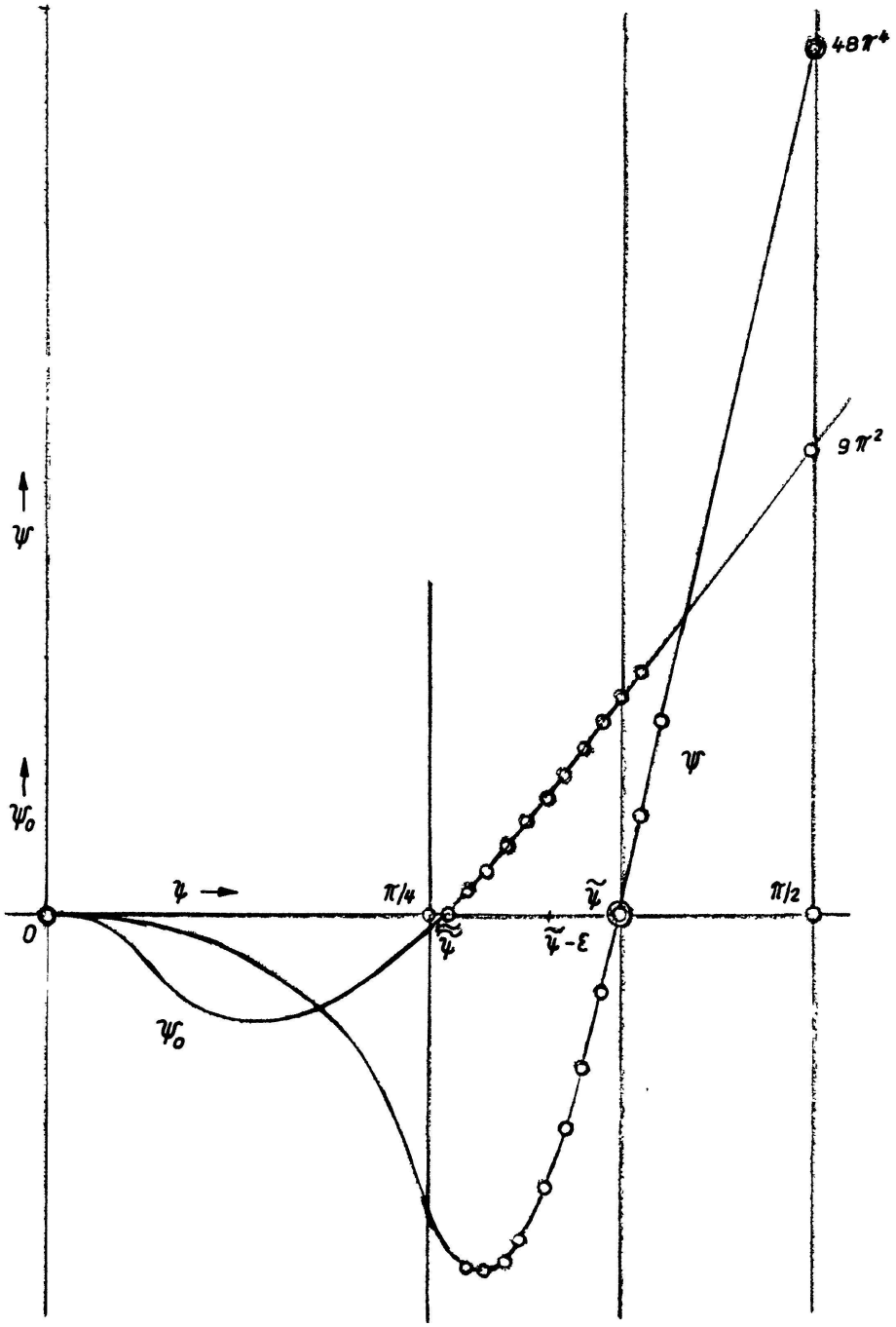
a) Für $\Psi<0$ ist hinreichend $\Psi_0<0$. Dies ist aber für das Teilintervall $0\leqq\psi\leqq\pi/4$ schon bewiesen ([13], S. 178). Wir müssen also zeigen, dass $\Psi<0$ noch gilt in $\pi/4<\psi<\tilde{\psi}$. Zu diesem Zweck konstruieren wir negative Majoranten von der Form

$$\overline{\Psi}(\psi,t)=\overline{P}(\psi+t)-Q(\psi);\ 0<t\leqq\Delta. \tag{10}$$

Mit $\Delta=10^{-3}$ ist $\overline{\Psi}(\pi/4,\Delta)<0$, wegen der Monotonie von $P(\psi)$ aber auch $\overline{\Psi}(\pi/4,t)<0$ im ganzen zulässigen Intervall und erst recht

$$\overline{\Psi}\left(\frac{\pi}{4},\Delta\right)=P\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right)-Q\left(\frac{\pi}{4}+\Delta\right)<0. \tag{11}$$

Nun ersetzt man ψ durch $\psi+\Delta$ und wiederholt das Verfahren. Es wird notwendig, Δ zu verkleinern. So gelangt man beliebig nahe an die Nullstelle $\psi=\overline{\psi}$ heran. Er-



Figur 4

reichen wird man sie aber nie; denn mit der Abnahme von Δ wächst die Rechenzeit des Computers über alle Grenzen.

b) Figur 4 lehrt, dass von einem gewissen $\psi = \overline{\psi} - \varepsilon$ an die Ableitung von $\Psi(\psi)$ sehr gross ist und offenbar dauernd wächst. Man führt also mit Vorteil $d\Psi/d\psi$ ein und diskutiert ($d/d\psi = \dot{Q}$).

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}(\psi) &= \dot{P}(\psi) - \dot{Q}(\psi), \\
\dot{P} &= \dot{A} \cdot 18\,BCD + \dot{B}\,(2\,BC^2 + 18\,ACD) \\
&\quad + \dot{C}\,(2\,B^2C + 18\,ABD) + \dot{D} \cdot 18\,ABC, \\
\dot{Q} &= \dot{A}\,(4\,C^3 + 54\,AD^2) + \dot{B} \cdot 12\,B^2D \\
&\quad + \dot{C} \cdot 12\,AC^2 + \dot{D}\,(4\,B^3 + 54\,A^2D),
\end{aligned}
$$

$$\dot{P}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 340\,992\,\pi^3;\ \dot{Q}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 340\,096\,\pi^3,$$
$$\dot{\Psi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 896\,\pi^3 \sim 27\,776. \tag{12}$$

Jetzt konstruieren wir Minoranten, welche im zulässigen Intervall positiv bleiben. Dabei muss man gebührend auf (8) achten.
Wir setzen an:

$$\dot{\Psi}(\psi,t) \equiv \dot{P}(\psi,t) - \dot{Q}(\psi,t);\ 0 < t \leqq \Delta. \tag{13}$$

In $\dot{P}$ ist für $\dot{C}$ und $\dot{D}$ das Argument $(\psi+t)$, sonst überall $(\psi-t)$ einzusetzen. Für $\dot{Q}$ aber ist gerade umgekehrt zu verfahren.
$\Psi(\psi,t)$ ist eine sehr starke Minorante. Bleibt sie für genügend kleines Δ positiv, so hat sie diese Eigenschaft im ganzen Intervall $0 < t \leqq \Delta$, und
$\dot{\Psi}(\psi,t) = \dot{P}(\psi+t) - \dot{Q}(\psi+t)$ ist erst recht positiv.
Wie in a) dargelegt, funktioniert das Verfahren, die kritische Stelle $\psi = \tilde{\psi}$ mühelos passierend, bis in grosse Nähe von $\psi = \pi/2$. Weil die Minorante zu stark ist, wird man diese kritische Stelle nie erreichen, doch lässt sich die verbleibende Lücke auf andere Art schliessen.

c) Es ist $\Psi(\pi/2) = 48\,\pi^4$. Dann ist

$$\Psi(\psi) = P(\psi) - Q\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\psi < \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

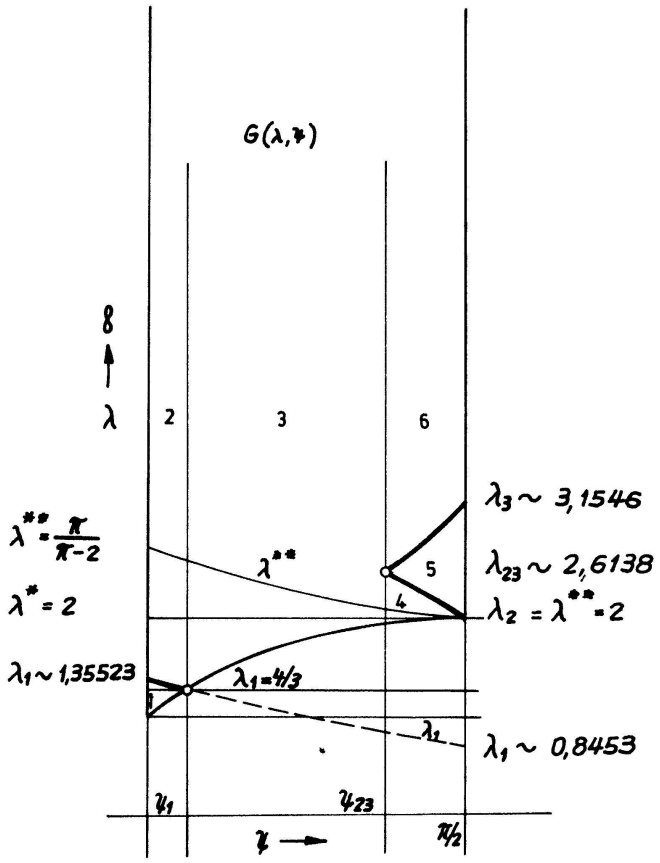
Minorante, und wegen der Monotonie von $P(\psi)$ existiert eine einzige Nullstelle der Gleichung $\Psi(\psi) = 0$. Diese Nullstelle lässt $P(\psi) - Q(\psi)$ positiv. Jetzt setzen wir an

$$\Psi(\psi,t) \equiv P(\psi-t) - Q(\psi) \tag{15}$$

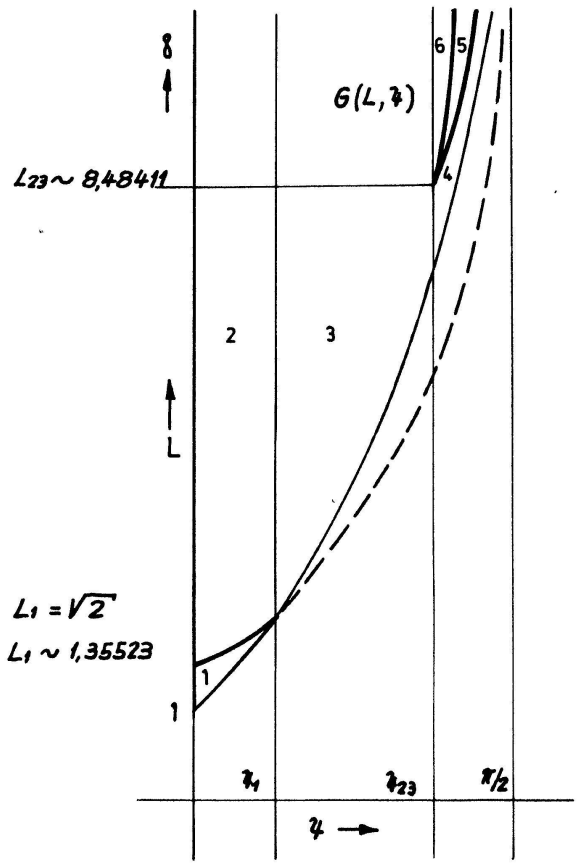
und verfahren analog zu a).
Entscheidend ist nun der Umstand, dass die günstigen Intervalle von a), b), c) einander paarweise überdecken, so dass das Vorzeichen von $\Psi(\psi)$ im vollen Intervall $\pi/4 \leqq \psi \leqq \pi/2$ sichergestellt ist.
Zusammenfassend halten wir fest: Im Intervall $0 < \psi < \tilde{\psi}$ ist $\Psi(\psi)$ negativ, und $\Phi(\psi)$ besitzt genau 1 reelle Wurzel $\lambda = \lambda_1$. In der Note ([13], S. 180) konnte ich bekanntgeben, dass dieselbe für das Kegelstumpfproblem nur im Teilintervall

$$0 \leqq \psi \leqq \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \tag{16}$$

Bedeutung hat. Im Intervall $\tilde{\psi} < \psi \leqq \pi/2$ aber ist $\Psi(\psi)$ positiv, und Φ besitzt 3 reelle Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, von denen die kleinste, λ_1, ausfällt. Für $\psi = 0$ ist auch $\Phi = 0$, und für $\psi = \tilde{\psi}$ ist wieder $\Psi = 0$, und λ_2 und λ_3 fallen zusammen. Beim Durchgang durch diese Stelle wechselt das Vorzeichen von Φ nicht.



Figur 5



Figur 6

$\psi_1 = \arcsin(1/3)$ $\psi_{23} \sim 1,25762 = 72°03'22\frac{1}{2}''$

Wir gehen jetzt über zur Beschreibung der Originalbereiche $G(\psi,\lambda)$ und $G(\psi,L)$ (Fig. 5, 6). Zur besseren Übersicht ist noch notwendig, die einparametrige Kurvenschar (2) mit $\psi=$konst. zu diskutieren. Jede einzelne dieser Kurven beginnt mit $\lambda_0=1+\sin\psi$, durchläuft mit $\lambda^*=2$ das einzige Maximum von z und hernach mit

$$\lambda^{**}=\frac{\pi\cos^2\psi}{\pi-2\sin\psi\cdot\psi-2\cos\psi} \tag{17}$$

das einzige Maximum von x, um schliesslich von rechts horizontal in S einzumünden. Unter Berücksichtigung von

$$\Phi(\lambda,\psi)<0 \text{ in } \lambda^*\leqq\lambda\leqq\lambda^{**} \quad ([13], \text{S. } 180)$$

kann festgestellt werden:

$$0\leqq\psi<\arcsin\left(\frac{1}{3}\right):\lambda_0<\lambda_1<\lambda^*<\lambda^{**}<\infty$$
$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)<\psi<\tilde{\psi}:\lambda_0<\lambda^*<\lambda^{**}<\infty\,(\Phi\neq 0)$$
$$\tilde{\psi}<\psi\leqq\frac{\pi}{2}:\lambda_0<\lambda^*<\lambda^{**}<\lambda_2<\lambda_3<\infty$$
$$\psi=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right):\lambda_1=\lambda_0$$
$$\psi=\tilde{\psi}:\lambda_3=\lambda_2=\lambda_{23}$$
$$\psi=0:\text{Zylinderkurve mit } \Phi=0.$$

Jetzt ist noch die Abb. 2 und ihre Auswirkung ins Auge zu fassen. Diese Abbildung ist als Ganzes nicht bijektiv. Doch lassen sich durch Zerschneiden von G in 6 Teilbereiche bijektive Teilabbildungen gewinnen. Beim Zusammenlegen kommt es zu Überlappungen, und ein Teil der Bildränder gerät ins Innere von $\bar{G}$ (Fig. 3).
Der Bogen E_1E_2 bleibt Randstück. Zu E_1 gehört der ausgezeichnete Zylinder mit $l=1, a\sim 0{,}177615$. E_2 aber ist das Bild des speziellen Kegels mit dem Flächenwinkel des regulären Tetraeders.

Die Doppelwurzel λ_{23} induziert den Punkt D. Von ihm gehen zwei Enveloppenäste aus, die der Computer punktweise berechnet. Der linksseitige (innere) wird mit $\lambda=\lambda_3$ durchlaufen, schneidet die Kegelkurve in W, wird sodann innerer Bildrand und mündet in S mit der Steigung

$$p=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{9}{4}(2\sqrt{3}-3)\sim\frac{\pi^2}{4}\cdot 1{,}044. \tag{18}$$

Der rechtsseitige (äussere) Ast wird mit $\lambda=\lambda_2$ durchlaufen und bleibt offenbar mit Ausnahme von S oberhalb der Zylinderkurve. Die letztere Behauptung lässt sich teilweise noch exakt beweisen.

Es gibt nämlich eine Kurve aus (2) mit $\psi = \text{konst.}$, die in V beginnt und D durchläuft. Gemäss (17) berechnet man x^{**}. Die Achsenparallele $x = x_0^{**}$ ($x_0^{**} > x_D$!) schneidet die Zylinderkurve unten genau einmal. Wegen der Monotonie von x^{**} [mit Hilfe von (17) und (2) zu errechnen] kann rechts von dieser Parallelen keine Kurve aus (2) verlaufen, und somit liegt auch der Enveloppenbogen links. Damit ist die Randeigenschaft der Zylinderkurve bis in sehr grosse Nähe von S bewiesen.

V. Schlussbetrachtung

Der äussere Bildrand unseres Kegelstumpfproblems ist in der vollen Klasse aller konvexen Rotationskörper ohne Bedeutung, sind doch alle Extremalkörper bekannt ([1], § 28). Was aber den inneren Bildrand betrifft, so vermute ich, dass er mit Ausnahme des Bogens SU für die volle Klasse seine Gültigkeit beibehält. Diese Vermutung stützt sich auf ein Teilresultat (Fig. 2) sowie auf gesicherte Extremaleigenschaften von Kegeln[3]).

H. Bieri, Wabern (Köniz)

3) In einer noch unveröffentlichten Note konnte ich zeigen, dass im Intervall $8/\pi^2 < x \leqq 0{,}842153$ mit $0 < \alpha \leqq \alpha^* = 0{,}431365$ symmetrische Kugellinsen, hernach im Intervall $0{,}842153 < x \leqq 0{,}857102$ symmetrische Kappenkörper der speziellen Linse mit $\alpha = \alpha^*$ und $0 < \beta \leqq 23{,}528356°$ notwendige Bedingungen für ein Maximum von V erfüllen und somit mit grosser Wahrscheinlichkeit das fehlende Stück des inneren Bildrandes liefern werden.

Kleine Mitteilungen

Über eine Primzahlkongruenz

1. Einleitung

In [1] wird eine Matrix A folgendermassen definiert:

Definition 1.1. *p sei eine Primzahl; $A = (a_{ij})$ ist die Matrix, deren Elemente durch folgendes Rekursionsschema gegeben sind:*

$$a_{i,1} = i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p-1,$$

$$a_{i,k} = i \sum_{j=1}^{i} a_{j,k-1}, \qquad k > 1 \quad \text{und} \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$