Sich schliessende p-Ecke aus Evoluten

Autor(en): **Frank, Hubert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 6

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32165

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sich schliessende p-Ecke aus Evoluten

In manchen Bereichen der Differentialgeometrie spielen sich schliessende Figuren eine Rolle (siehe [1]). Hierzu gehört insbesondere die folgende Problemstellung: Kann man durch wiederholte Bildung der Evolute zu einer ebenen euklidischen Kurve nach p-Schritten die Ausgangskurve erreichen? Es wird die allgemeine Lösung angegeben für gerade Zahlen $p \geq 4$. Im Fall $p=4$ führt die vollständige Lösung auf bekannte Kurven der ebenen euklidischen Geometrie.

1. Auf einem offenen Intervall J sei die Kurve $\mathfrak{r}_0$: $J \to E_2$ durch die Funktion ihres Ortsvektors beschrieben, die genügend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Bilden wir zu $\mathfrak{r}_0$ die 1-te bis p-te Evolute $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_p$ und gilt

$$\mathfrak{r}_p(t) = \mathfrak{r}_0(t) \; (t \in J), \tag{1}$$

so bestimmen zusammengehörende Kurvenpunkte $\mathfrak{r}_0(t), \mathfrak{r}_1(t), \ldots, \mathfrak{r}_{p-1}(t)$ für jedes $t \in J$ ein geschlossenes Polygon - kurz *p-Eck* genannt - mit notwendig gerader Eckenzahl $p = 2q$ und sich in den Eckpunkten lotrecht treffenden Seiten.

Wir fassen $\mathfrak{r}_0$ als Hüllkurve ihrer Tangenten auf, die wir in Hessescher Normalform angeben:

$$\mathfrak{n}\mathfrak{r} - \omega = 0, \; \mathfrak{n}^2 = 1, \tag{2}$$

wobei ω: $J \to \mathbf{R}$ die Stützfunktion in Bezug auf einen vorgegebenen Ursprung O ist. (2) beschreibt ausserdem eine Seite des p-Ecks für $t \in J$.

Ergänzen wir $\mathfrak{n}(t)$ an jeder Stelle $t \in J$ durch $\mathfrak{a}(t)$ zu einer kartesischen Vektorbasis

$$\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{a}^2 = 1, \; \mathfrak{n}\mathfrak{a} = 0, \tag{3}$$

so gelten die Ableitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{n}} &= a\mathfrak{a}, \\ \dot{\mathfrak{a}} &= -a\mathfrak{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Für das Folgende führen wir den invarianten Parameter τ mit

$$a(\tau) = 1 \; (\tau \in J) \tag{5}$$

ein, der als Richtungswinkel der Tangente bezeichnet werden kann.

Die Kurve $\mathfrak{r}_0$ errechnet sich aus der Gleichung (2) und deren Ableitung:

$$\dot{\mathfrak{n}}\mathfrak{r} - \dot{\omega} = 0 \tag{6}$$

unter Brücksichtigung von (3), (4) und (5) zu

$$\mathfrak{r}_0(\tau) = \omega(\tau)\mathfrak{n}(\tau) + \dot{\omega}(\tau)\mathfrak{a}(\tau). \tag{7}$$

Die Gerade (6) beschreibt die Normale der Kurve $\mathfrak{r}_0$, die wieder in Hessescher Normalform gegeben ist, wenn wir den invarianten Parameter τ aus (5) zugrundelegen. Weiterhin erhalten wir aus (4) und (5):

$$\overset{(2k)}{\mathfrak{n}}(\tau)=(-1)^k\,\mathfrak{n}(\tau)$$

$$\overset{(2k+1)}{\mathfrak{n}}(\tau)=\overset{(2k)}{\mathfrak{a}}(\tau)=(-1)^k\,\mathfrak{a}(\tau)\,. \qquad (k=0,1,\ldots) \quad (8)$$

Daher führt die j-te Ableitung von (2) nach τ wieder auf eine Hessesche Normalform, die an der Stelle $\tau\in J$ die j-te Seite (von $\mathfrak{r}_0(\tau)$ aus gerechnet) des Evoluten-p-Ecks beschreibt. Der Parameter τ aus (5) ist also invarianter Parameter des p-Ecks aus Evoluten. Die j-te Evolute $\mathfrak{r}_j$ zu $\mathfrak{r}_0$ errechnet sich nun aus dem Gleichungssystem

$$\overset{(j)}{\mathfrak{n}}(\tau)\,\mathfrak{r}-\overset{(j)}{\omega}(\tau)=0$$

$$\overset{(j+1)}{\mathfrak{n}}(\tau)\,\mathfrak{r}-\overset{(j+1)}{\omega}(\tau)=0 \qquad (j=0,1,\ldots) \quad (9)$$

wegen (8) und (3) zu

$$\mathfrak{r}_j(\tau)=\overset{(j)}{\omega}(\tau)\,\overset{(j)}{\mathfrak{n}}(\tau)+\overset{(j+1)}{\omega}(\tau)\,\overset{(j+1)}{\mathfrak{n}}(\tau), \qquad (j=0,1,\ldots)\,. \quad (10)$$

Da sich die Figur aus Evoluten nach $p=2q$ Schritten schliessen soll, gilt neben der Schliessungsbedingung (1) eine verallgemeinerte Parallelogrammbedingung

$$\sum_{j=0}^{2q-1}(-1)^j\,\mathfrak{r}_j(\tau)=\mathfrak{o}\;(\tau\in J)\,, \qquad \text{(P)}$$

die für $p=4$ mit der Parallelogrammbedingung zusammenfällt. Soll das p-Eck bei der Evolutenbildung genau einmal mit p-Schritten durchlaufen werden, so darf keine der Bedingungen

$$\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\,\mathfrak{r}_j(\tau)=\mathfrak{o},\;(0<n<q,\;\tau\in J) \qquad \text{(A)}$$

erfüllt sein. Es ist unmittelbar einzusehen, dass nur solche natürlichen n von Bedeutung sind, die Teiler von q sind; d. h. es ist auszuschliessen, dass jede Ecke des p-Ecks r-mal gezählt wird.

Aus (1), (P) und (A) finden wir unter Berücksichtigung von (10) und (8) nach kurzer Rechnung die dazu äquivalenten Bedingungen:

$$\overset{(2q)}{\omega}(\tau)-(-1)^q\,\omega(\tau)=0 \qquad (1')$$

$$\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\left(\overset{(2k)}{\omega}(\tau)+\overset{(2k+2)}{\omega}(\tau)\right)=0 \qquad (\text{P}')$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\overset{(2k)}{\omega}(\tau)+\overset{(2k+2)}{\omega}(\tau)\right)=0,\ (0<n<q). \tag{A'}$$

Man sieht unmittelbar, dass (1′) und (P′) äquivalente Bedingungen sind. Es genügt also, die Lösungen ω von (P′) zu betrachten, die keiner Differentialgleichung aus (A′) genügen.

Für die Krümmungsradien r_j der Kurven r_j gilt (siehe [3, 4]):

$$r_j(\tau)=\overset{(j)}{\omega}(\tau)+\overset{(j+2)}{\omega}(\tau),\ r_j(\tau)=\overset{(j)}{r_0}(\tau),\ (j=0,1,\ldots). \tag{11}$$

Daher erfüllt der Krümmungsradius $r(\tau)$ einer beliebigen Kurve des Evoluten-p-Ecks bezogen auf den invarianten Parameter τ wegen (P′) die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\overset{(2k)}{r}(\tau)=0. \tag{12}$$

Unter den Lösungen von (12) sind wegen (A′) die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\overset{(2k)}{r}(\tau)=0,\ (0<n<q) \tag{13}$$

auszuschliessen. Insbesondere ist in (13) für $n=1$ die Bedingung enthalten, dass kein r_j eine Nullstelle auf J hat, d.h. dass an keiner Stelle $\tau\in J$ zwei benachbarte Ecken des Polygons zusammenfallen.

Die mit -1 genommenen Quadrate der Wurzeln der charakteristischen Gleichung zur Differentialgleichung (12) sind die von 1 verschiedenen q-ten Einheitswurzeln. Jedes $r_j(\tau)$ ist daher Linearkombination eines Fundamentalsystems von $2(q-1)$ Funktionen $e^{\beta\tau}\cos\gamma\tau$ und $e^{\beta\tau}\sin\gamma\tau$, die Lösungen von (12) sind. Berücksichtigen wir die Ausschlussbedingungen (13), wobei hier nur die Teiler n von q von Bedeutung sind, so kommen nur solche Krümmungsradien $r_j(\tau)$ in Frage, in denen mindestens eine der $2\varphi(q)$ Funktionen (φ ist die Eulersche Funktion):

$$e^{\beta_k\tau}\cos\gamma_k\tau,\ e^{\beta_k\tau}\sin\gamma_k\tau,\ e^{-\beta_k\tau}\cos\gamma_k\tau,\ e^{-\beta_k\tau}\sin\gamma_k\tau,$$

$$\beta_k=\cos\frac{2k-q}{2q}\pi,\ \gamma_k=\sin\frac{2k-q}{2q}\pi,\ \left((k,q)=1, 0<k<\frac{q}{2}\right) \tag{14}$$

enthalten ist. Die Kurve r_0 ist durch $r_0(\tau)$ bis auf die Lage in der euklidischen Ebene bestimmt (siehe (24)). Aus der Äquivalenz der Bedingungen (12), (P′), (1′) und (1) folgt dann, dass sich das Evoluten-p-Eck mit der Ausgangskurve r_0 genau nach p-Schritten schliesst. Das p-Eck mit $p=2q$ hängt also von $2(q-1)$ (bis auf die obige Einschränkung) willkürlich wählbaren Konstanten ab. Wir erhalten daher:

Satz 1. *Es gibt zu jeder geraden Zahl $p \geq 4$ sich schliessende p-Ecke aus Evoluten. Die Krümmungsradien der Ausgangskurve und ihrer Evoluten erfüllen die Differentialgleichung* (12), *jedoch nicht die Differentialgleichungen* (13), *falls das p-Eck sich genau einmal nach p Evolutenbildungen schliesst. Die Evoluten-p-Ecke hängen von $p-2$ Konstanten ab.*

Aus (10), (8) und (P′) folgt, dass der Schwerpunkt des p-Ecks

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2q} \sum_{j=0}^{2q-1} \mathfrak{r}_j(\tau) \tag{15}$$

fest ist. Wegen der Parallelogrammbedingung (P) gilt dann:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathfrak{r}_{2k}(\tau) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathfrak{r}_{2k+1}(\tau). \tag{16}$$

Satz 2. *Ein p-Eck ($p=2q$) aus Evoluten hat einen festen Schwerpunkt $\mathfrak{m}$, der für jedes $\tau \in J$ Schwerpunkt der q einander zugeordneten Kurvenpunkte mit gerader bzw. ungerader Numerierung ist.*

Der Schwerpunkt $\mathfrak{m}$ des p-Ecks kann als Ursprung eines Koordinatensystems gewählt werden. Da der invariante Parameter in (5) nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann der Anfangswert des Richtungswinkels τ noch geeignet festgelegt werden. Durch diese Festlegungen ist ein euklidisches Koordinatensystem eindeutig bestimmt.

2. Im Fall $p=4$ erhalten wir aus (14) wegen $q=2$ für den Krümmungsradius $r(\tau)$ von $\mathfrak{r}_0$

$$r(\tau) = Ae^{\tau} + Be^{-\tau} \quad (A, B \text{ konstant}). \tag{17}$$

Die Ausschlussbedingung (13) bedeutet, dass der Krümmungsradius $r(\tau)$ keine Nullstelle im Parameterintervall J haben darf.

Ist s die Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{r}_0$, so erhalten wir wegen der bekannten Beziehung (siehe [2], Nr. 280):

$$\frac{ds}{d\tau} = r(\tau) \tag{18}$$

aus (17)

$$s - c = Ae^{\tau} - Be^{-\tau} \quad (c \text{ konstant}). \tag{19}$$

Daher hat $\mathfrak{r}_0$ die natürliche Gleichung

$$r^2 - (s-c)^2 = d \quad (d = 4AB). \tag{20}$$

Es sind demnach die drei Fälle zu unterscheiden:

a) $d=0$, b) $d<0$, c) $d>0$.

a) Für $d=0$ ist die Kurve $\mathfrak{r}_0$ eine logarithmische Spirale, für die $\mathfrak{m}$ in (15) asymptotischer Punkt ist und welche die von $\mathfrak{m}$ ausgehenden Strahlen unter dem Winkel $\pm\pi/4$ schneidet (siehe [2], Nr. 281). Die Evoluten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ sind die logarithmischen Spiralen mit demselben asymptotischen Punkt $\mathfrak{m}$, die durch Drehung um $\mathfrak{m}$ mit den Drehwinkeln $k\pi/2$ ($k=1,2,3$) aus $\mathfrak{r}_0$ hervorgehen. Dies kann durch

Rechnung bestätigt werden. Dazu hat man in (17) etwa $B=0$ und bei geeigneter Parametrisierung $A=1$ zu setzen. Das offene Intervall J ist $\mathbf{R}$.

Es sei bemerkt, dass dieses Evoluten-4-Eck aus logarithmischen Spiralen sowohl Vierteldrehungen in sich zulässt als auch die kontinuierliche Gruppe von Drehstreckungen, die die logarithmischen Spiralen zu Bahnkurven hat.

Die Krümmungsradien $r_j(\tau)$ $(\tau \in J)$ geben die mit Vorzeichen behafteten Längen der Polygonseiten an. Daher ist nach (11), (17) und (20) der Fall $d=0$ eines Evoluten-4-Ecks dadurch gekennzeichnet, dass für jedes $\tau \in J$ das Polygon zusammengehörender Kurvenpunkte ein Quadrat ist.

b) Im Fall $d<0$ setzen wir $d=-a^2$, $a>0$. Die Kurve $\mathfrak{r}_0$ ist dann eine Parazykloide (siehe [2], Nr. 285) mit der natürlichen Gleichung:

$$(s-c)^2-r^2=a^2 \ (c \text{ konstant}). \tag{21}$$

$a/2$ ist der Abstand der Spitze der Parazykloide vom festen Punkt $\mathfrak{m}$ in (15). Wählen wir die Parametrisierung (5) so, dass $\tau=0$ die Spitze der Parazykloide angibt, so folgt wegen $r(0)=0$ aus (17), (20) und (21) $A=-B=a/2$; also

$$r=a\,\mathrm{sh}\,\tau \ (\tau>0), \tag{22}$$

wobei es genügt, sich auf die Betrachtung des Intervalls $J=\mathbf{R}^+$ zu beschränken.

Nach (11) folgt wegen $r_1=\dot{r}$ unter Berücksichtigung von (17), (19), (20) und (22), dass die Evolute $\mathfrak{r}_1$ zu $\mathfrak{r}_0$ die natürliche Gleichung hat:

$$r_1^2-(s_1-c_1)^2=a^2 \qquad (c_1 \text{ konstant}). \tag{23}$$

$\mathfrak{r}_1$ gehört daher zum Fall c) und ist eine Hyperzykloide (siehe [2], Nr. 285), die in $\tau=0$ einen Scheitel hat, der auf die Spitze der Parazykloide $\mathfrak{r}_0$ fällt.

Die Fälle b) und c) für Evoluten-4-Ecke sind also identisch. Die Figur liegt spiegelbildlich zum festen Punkt $\mathfrak{m}$ aus (15), der Mittelpunkt aller Rechtecke zusammengehörender Kurvenpunkte ist. Das Seitenverhältnis des Rechtecks für $\tau \in J$ ist $r:\dot{r}=\mathrm{th}\,\tau\,(\tau>0)$. Das Evoluten-4-Eck weist für $d \neq 0$ keine kontinuierliche Gruppe linearer Selbstabbildungen auf.

3. Geben wir insbesondere für ein beliebiges $p=2q \geq 4$ den Krümmungsradius $r(\tau)$ als Linearkombination der Funktionen (14) vor, so ist die Kurve $\mathfrak{r}(\tau)=(x(\tau),y(\tau))$ mit

$$\frac{dx}{d\tau}=r(\tau)\cos\tau, \quad \frac{dy}{d\tau}=r(\tau)\sin\tau \tag{24}$$

Ausgangskurve $\mathfrak{r}_0$ eines sich schliessenden p-Ecks aus Evoluten. Auf dem zugrundeliegenden Intervall J darf kein Krümmungsradius r_j in (11) eine Nullstelle haben.

Hubert Frank, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS:

1 M. Barner, *Géométrie différentielle de figures qui se ferment,* 2. Coll. de Géom. Diff., Liège 1961, CBRM (1962).
2 K. Fladt, *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven,* Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1962.
3 G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven,* Teubner Verlag, Leipzig 1902.
4 K. Strubecker, *Differentialgeometrie,* I. Sammlung, Göschen, Berlin 1955.