

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 32 (1977)
Heft: 5

Artikel: Zum Satz von Morley
Autor: Steiner, Karl
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32163>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

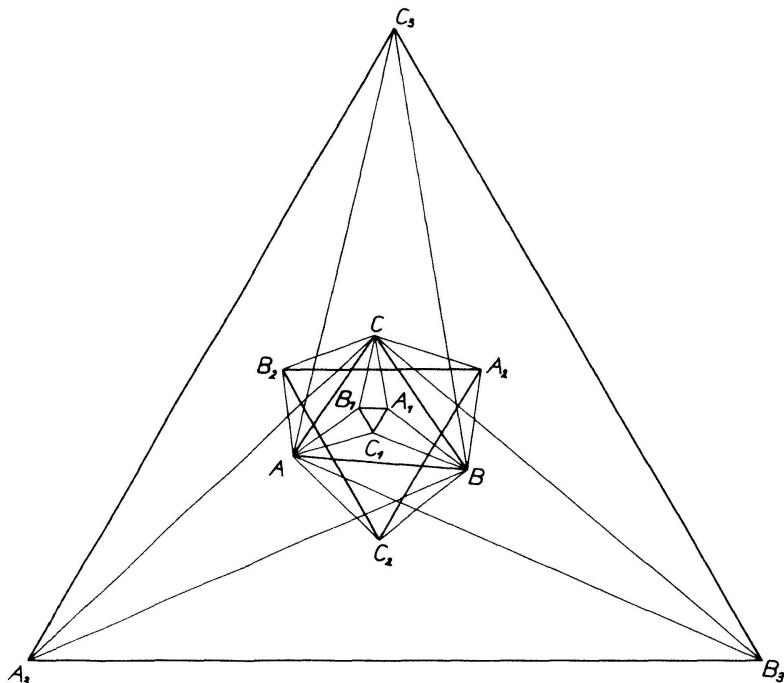
Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zum Satz von Morley

Im Jahre 1899 entdeckte F. Morley, Professor der Johns-Hopkins-Universität, einen, jetzt nach ihm benannten Satz, ohne diesen zu veröffentlichen. Anfangs unseres Jahrhunderts wurden dafür eine Reihe von geometrischen Beweisen erbracht [1, 2].

Hier soll ein trigonometrischer Beweis nach H. DÖRRIE [3] angegeben werden.



Satz 1. Werden in einem Dreieck die Innenwinkel durch je zwei Strahlen geteilt, dann schneiden sich die beiden, je einer Seite anliegenden Dreiteilenden in Punkten, die ein gleichseitiges Dreieck bilden (Morleysches Dreieck).

Beweis. Im Dreieck ABC (siehe Figur) sei $\angle BAC = a = 3\delta$, $\angle ABC = \beta = 3\epsilon$ und $\angle ACB = \gamma = 3\zeta$. Weiter sei $\angle BAC_1 = \angle CAB_1 = \angle B_1AC_1 = \delta$, $\angle ABC_1 = \angle B_1BC_1 = \angle A_1BC = \epsilon$ und $\angle ACB_1 = \angle A_1CB_1 = \angle A_1CB = \zeta$.

Um zu beweisen, dass das Dreieck $A_1B_1C_1$ gleichseitig ist, werden zwei Hilfsätze verwendet.

Es gilt die Beziehung:

$$\sin \varphi = 4 \sin(\varphi/3) \sin(60^\circ + \varphi/3) \sin(60^\circ - \varphi/3). \quad (1)$$

Nimmt man in einem Dreieck an, dass der Umkreisdurchmesser $2r = 1$ ist, dann kann man jede Dreiecksseite gleich dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels setzen. Wendet man auf dieses Dreieck den Kosinussatz an, folgt für drei Winkel x, y und z , deren Summe 180° ist:

$$\sin^2 z = \sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y \cos z. \quad (2)$$

Die Winkel können in dieser Formel vertauscht werden.

Um die Seite $|A_1C_1|$ zu berechnen, ermittelt man zunächst die Seiten $|BC_1|$ und $|BA_1|$ aus den Dreiecken ABC_1 und BCA_1 mittels des Sinussatzes, wobei man $|AB| = \sin \gamma$ und $|AC| = \sin \beta$ setzen darf. Bei Verwendung von (1) ergibt sich:

$$|BA_1| = 4 \sin \delta \sin \zeta \sin (60^\circ + \delta),$$

$$|BC_1| = 4 \sin \delta \sin \zeta \sin (60^\circ + \zeta).$$

Der Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck A_1C_1B liefert für die Dreieckseite $|A_1C_1| = s_1$:

$$s_1^2 = 16 \sin^2 \delta \sin^2 \zeta [\sin^2 (60^\circ + \varphi) + \sin^2 (60^\circ + \delta) - 2 \sin (60^\circ + \zeta) \sin (60^\circ + \delta) \cos \varepsilon].$$

Der Klammerausdruck wird nach (2) gleich $\sin^2 \varepsilon$ und man findet:

$$s_1 = 4 \sin (\alpha/3) \sin (\beta/3) \sin (\gamma/3). \quad (3)$$

Da in dieser Formel kein Winkel ausgezeichnet ist, folgt, dass das Dreieck $A_1B_1C_1$ gleichseitig ist, w. z. b. w. Der trigonometrische Beweis sagt zum Unterschied von den geometrischen Beweisen auch etwas über die Grösse der Dreieckseite aus.

Für ein allgemeines Dreieck müsste s_1 noch mit $2r$ multipliziert werden.

Im Jahre 1914 gelang es Taylor und Marr, den Satz von Morley zu verallgemeinern. Unter anderem fanden sie zwei, zu jedem Dreieck gehörende, gleichseitige Dreiecke [4].

Satz 2. Werden die Aussenwinkel eines Dreiecks durch Strahlen gedrittelt, dann schneiden sich die beiden, den Seiten jeweils anliegenden Strahlen in Punkten, welche ein gleichseitiges Dreieck bestimmen.

Beweis. Es sei $\not BAC_2 = \not CAB_2 = (180^\circ - \alpha)/3$, $\not ABC_2 = \not CBA_2 = (180^\circ - \beta)/3$ und $\not BCA_2 = \not ACB_2 = (180^\circ - \gamma)/3$.

Um die Seite $|A_2C_2|$ zu berechnen, ermittelt man die Seite $|BC_2|$ mit dem Sinussatz aus dem Dreieck ABC_2 und die Seite $|BA_2|$ ebenso aus dem Dreieck BCA_2 .

Wendet man (1) an, folgt:

$$|BC_2| = 4 \sin \zeta \sin (120^\circ + \zeta) \sin (120^\circ + \delta),$$

$$|BA_2| = 4 \sin \delta \sin (120^\circ + \delta) \sin (120^\circ + \zeta).$$

Aus dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck A_2C_2B , ergibt sich unter Berücksichtigung von (2) nach dem Umformen die Dreiecksseite $|A_2C_2| = s_2$:

$$s_2 = 4 \sin (\alpha'/3) \sin (\beta'/3) \sin (\gamma'/3). \quad (4)$$

Dabei sind α' , β' und γ' die drei Aussenwinkel des Dreieckes ABC . Da kein Winkel ausgezeichnet ist, folgt die Behauptung.

Satz 3. Werden in einem Dreieck die drei erhabenen Aussenwinkel $\bar{\alpha} = 180^\circ + \alpha$, $\bar{\beta} = 180^\circ + \beta$ und $\bar{\gamma} = 180^\circ + \gamma$ durch Strahlen gedrittelt, dann bilden die Schnittpunkte der jeweils einer Dreieckseite anliegenden Dreiteilenden ein gleichseitiges Dreieck.

Beweis. Es sei $\not C_3AB = \not B_3AC = \bar{\alpha}/3$, $\not C_3BA = \not A_3BC = \bar{\beta}/3$ und $\not A_3CB = \not B_3CA = \bar{\gamma}/3$.

Um zunächst die Seite $|AC_3|$ zu berechnen, bestimmt man mit dem Sinussatz unter Verwendung von (1) aus dem Dreieck ABC_3 die Seite

$$|AC_3| = 4 \sin(60^\circ + \zeta) \sin(60^\circ - \zeta) \sin(60^\circ + \varepsilon)$$

und aus dem Dreieck ACB_3 die Seite

$$|AB_3| = 4 \sin(60^\circ + \varepsilon) \sin(60^\circ - \varepsilon) \sin(60^\circ + \zeta).$$

Die Seite $|B_3C_3| = s_3$ erhält man mit dem Kosinussatz aus dem Dreieck AB_3C_3 . Der dabei auftretende Klammerausdruck kann so umgeformt werden, dass (2) Anwendung finden kann. Es ergibt sich:

$$s_3 = 4 \sin(\bar{\alpha}/3) \sin(\bar{\beta}/3) \sin(\bar{\gamma}/3). \quad (5)$$

Auch für die anderen zwei Seiten würde sich dieselbe Formel ergeben. Das Dreieck $A_3B_3C_3$ ist also gleichseitig, w. z. b. w.

Satz 4. In jedem Dreieck sind je zwei der drei Dreiecke von Morley, Taylor und Marr zentrisch ähnlich.

Beweis. Um dies zu zeigen, genügt es, zu beweisen, dass $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{B_2C_2}$ ist. Für das Dreieck AB_2C_2 folgt aus dem Sinussatz:

$$\sin(\not AB_2C_2) = (|AC_2|/s_2) \sin(120^\circ + \delta).$$

Ermittelt man $|AC_2|$ aus dem Dreieck ABC_2 und setzt man für s_2 aus (4) ein, folgt $\not AB_2C_2 = \zeta$, da $\not ABC_2$ spitz sein muss.

Es sei D der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC_1}$ und $\overline{B_2C_2}$, dann ist der Winkel $DAB_2 = 60^\circ + \delta$ und $\not ADB_2 = 60^\circ + \varepsilon$.

Auf dieselbe Weise bekommt man den Winkel AC_1B_1 , der ebenfalls $60^\circ + \varepsilon$ ist. Daraus folgt: $\overline{B_1C_1} \parallel \overline{B_2C_2}$. Die gleichen elementaren Überlegungen zeigen, dass auch $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2}$ ist.

Auf analoge Weise ergibt sich für das Dreieck $A_3B_3C_3$, dass $\overline{A_3B_3} \parallel \overline{A_2B_2}$ ist, usw.

(Wie Taylor und Marr weiter zeigten, ergeben alle Winkeldreiteilenden der Innen- und Aussenwinkel und der erhabenen Aussenwinkel 27 Schnittpunkte, die auf drei, jeweils aus parallelen Geraden bestehenden Geradenscharen liegen, wobei auf einer Geraden sich sechs Punkte befinden.)

Neununddreissig merkwürdige Punkte

Im folgenden soll über einige merkwürdige Punkte berichtet werden, die sich aus den Sätzen von Morley, Taylor und Marr ergeben. Zu den Beweisen wird ein Hilfssatz verwendet. Es gilt die Gleichung:

$$(|AB_i| \cdot |BC_i| \cdot |CA_i|) / (|AC_i| \cdot |BA_i| \cdot |CB_i|) = 1. \quad (6)$$

($i = 1, 2, 3$; gilt auch für die folgenden Beweise!)

Der Beweis ergibt sich aus der Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke ABC_i , BCA_i und ACB_i .

Um (6) zu beweisen, könnte man auch von der allgemeineren Voraussetzung ausgehen: $\angle C_iAB = \angle B_iAC$, $\angle A_iCB = \angle B_iCA$ und $\angle C_iBA = \angle A_iBC$.

Als weiterer Hilfssatz wird der Satz von Ceva benutzt, für den auch die Umkehrung gilt.

Satz 5. Die gemeinsamen Ecktransversalen entsprechender Eckpunkte des Dreieckes ABC und je eines der Dreiecke $A_iB_iC_i$ gehen durch einen Punkt (3 Punkte). Für $i = 1$ war dies schon Taylor und Marr bekannt.

Beweis. Es soll nun bewiesen werden, dass die Linien $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$ und $\overline{CC_2}$ einander in einem Punkt schneiden.

Es sei T der Schnittpunkt der Geraden durch $\overline{AA_2}$ und der Seite $\overline{B_2C_2}$ des Dreieckes $A_2B_2C_2$.

Man falle die Normalen von A und A_2 auf $\overline{B_2C_2}$. Dadurch entstehen zwei ähnliche, rechtwinklige Dreiecke. Da $\angle AC_2B_2 = \varepsilon$ ist, erhält man die Proportion:

$$[|C_2T| - |AC_2| \cos \varepsilon] : [s_2/2 - |C_2T|] = |AC_2| \sin \varepsilon : (s_2 \sqrt{3}/2).$$

Daraus ergibt sich nach elementarer Umformung mit dem Sinussatz und (1) und (4), dass die gemeinsame Ecktransversale $\overline{AA_2}$ die Seite des Dreieckes $A_2B_2C_2$ im Verhältnis

$$-\sin \zeta \sin (60^\circ + \varepsilon) / [\sin \varepsilon \sin (60^\circ + \zeta)]$$

teilt. Die Teilverhältnisse der beiden anderen Seiten erhält man durch zyklische Vertauschung von δ , ε und ζ . Da das Produkt dieser drei Teilverhältnisse bei Berücksichtigung der Vorzeichen gleich -1 ist, folgt nach der Umkehrung des Satzes von Ceva, dass sich die drei Ecktransversalen $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$ und $\overline{CC_2}$ in einem Punkt schneiden. Wie man schon aus (3), (4) und (5) erkennen kann, haben die Dreiecke $A_iB_iC_i$ analoge geometrische Eigenschaften.

Analog ist auch der Beweis dafür, dass die Linien $\overline{AA_3}$, $\overline{BB_3}$ und $\overline{CC_3}$ durch einen Punkt gehen und braucht daher nicht angeführt zu werden.

Satz 6. Die Ähnlichkeitsstrahlen je zweier gleichseitiger Dreiecke von Morley, Taylor und Marr schneiden die Seiten des Dreieckes ABC in Punkten, deren Ver-

bindungslinien zu den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreieckes ABC durch einen Punkt gehen (3 Punkte).

Beweis. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden $\overline{C_1C_2}$ mit der Dreieckseite \overline{AB} . Da $\not C_1AC_2 = \not C_1BC_2 = 60^\circ$ ist, folgt:

$$|AS| : |BS| = |AC_1| \cdot |AC_2| / (|BC_1| \cdot |BC_2|).$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man die Teilverhältnisse der anderen zwei Seiten $|AC|$ und $|BC|$.

Da ihr Produkt bei gleichem Umlaufsinn gleich -1 ist, gehen nach der Umkehrung des Satzes von Ceva die entsprechenden Ecktransversalen des Dreieckes ABC durch einen Punkt.

Analog wird der Satz für die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ sowie für die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$ bewiesen.

Satz 7. Die Symmetriearchsen der gleichseitigen Dreiecke $A_iB_iC_i$ schneiden die entsprechenden Seiten des Dreieckes ABC in Punkten, deren zugehörige Ecktransversalen des Dreieckes ABC durch einen Punkt gehen (3 Punkte).

Beweis. Es sei R der Schnittpunkt der Symmetrale von $\not A_1C_1B_1$ mit der Seite \overline{AB} des Dreieckes ABC .

Aus dem Sinussatz, angewandt auf die Dreiecke ARC_1 und BRB_1 folgt das Teilverhältnis. Es beträgt:

$$- |AC_1| \cos \varepsilon / (|BC_1| \cos \delta).$$

Zyklische Vertauschung führt zu den Teilverhältnissen der beiden anderen Seiten. Da das Produkt gleich -1 ist, gehen die entsprechenden Ecktransversalen in bezug auf das Dreieck ABC durch einen Punkt. Analog wird auch der Beweis für die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ geführt.

Satz 8. Es seien D_i die Schnittpunkte der Geraden durch \overline{BC}_i und \overline{CB}_i , E_i die Schnittpunkte von \overline{AC}_i und \overline{CA}_i und ebenso F_i die Schnittpunkte der Geraden \overline{AB}_i und \overline{BA}_i .

Die Verbindungslinien $\overline{A_iD_i}$, $\overline{B_iE_i}$ und $\overline{C_iF_i}$ schneiden sich in einem Punkt (3 Punkte).

Beweis. Wie man mit dem Sinussatz aus den Dreiecken A_1BC_1 und B_1AC_1 unter Verwendung von (1) und (3) finden kann, sind die Winkel $C_1A_1B = 60^\circ + \zeta$ und $\not C_1B_1A = 60^\circ + \zeta$.

Daraus folgt, dass das Dreieck A_1B_1F gleichschenklig ist. F_1 liegt daher auf der Symmetrale von $\not A_1C_1B_1$, woraus die Behauptung für das Dreieck $A_1B_1C_1$ folgt.

Analog wird der Beweis für $i=2$ und $i=3$ geführt.

Satz 9. Die Geraden durch die Strecken \overline{AD}_i , \overline{BE}_i und \overline{CF}_i schneiden sich in einem Punkt (3 Punkte).

Beweis. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden \overline{CF}_1 und \overline{AB} . Aus den Flächen der Dreiecke ASC und BSC hat man das Teilverhältnis:

$$|AS| : |BS| = (|AC| \cdot |AF_1| \sin \delta) : (|BC| \cdot |BF_1| \sin \varepsilon).$$

Durch zyklische Vertauschung erhält man die übrigen Teilverhältnisse, deren Produkt bei Berücksichtigung der Vorzeichen -1 ergibt. Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva folgt die Behauptung.

Auf analoge Weise wird der Beweis für $i=2$ und $i=3$ geführt.

Satz 10. Zeichnet man in den Dreiecken A_iB_iC , B_iC_iA und A_iC_iB die Höhen, die Winkelsymmetralen, den Inkreis und die Ankreise, dann haben die Fusspunkte der Höhen und Winkelsymmetralen auf den Seiten des gleichseitigen Dreieges und ebenso die Berührungs punkte dieser Kreise auf den Seiten des gleichseitigen Dreieckes entsprechende Ecktransversalen in diesem gleichseitigen Dreieck, die einander in einem Punkt schneiden (12 Punkte).

Der Beweis erfolgt mit (6) und der Umkehrung des Satzes von Ceva. Da er sehr einfach ist, wird er nicht angeführt.

Satz 11. Zeichnet man in den Dreiecken ABC_i , BCA_i und ACB_i die Höhen, Winkelsymmetralen den Inkreis und die Ankreise, dann haben die Fusspunkte der Höhen und Winkelsymmetralen auf den Seiten des Dreieckes ABC und ebenso die Berührungs punkte der Inkreise und Ankreise auf den Seiten des Dreieckes ABC entsprechende Ecktransversalen im Dreieck ABC , die durch einen Punkt gehen (12 Punkte).

Der elementare Beweis wird auch hier mit (6) und der Umkehrung des Satzes von Ceva geführt.

Zu bemerken ist, dass dieser Satz auch unter den allgemeineren Voraussetzungen bewiesen werden könnte, wie beim Beweis von (6). Dabei wären die Dreiecke $A_iB_iC_i$ nicht mehr gleichseitig.

Eine Eigenschaft der Umkreise der Dreiecke von Morley, Taylor und Marr

Satz 12. Die Umkreise der Dreiecke ABC_i , BCA_i und ACB_i berühren die Umkreise der Dreiecke $A_iB_iC_i$.

Beweis. Es sei M der Umkreismittelpunkt des Dreieckes ABC_1 . Nach dem Satz vom Peripheriewinkel ist $\angle AMC_1 = 2\varepsilon$ und $\angle AC_1M = 90^\circ - \varepsilon$. Ferner ergibt sich: $\angle AC_1B_1 = 60^\circ + \varepsilon$.

Daraus folgt: $\angle AC_1M + \angle AC_1B_1 + (\angle B_1C_1A_1)/2 = 180^\circ$.

Dies bedeutet, dass der Umkreismittelpunkt des Dreieckes ABC_1 auf einer Symmetriechse des Morleyschen Dreieckes liegt. Der Umkreis des Dreieckes ABC_1 berührt also den Umkreis des Dreieckes $A_1B_1C_1$, was auch für die Umkreise der Dreiecke BCA_1 und ACB_1 zutrifft.

Analog ist auch die Beweisführung für $i=2$ und $i=3$. Zu bemerken ist noch, dass die Umkreise der Dreiecke ABC_i einander unter 60° schneiden. Dasselbe ist auch der Fall bei den Umkreisen der Dreiecke BCA_i und ACB_i , wie leicht zu zeigen ist.

Für wesentliche Hinweise danke ich Herrn Prof. Dr. Walter Wunderlich, Technische Universität Wien.

Karl Steiner, St. Pölten

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. A. JOHNSON, *Advanced Euclidean Geometry*, S. 253, New York 1960.
- 2 H. S. M. COXETER, *Unvergängliche Geometrie*, S. 40, Birkhäuser Verlag, Basel 1963.
- 3 H. DÖRRIE, *Mathematische Miniaturen*, S. 110, Wiesbaden 1969.
- 4 F. G. TAYLOR und W. L. MARR, *Proceedings of Edinburgh, Math. Soc. XXXII*, 119–150 (1914).
- 5 *Mathematische Reflexionen* (Autoren-Kollektiv), Schroedel-Verlag, Hannover 1973.
- 6 R. HONSBERG, *Mathematical Gems*, The Mathematical Society of America, 1973.

Aufgaben

Aufgabe 773. Call a positive prime ideal, if primality is retained under iteration as often as desired of the operations of permuting digits, adding digits and multiplying digits. Determine all ideal primes (in base 10).

P. H. Doyle, East Lansing, Michigan, USA

Solution. Clearly 2, 3, 5 and 7 are ideal primes. So let us assume that p is an ideal prime ≥ 11 , having $n \geq 2$ digits, that are supposed to be arranged in nondescending order. The multiplication property implies that all digits of p are 1 except the last one, which must have the value 3 or 7. Hence p is of the form

$$p_1 = (10^n - 1)/9 + 2 \quad \text{or} \quad p_2 = (10^n - 1)/9 + 6.$$

The addition property implies that n is odd in both cases. Now let us consider the permutation property. Interchanging the last digit with one of the digits 1 increases p_1 by $2(10^k - 1)$ and p_2 by $6(10^k - 1)$ ($k = 1, 2, \dots, n-2$ or $n-1$). Calculation mod 7 yields

k	1	2	3	4	5	6
$2(10^k - 1)$	4	2	3	6	1	0
$6(10^k - 1)$	5	6	2	4	3	0

(mod 7)