Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 32 (1977)

Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dies bedeutet, dass der Umkreismittelpunkt des Dreieckes ABC_1 auf einer Symmetrieachse des Morleyschen Dreieckes liegt. Der Umkreis des Dreieckes ABC_1 berührt also den Umkreis des Dreieckes $A_1B_1C_1$, was auch für die Umkreise der Dreiecke BCA_1 und ACB_1 zutrifft.

Analog ist auch die Beweisführung für $i=2$ und $i=3$. Zu bemerken ist noch, dass die Umkreise der Dreiecke ABC_i einander unter 60° schneiden. Dasselbe ist auch der Fall bei den Umkreisen der Dreiecke BCA_i und ACB_i, wie leicht zu zeigen ist.

Für wesentliche Hinweise danke ich Herrn Prof. Dr. Walter Wunderlich, Technische Universität Wien.

Karl Steiner, St. Pölten

LITERATURVERZEICHNIS

1 R.A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, S.253, New York 1960.
2 H.S.M. Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, S.40, Birkhäuser Verlag, Basel 1963.
3 H. Dörrie, *Mathematische Miniaturen*, S.110, Wiesbaden 1969.
4 F.G. Taylor und W.L. Marr, *Proceedings of Edinburgh*, Math. Soc. *XXXII*, 119–150 (1914).
5 *Mathematische Reflexionen* (Autoren-Kollektiv), Schroedel-Verlag, Hannover 1973.
6 R. Honsberg, *Mathematical Gems*, The Mathematical Society of America, 1973.

Aufgaben

Aufgabe 773. Call a positive prime ideal, if primality is retained under iteration as often as desired of the operations of permuting digits, adding digits and multiplying digits. Determine all ideal primes (in base 10).

P. H. Doyle, East Lansing, Michigan, USA

Solution. Clearly 2, 3, 5 and 7 are ideal primes. So let us assume that p is an ideal prime ≥ 11, having $n \geq 2$ digits, that are supposed to be arranged in nondescending order. The multiplication property implies that all digits of p are 1 except the last one, which must have the value 3 or 7. Hence p is of the form

$$p_1 = (10^n - 1)/9 + 2 \quad \text{or} \quad p_2 = (10^n - 1)/9 + 6 .$$

The addition property implies that n is odd in both cases. Now let us consider the permutation property. Interchanging the last digit with one of the digits 1 increases p_1 by $2(10^k - 1)$ and p_2 by $6(10^k - 1)$ ($k = 1, 2, \ldots, n-2$ or $n-1$). Calculation mod 7 yields

k	1	2	3	4	5	6	
$2(10^k - 1)$	4	2	3	6	1	0	(mod 7)
$6(10^k - 1)$	5	6	2	4	3	0	(mod 7)

Therefore, if $n \geq 6$ we must have $p_1 \equiv 2 \pmod 7$ (since 5 does not occur in the second line) and $p_2 \equiv 6 \pmod 7$ (since the third line does not contain 1). So in both cases we get $10^n - 1 \equiv 0 \pmod 7$, or $n \equiv 0 \pmod 6$, a contradiction since n is odd. Hence $n=3$ or 5. Of the resulting numbers 113, 117, 11113 and 11117 only 113 is an ideal prime, since $117 \equiv 0 \pmod 3$, $13111 \equiv 0 \pmod 7$ and $11711 \equiv 0 \pmod 7$. So the ideal primes are 2, 3, 5, 7, 113, 131, 311.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Comment by A. Bager: The conditions posed are not used in full. For example, it is sufficient that the sum of the digits is odd, not that it is a prime. There is no need for the phrase "iteration as often as desired of".
Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring DK), C. Bindschedler (Küsnacht), M. Vowe (Therwil) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

Aufgabe 774. In der Ebene der drei nicht kollinearen Punkte F_1, F_2, F_3 konstruiere man einen Punkt P so, dass die drei Ellipsen, deren Brennpunkte resp. F_1 und F_2, F_2 und F_3, F_3 und F_1 sind, und die durch P gehen, einander ähnlich sind. Man zeige, dass die Lösungen stets reell sind.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung. Die Seitenlängen $a_i = \overline{F_j F_k}\,(i, j, k = 1, 2, 3)$ des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$ sind voraussetzungsgemäss zu $p_j + p_k$ ($p_i := \overline{PF_i}$) proportional. Es gilt somit

$$a_1 : a_2 : a_3 = (p_2 + p_3) : (p_3 + p_1) : (p_1 + p_2),$$

woraus mit $2s := a_1 + a_2 + a_3$ unmittelbar

$$p_1 : p_2 : p_3 = (s - a_1) : (s - a_2) : (s - a_3)$$

folgt. Der gesuchte Punkt P liegt somit auf den Apolloniuskreisen k_i ($i = 1, 2, 3$) über den Durchmessern $D_i E_i$, wo D_i der Berührpunkt des Inkreises κ mit der Seite a_i und E_i der bezgl. F_j und F_k vierte harmonische Punkt ist. Die Aufgabe hat als Lösung das Schnittpunktepaar P, P' der Kreise k_1, k_2, k_3. Letztere schneiden κ in D_1, D_2, D_3 rechtwinklig, sind also Orthogonalkreise zu κ. Da die auf dem Durchmesser a_i von k_i liegenden Punkte D_i, E_i zu F_j, F_k harmonisch liegen, schneidet k_i alle durch F_j und F_k gehenden Kreise orthogonal, also auch den Umkreis u des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$. Bei Inversion an den Kreisen κ und u entsprechen sich daher die Kreise k_i selbst, während deren Schnittpunkte P, P' einander zugeordnet sind. P und P' liegen demnach auf der Zentrale z von κ und u und teilen jede der von z aus κ und u ausgeschnittenen Durchmesserstrecken harmonisch. P und P' sind somit die Doppelpunkte jener Involution, von der die Schnittpunkte von z mit κ und u zwei entsprechende Punktepaare sind. Da der Inkreis eines Dreiecks stets ganz im Inneren von dessen Umkreis liegt, trennen sich diese Punktepaare nicht, so dass es sich um eine hyperbolische Involution mit reellen Doppelpunkten handelt.

K. Grün, Linz, A

Weitere Lösungen sandten J.T. Groenmann (Groningen NL), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven NL), P. Nuesch (Lausanne), A. Reuschel (Wien A), Hj. Stocker (Wädenswil) und H. Walser (Frauenfeld).

Aufgabe 775. Man zeige, dass ein n-Simplex ($n \geq 3$) genau dann einen Höhenschnittpunkt hat, wenn je zwei disjunkte Kanten orthogonal sind. (Vergl. dazu R. Fritsch, «Höhenschnittpunkte» für n-Simplizes, El. Math. 31, 1-8, 1976.)

R. Fritsch, Konstanz, BRD

Lösung des Aufgabenstellers. Wir benutzen die Bezeichnungen loc. cit. und setzen die folgende Charakterisierung des Höhenschnittpunktes h eines n-Simplexes $\Delta = x_0 x_1 \cdots x_n$ als bekannt voraus: h ist genau dann Höhenschnittpunkt von Δ, wenn für alle j, k, l mit $0 \leq j, k, l \leq n$ und $j \neq k \neq l$ gilt

$$[h - x_j, x_k - x_l] = 0. \tag{1}$$

Ist nun h Höhenschnittpunkt, und sind die Kanten $x_i x_j$ und $x_k x_l$ disjunkt, so hat man neben (1) noch

$$[h - x_i, x_k - x_l] = 0. \tag{2}$$

Subtrahiert man (2) von (1), so erhält man

$$[x_i - x_j, x_k - x_l] = 0, \tag{3}$$

was bedeutet, dass die Kanten $x_i x_j$ und $x_k x_l$ orthogonal sind. Umgekehrt gelte (3) für alle i, j, k, l mit $0 \leq i, j, k, l \leq n$ und $k \neq i \neq l \neq j \neq k$. Gemäss Formel (50) loc. cit. macht man für h den Ansatz

$$h = \frac{n+1}{n-1} s - \frac{2}{n-1} m \tag{4}$$

(s: Schwerpunkt, m: Mittelpunkt der Umsphäre von Δ) und rechnet über m:

$$[h - x_j, x_k - x_l] \underset{(4)}{=} \frac{1}{n-1} [(n+1)s - (n-1)x_j, x_k - x_l]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k \neq i \neq l} (x_i - x_j) + x_k + x_l, x_k - x_l \right]$$

$$\underset{(3)}{=} \frac{1}{n-1} [x_k + x_l, x_k - x_l] = \frac{1}{n-1} ([x_k, x_k] - [x_l, x_l])$$

$$= \frac{1}{n-1} (r^2 - r^2) = 0.$$

Also gilt (1) für alle j, k, l mit $1 \leq j, k, l \leq n$ und $k \neq j \neq l$, und damit ist h Höhenschnittpunkt.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), M.C. van Hoorn (Groningen NL) und Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 776. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 2)$ positive reelle Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = \cdots = x_n$, jeweils unter folgenden Voraussetzungen:
1) f: $[0, 1] \to \mathbf{R}$ ist differenzierbar, g: $x \to x f'(x)$, $x \in (0, 1)$ ist streng monoton abnehmend, $x_i \in [0, 1]$ für $i = 1, \ldots, n$.
2) f: $[0, \infty] \to \mathbf{R}$ ist konkav und streng monoton abnehmend, $x_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

H. Kappus, Rodersdorf SO

Lösung. Beide Fälle lassen sich leicht auf folgenden in der Wahrscheinlichkeitstheorie wohlbekannten Satz zurückführen: Y sei eine reellwertige Zufallsvariable, I ein Intervall, eine Halbgerade oder ganz R, so dass $P(Y \in I) = 1$. Ferner sei h eine auf I streng konvexe Funktion. Dann gilt die Jensensche Ungleichung

$$E[h(Y)] \geq h(E[Y])$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Y in einem Punkt y ausgeartet, d.h. $P(Y = y) = 1$ ist.
Dies lässt sich am einfachsten geometrisch so einsehen. Ist $m = E[Y]$, so hat der Graph von h im Punkte $(m, h(m))$ eine (nicht notwendig eindeutige) Stützgerade g, d.h. $h(m) = g(m)$ und $h(y) > g(y)$ für $y \neq m$, $y \in I$. Also gilt wegen der Linearität des Erwartungswertes

$$h(E[Y]) = h(m) = g(m) = g(E[Y]) = E[g(Y)] \leq E[h(Y)]$$

mit Gleichheit nur in dem angegebenen Fall.
Hat nun f die in der Aufgabe angegebenen Eigenschaften, so verifiziert man leicht, dass die Jensensche Ungleichung anwendbar ist auf die durch $h(y) = -f(e^y)$ definierte Funktion mit der Zufallsvariablen Y, die mit Wahrscheinlichkeit p_i den Wert $y_i = \log x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ annimmt. Dies ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(e^{y_i}) = -E[h(Y)] \leq -h(E[Y])$$

$$= f\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i\right)\right) = f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right).$$

Die Exponentialfunktion lässt sich hier offensichtlich durch eine beliebige positive wachsende konvexe Funktion H ersetzen. Das Ergebnis lässt sich dann so schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq f\left\{H\left(\sum_{i=1}^{n} p_i K(x_i)\right)\right\},$$

wobei K die Umkehrfunktion von H ist, bzw. in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(H(y_i)) \leq f\left\{H\left(\sum_{i=1}^{n} p_i y_i\right)\right\}.$$

W. J. Bühler, Mainz, BRD

Weitere Lösungen sandten H.-P. Bauer (Binningen), K. Bickel (Freiburg BRD), P. Bundschuh (Köln BRD), L. Hämmerling (Aachen BRD), L. Kuipers (Mollens VS), L. Küsters (Mannheim BRD), Chr. A. Meyer (Bern), M. Vowe (Therwil) und A. L. G. Zoàrd (Rio de Janeiro Brasilien).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1978* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91), Problem 764 A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 792. Man zeige, dass die folgende Konstruktionsaufgabe allgemein nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist: Ein Dreieck aus den gegebenen Seiten b und c zu konstruieren, welches die Eigenschaft hat, dass die Seitenhalbierende von a, die Höhe auf b sowie die Winkelhalbierende von C konkurrent sind.

E. Trost, Zürich
H. Kappus, Rodersdorf

Aufgabe 793. Let $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denote the circulant Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \\ x_n & x_1 & . & . & . & x_{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ x_2 & x_3 & . & . & . & x_1 \end{pmatrix}.$$

Prove that the diophantine equation

$$\det A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z^k, \qquad n \geq 2, \qquad k \geq 2$$

has an infinity of solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in \mathbf{Z}^{n+1}$.

A. Grelak, A. Grytczuk,
Zielona Gora, Poland

Aufgabe 794. Im Integritätsbereich $(P, +, .)$ der formalen Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten sind Lösbarkeitskriterien für die quadratische Gleichung $\varphi^2 + \alpha\varphi + \beta = 0$ anzugeben. Dabei bedeuten α, β gegebene und φ eine gesuchte Potenzreihe aus P.

J. Binz, Bolligen

Literaturüberschau

Mathematische Grundlagen der Informationstheorie. Von Claude E. Shannon und Warren Weaver. 144 Seiten. DM 29,-. Oldenbourg Verlag, München 1975.

Mit diesem Büchlein wird eine deutsche Übersetzung der beiden Aufsätze verfügbar, welche C. E. Shannon 1948 im «Bell System Technical Journal» publizierte und die seither in jedem einführenden Werk über Informationstheorie zitiert werden. Vorangestellt ist eine kurze allgemeinverständliche Einführung in die mathematische Theorie der Kommunikation von W. Weaver, erstmals erschienen 1949 im «Scientific American». P. Läuchli

Zahlbereichserweiterungen. Von G. Messerle. 120 Seiten mit 51 Figuren. Fr. 20.-. Teubner Verlag, Stuttgart 1975; Lizenzausgabe bei Verlag Orell Füssli, Zürich 1975.

Dieses für die Lehrerausbildung bestimmte Buch enthält verschiedene Beispiele von Zahlbereichserweiterungen bis hin zur Menge der rationalen Zahlen. Auf reelle oder komplexe Zahlen wird nicht eingegangen. Teils werden in der Schulpraxis geläufige Methoden besprochen, so das Operatormodell für die Bruchrechnung und das Verschiebungsmodell für das Rechnen mit ganzen Zahlen, teils werden mehr formale Wege beschritten, von denen her ein Einstieg in die Schulpraxis kaum möglich ist.

H. Walser

Uniform Distribution of Sequences. Von L. Kuipers und H. Niederreiter. XIV und 390 Seiten. £13.-. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney-Toronto 1974.

Inhalt: Preface. 1. Uniform distribution modulo 1. 2. Discrepancy. 3. Uniform distribution in compact spaces. 4. Uniform distribution in topological groups. 5. Sequences of integers and polynomials. Bibliography. List of symbols and abbreviations. Author index. Subject index.

Der Startpunkt der hier zur Darstellung gebrachten Theorie war Hermann Weyls Artikel «Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins» [Math. Ann. *77*, 313-352 (1916)]. Nach der seither erfolgten Breitenentwicklung erscheint sie heute als ein Gebiet, in dem mehrere wichtige Zweige der zeitgenössischen Mathematik zur Überlagerung gelangen: Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Funktionalanalysis, topologische Algebra und andere. Das vorliegende Werk vermittelt eine Übersicht über den heutigen Stand. Aspekte, die nicht in allen Einzelheiten entwickelt werden konnten, sind in den jedem Abschnitt zugeordneten bibliographischen «Notes» und den schwierigeren unter den Aufgaben berücksichtigt worden.

Die Kapitel 1 und 2 sind den Folgen reeller Zahlen gewidmet. Die «Diskrepanz» dient einer verfeinerten über das Qualitative hinausgehenden quantitativen Betrachtungsweise und misst die Abweichung einer Folge von der Gleichverteilheit modulo 1. In den Kapiteln 3 und 4 wird, wie aus den betreffenden Titeln ersichtlich, der Raum $\mathbf{R}$ durch allgemeinere Räume ersetzt.