

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1978)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen  
**Autor:** Joachim, Egon  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32940>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

---

El. Math.

Band 33

Heft 3

Seiten 57–80

10. Mai 1978

---

## Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen

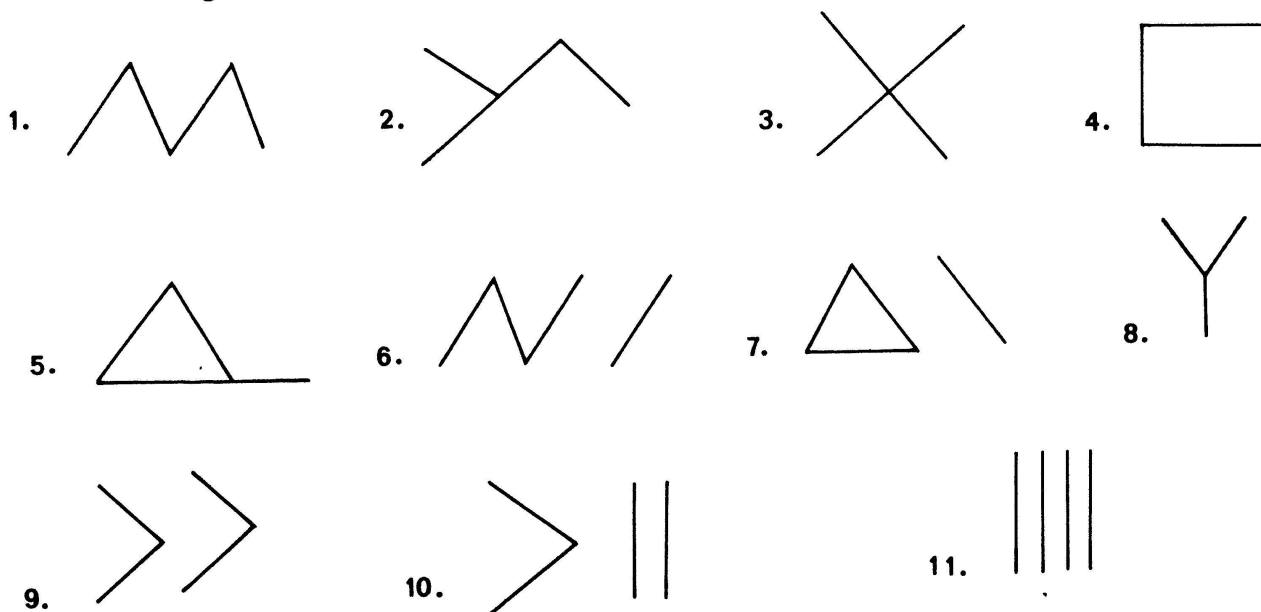
Nach Kuratowski sind der vollständige Graph  $K_5$  mit fünf Ecken und der paare Graph  $K_{3,3}$  mit drei plus drei Ecken nicht in die Ebene und damit auch nicht in die Kugeloberfläche einbettbar. Umgekehrt gilt, dass jeder nicht in die Ebene bzw. Kugeloberfläche einbettbare Graph einen der beiden Kuratowski-Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  als Unterteilung besitzen muss. Um einen ähnlichen Zusammenhang für andere geschlossene Flächen herzustellen, ist es nützlich, den von K. Wagner eingeführten Homomorphiebegriff für Graphen zu verwenden. Zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  heissen hiernach *homomorph*, in Zeichen  $G_1 > G_2$ , wenn es eine Abbildung *aus* der Eckenmenge von  $G_1$  *auf* die Eckenmenge von  $G_2$  gibt, so dass das Urbild eines jeden zusammenhängenden Untergraphen von  $G_2$  ein zusammenhängender Untergraph von  $G_1$  ist.

Beispiele für solche Homomorphien entstehen etwa durch Wegnahme bzw. Kontraktion einer Kante  $k$  eines vorgegebenen Graphen  $G$ , Bezeichnung:  $G-k$  bzw.  $C_k(G)$ . Bei geschlossenen Flächen  $F$  reicht zur Bestimmung der minimalen Elemente (im Sinne der Relation  $>$ ) in der Menge der nicht in  $F$  einbettbaren Graphen die Betrachtung der beiden angegebenen Operationen aus, wie man entsprechend [1, 2] nachweist.

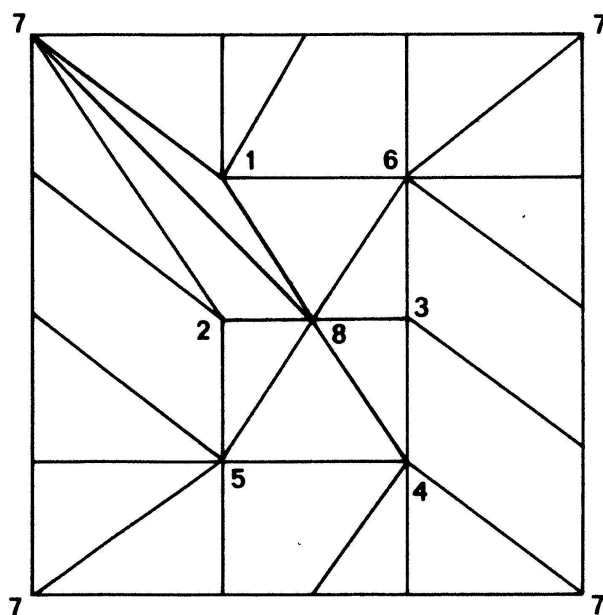
Im Fall der projektiven Ebene [1, 2] wurden bereits weitgehende Resultate erzielt. In der vorliegenden Abhandlung soll der Fall der Ringfläche (Torus) untersucht werden (vgl. auch Problem 34 in [3]). Im Gegensatz zur Ebene (Kugeloberfläche), wo sich  $K_5$  und  $K_{3,3}$  als die einzigen minimalen Elemente herausstellen, existieren für die Ringfläche bereits drei minimale Graphen mit acht Ecken (niedrigstmögliche Eckenzahl). Für diese Eckenzahl wird zusätzlich der Nachweis erbracht, dass keine weiteren minimalen Elemente mehr vorkommen. Anschliessend werden drei Graphen mit neun Ecken als minimal erkannt, sowie weitere Beispiele bis zur Eckenzahl zwölf angegeben.

Bei der Bestimmung der minimalen Graphen mit acht Ecken geht man von folgenden Überlegungen aus. Die höchstmögliche Kantenzahl eines eingebetteten Graphen mit acht Ecken beträgt 24 (triangulierbarer Fall, d. h. Zerlegung der Ringfläche in lauter Dreiecke). Da der vollständige Graph  $K_8$  mit acht Ecken 28 Kanten besitzt, müssen für eine evtl. Einbettung mindestens vier Kanten herausgenommen

werden. Die insgesamt möglichen Systeme von vier Kanten werden in der folgenden Tabelle 1 aufgezählt:



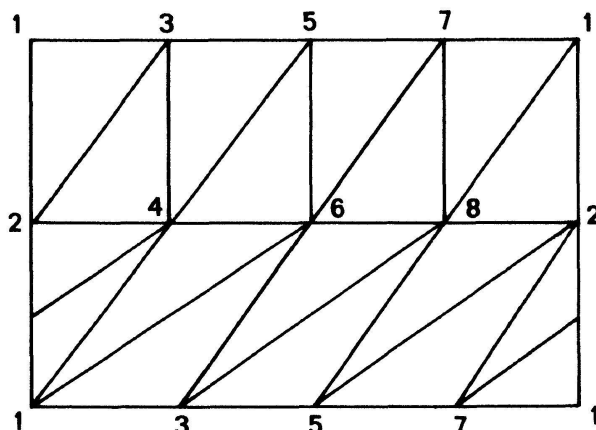
Im Falle 5., d.h.  $K_8-H$  mit  $H=\{k_{1,2}, k_{2,3}, k_{3,1}, k_{2,4}\}$  kann z.B. eine Einbettung angegeben werden (Fig. 1).



Figur 1

Man bettet also zunächst  $K_7$  in die Ringfläche ein, die im Rechteckmodell dargestellt ist (vgl. [4]), entfernt dann das System  $H$  aus  $K_7$  und macht damit eine Fläche frei, auf deren Rand alle Eckpunkte 1, 2, ..., 7 liegen, die mit dem Eckpunkt 8 in der Fläche verbunden werden können. Entsprechend erhält man die Einbettbarkeit für die Fälle 3., 6., 7., 8., 9. Bei 7. und 8. genügt es, wenn durch die Wegnahme eines Dreiecks, bzw. Dreiersterns eine Fläche mit sechs Randpunkten (Sechseck) freigemacht wird, da die isolierte Kante des Systems als eine von der Ecke 8 aus-

gehende Kante gedeutet werden kann. Analog genügt bei 9. die Öffnung eines Fünfecks, da die beiden anderen Kanten als von der Ecke 8 zu zwei weiteren Ecken hinführend interpretiert werden können. Die Einbettung bei 11. ergibt sich aus Fig. 2.



Figur 2

Hier liegt eine Einbettung des paaren Graphen  $K_{4,4}$  von vier plus vier Ecken in die Ringfläche vor (Zerlegung in lauter Vierecke), die auf die angegebene Weise zur vollen Triangulation ergänzt wird. Die fehlenden Kanten sind dann:  $k_{1,5}, k_{3,7}, k_{2,6}, k_{4,8}$ .

In den verbleibenden Fällen 1., 2., 4. und 10. wird die Nicht-Einbettbarkeit behauptet. Für 1., 2. und 4. erhalten wir die Aussage durch den Beweis der Nicht-Einbettbarkeit von  $K_8-H$  mit  $H = \{k_{1,2}, k_{2,3}, k_{3,4}, k_{1,4}, k_{4,5}\}$ , der sich als gemeinsamer Untergraph darstellt. Beim Beweis für diesen Fall und für den Fall 10. von Tab. 1 gehen wir zunächst von der Tatsache aus, dass die Einbettung des  $K_7$  bis auf Isomorphie (d. h. bis auf Homöomorphie der Ringfläche) nur auf eine Weise möglich ist. Nach der Herausnahme eines der Systeme  $H$  lässt sich aber kein Sechs- bzw. Siebeneck öffnen, auch wenn man alle möglichen Kantenumlegungen in dem verbleibenden System durchprobiert.

Es kann daher als *Ergebnis* festgehalten werden, dass sich folgende Graphen als minimal herausstellen:  $G = K_8-H$  mit:

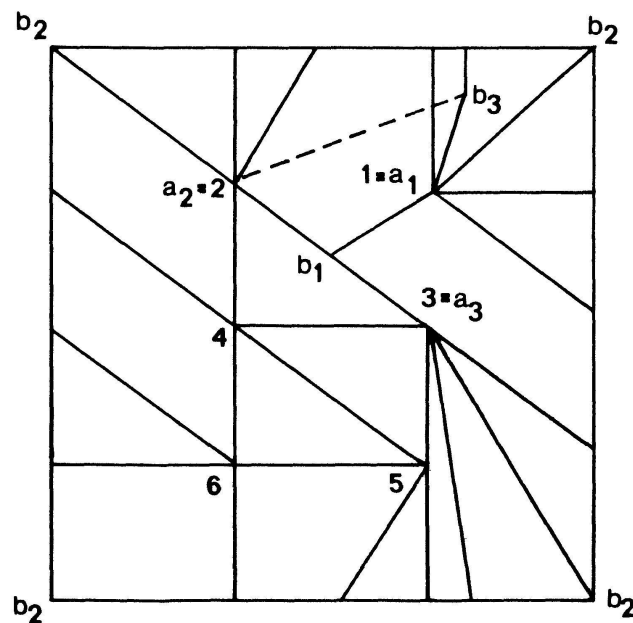
1.  $H = \{k_{1,2}, k_{2,3}, k_{1,3}\}$ ,
2.  $H = \{k_{1,2}, k_{2,3}, k_{4,5}, k_{6,7}\}$ ,
3.  $H = \{k_{1,2}, k_{2,3}, k_{3,4}, k_{1,4}, k_{4,5}\}$ .

Die Einbettbarkeit bei Wegnahme einer Kante ergibt sich nämlich aus unseren bisherigen Überlegungen, dass sich alle Fälle als Untergraphen von einbettbaren Graphen erweisen. Bei Kontraktion einer Kante entsteht in jedem Fall ein Graph mit sieben Ecken, der als Untergraph des  $K_7$  einbettbar ist.

Die vollständige Bestimmung aller minimalen Graphen mit neun Ecken erweist sich als sehr viel schwieriger als der bisherige Fall, da hier aus dem vollständigen Graphen  $K_9$  mit neun Ecken mindestens neun Kanten weggenommen werden müssen, um zu einer Einbettung zu gelangen. Wir beschränken uns daher auf die direkte Angabe von minimalen Graphen mit neun Ecken. Das erste Beispiel

erhält man durch Identifikation einer Ecke bei zwei Exemplaren des  $K_5$ . Die Nicht-Einbettbarkeit folgt aus der Überlegung, dass wegen des Zusammenhangs von  $K_5$  ein  $K_5$  in einer der Flächen liegen müsste (ein Randpunkt ist zugelassen), die bei der Flächenzerlegung durch den anderen  $K_5$  entsteht, was wegen der Nicht-Ebenheit von  $K_5$  ausgeschlossen ist.

Zwei weitere Beispiele erhält man, indem man jeweils einen vollständigen Graphen  $K_6$  mit sechs Ecken mit einem  $K_{3,3}$  an drei Eckpunkten identifiziert. Dabei lassen sich zwei Fälle unterscheiden. In Fig. 3 wird der erste Fall beschrieben (Identifikation der Ecken 1, 2, 3 des  $K_6$  mit den Ecken  $a_1, a_2, a_3$  des  $K_{3,3}$ , anschliessend Entfernung der Kanten  $k_{1,2}, k_{2,3}, k_{3,1}$ ).



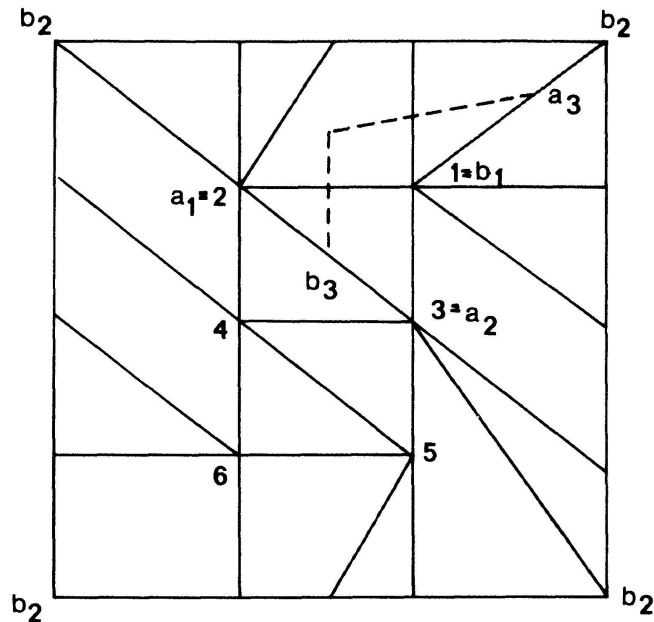
Figur 3

Der Nachweis der Einbettung bei Wegnahme bzw. Kontraktion einer Kante führt auf folgende Fälle:  $k = k_{1,5}, k_{3,5}, k_{a_1, b_3}$  (alle anderen Fälle sind gleichwertig).

In Fig. 4 ist die zweite Möglichkeit der Eckpunktidentifizierung angegeben. (Identifikation der Ecken 1, 2, 3 des  $K_6$  mit den Ecken  $b_1, a_1, a_2$  des  $K_{3,3}$ , anschliessende Entfernung der Kante  $k_{2,3}$ ).

Der Nachweis der Einbettung bei Wegnahme bzw. Kontraktion einer Kante führt auf folgende Fälle:  $k = k_{1,5}, k_{2,4}, k_{4,5}, k_{1,3}, k_{a_1, b_1}, k_{a_3, b_3}$  (alle anderen Fälle sind gleichwertig).

Die Nicht-Einbettbarkeit der beiden letzten Graphen erhält man folgendermassen. Durch eine Einbettung des  $K_6$  ergibt sich eine Flächenzerlegung der Ringfläche, deren Flächen sämtlich homöomorph zum Inneren des Einheitskreises sind. Dies bleibt auch nach Herausnahme von drei Kanten, die ein Dreieck bilden, der Fall. Da an die zu identifizierenden drei Eckpunkte höchstens zwei Flächen angrenzen können, könnte wegen der Nicht-Ebenheit des  $K_{3,3}$  dieser nicht in einer der Flächen (einschliesslich Rand) liegen. Durch elementare Überlegungen erkennt man, dass



Figur 4

auch dann die Kanten des  $K_{3,3}$  nicht ohne eine Überschneidung in beide Flächen gelegt werden können.

Wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, ergeben sich nach dem Prinzip, das bei dem ersten Beispiel für einen minimalen Graphen mit neun Ecken verwandt wurde, weitere Beispiele (disjunkte Vereinigung von jeweils zwei der Kuratowski-Graphen  $K_5$  bzw.  $K_{3,3}$ , Identifikation an einer Ecke eingeschlossen), also insgesamt fünf Fälle.

Ferner stellen sich der paare Graph  $K_{3,7}$  sowie der Graph mit der Eckenzahl elf, den man aus dem paaren Graph  $K_{3,4}$  erhält, indem man auf den in einer Ecke dritter Ordnung vorkommenden Kanten neue Ecken einführt und diese mit einer weiteren neuen Ecke verbindet, als minimal heraus.

Egon Joachim, PH Kiel

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 K. Wagner: Zum Basisproblem für Graphenmengen, insbesondere für die nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. *J. Comb. Th.* 2, 168–185 (1967).
- 2 R. Bodendiek, K. Wagner: Zum Basisproblem der nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen II. *J. Comb. Th.* 17, 249–265 (1974).
- 3 K. Wagner: *Graphentheorie*. Mannheim 1970.
- 4 H. Seifert, W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig 1934.